系 统 科 学 与 数 学
*J. Sys. Sci. & Math. Scis.*
**28**(11) (2008, 11), 1331–1336

# 无线网络中全调度问题的一种随机分布式算法*

肖 岚 闫桂英 任 伟
(中国科学院数学与系统科学研究院， 北京 100190)

李 旭
(北京交通大学， 北京 100044)

**摘要** 无线网络中的全调度, 要确保网络中每个节点所可能的链路信息和广播信息都能无冲突地进行传输. 通过简单的构造方法, 证明了多项式时间内, 能找到一个长度为 $O(\triangle_{\rm out}^2\triangle_{\rm in})$ 的全调度；并且给出了全调度问题的一种随机分布式算法，证明了这种随机分布式算法，对任意的常数 $h$, $0<h<1$, 能以 $1-h$ 的概率，得到一长度为 $O(\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}^2\ln\frac{n}{h})$ 的全调度.

**关键词** 无线网络，链路调度，广播调度，全调度，随机分布式算法.

**MR(2000) 主题分类号** 05C28

## 1 引 言

无线网络，如无线分组网络，手提电话网络，卫星网络等，由一些节点构成，两个节点通过无线电波传输来进行通信. 信息通过同一信道进行传播. 本文的信道分配采用时分复用 (TDM) 模式，在这种模式中，不冲突的信息将分配同一时隙.

因此，我们将设计一个调度方案，给每个可能的信息传输都分配一时隙，使得分配同一时隙的信息能不发生冲突地传输. 调度所需时隙的数目是我们所关注的，称之为调度的长度.

在信息传输的过程中，主要有两类冲突：一级冲突和二级冲突. 当一节点在同一时隙执行多个任务时，比如接受两个不同节点的信息，或同时接受和发送信息，称为一级冲突 (如图 1); 假设节点 $D$ 同时在节点 $A$ 和 $C$ 的传播范围内，节点 $B$ 在节点 $A$ 的传播范围内，当节点 $A$ 向 $B$ 传输的信息和节点 $C$ 向节点 $D$ 传输的信息分配给同一时隙时，称之为二级冲突 (如图 2).

* 国家自然科学基金 (10531070, 10721101) 和 (60674009) 资助课题.
收稿日期：2008-06-28, 收到修改稿日期：2008-10-15.

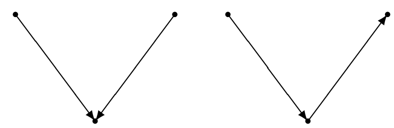

图 1 一级冲突

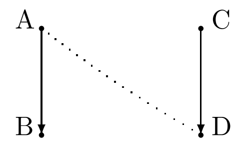


图 2 二级冲突

文献 [1–4] 分别对两种不同的调度模式链路调度和广播调度进行了研究．链路调度中，在无冲突的情况下，节点只是对其传播范围中的一个节点一对一地发送信息，这种信息称之为链路信息；而广播调度，则确保每个节点发送的信息能无冲突地到达其传播范围内的所有节点，这种信息称之为广播信息．

文献 [5] 结合链路调度和广播调度，首次提出了全调度模式，即要确保网络中每个节点的链路信息无冲突地传输，同时要保证每个节点的广播信息无冲突地传输．本文在第 2 节中，将用有向图来模拟无线网络，从而无线网络中的调度问题可以描述为其相应的有向图中的染色问题；通过简单的构造方法，第 3 节给出了全调度问题的一个全局上界；而一种随机分布式算法将在第 4 节中给出．

## 2 调度与染色

有向图 $G=(V,A)$ 用来表示无线网络，其点集 $V$ 表示无线网络中的所有节点的集合；顶点 $u$ 到 $v$ 有一条有向边当且仅当 $v$ 在 $u$ 的传播范围内．注意到，由于节点之间不同的传播能力，$(u,v)\in A$ 并不意味着 $(v,u)\in A$. 通过上下文，我们将看到无线网络中的调度问题将描述成有向图 $G=(V,A)$ 中的染色问题，其所着的颜色和调度问题中所分配的时隙是一一对应的．

**链路调度问题**

链路调度问题对应着 $G=(V,A)$ 的一种弧染色 $f:A\to Z^+$ 使得 $A$ 中的任何一对弧 $(a,b)$,$(c,d)$ 可以着相同的颜色，即 $f(a,b)=f(c,d)$, 当且仅当其满足以下两个条件

L1: 顶点 $a,b,c,d$ 互不相同；

L2: $(a,d)\notin A$, $(c,d)\notin A$.

**广播调度问题**

广播调度问题对应着 $G=(V,A)$ 的一种顶点染色 $f:V\to Z^+$ 使得 $V$ 中的任何一对顶点 $a$, $b$ 可以着相同的颜色，即 $f(a)=f(b)$, 当且仅当其满足以下两个条件

B1: $(a,b)\notin A$, $(b,a)\notin A$;

B2: $V$ 中不存在顶点 $c$ 使得 $(b,c)\in A$ 且 $(a,c)\in A$.

**全调度问题**

全调度问题对应着 $G=(V,A)$ 的一种全染色 $f:V\cup A\to Z^+$ 使得以下四个条件满足

T1: 对任何一对弧 $(a,b)$, $(c,d)$, 如果 $f(a,b)=f(c,d)$, 则条件 L1,L2 必须同时满足；

T2: 对任何一对顶点 $a,b$, 如果 $f(a)=f(b)$, 则条件 B1,B2 必须同时满足；

T3: 对 $A$ 中的任何一条弧 $(a,b)$, $f(a)\neq f(a,b)$ 且 $f(b)\neq f(a,b)$;

T4: 对 $A$ 中的任何一条弧 $a$, $b$ 和 $V$ 中的任何一个顶点 $c(\neq a,b)$, 如果 $f(a,b)=f(c)$, 则 $(c,a)\notin A$, $(c,b)\notin A$, 而且不存在 $V$ 中的任何顶点 $d$, 使得 $(a,d)\in A$ 且 $(c,d)\in A$.

## 3　全局上界

对每个有向图 $G=(V,A)$, 如下定义 $G$ 的简单无向冲突图

$$I(G)=(V_{I(G)},E_{I(G)}):V_{I(G)}=V\cup A,$$

$V\cup A$ 中任何一对元素是否有边相连依据以下规则

规则 I　对任何一对元素 $(a,b),(c,d)\in A$, $I(G)$ 中有一条连接 $(a,b)$, $(c,d)$ 的边，如果以下条件之一满足即可.

1)　$|\{a,b\}\cap\{c,d\}|\geq 1$;

2) $(a,d)\in A$ 或 $(c,b)\in A$.

规则 II　对任何一对元素 $a$, $b\in V$, $I(G)$ 中有一条连接 $a$, $b$ 的边，以下条件至少有一条满足

1)　$(a,b)\in A$, 或 $(b,a)\in A$;

2)　存在 $V$ 中的一个顶点 $c$ 使得 $(a,c)\in A$ 且 $(b,c)\in A$.

规则 III　对任何一对元素 $(a,b)\in A$, $c\in V$, $I(G)$ 中有一条连接 $(a,b)$, $c$ 的边，如果以下条件之一满足即可.

1)　$c=a$ 或 $c=b$;

2)　$(c,a)\in A$ 或 $(c,b)\in A$;

3)　存在一个顶点 $V$ 中的点 $d$ 使得 $(a,d)\in A$ 且 $(c,d)\in A$.

假设无线网络的每个节点的邻点的位置，每个节点的出度和入度以及网络的节点数目都已知.

**引理 3.1**　$G$ 的简单无向冲突图 $I(G)$ 中每个点的度小于等于 $\triangle_{\rm out}^2\triangle_{\rm in}+\triangle_{\rm out}\triangle_{\rm in}+\triangle_{\rm out}+2\triangle_{\rm in}$ .

证　对 $I(G)$ 中的元素 $(a,b)\in A$, 由规则 I, III, 可得

$$\begin{aligned}d_{I(G)}((a,b))&\leq 2(\triangle_{\rm in}+\triangle_{\rm out}-1)+2(\triangle_{\rm in}-1)(\triangle_{\rm out}-1)\\&\quad+2+(\triangle_{\rm in}-1)+\triangle_{\rm in}+(\triangle_{\rm in}-1)(\triangle_{\rm out}-1)\\&=3\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}+\triangle_{\rm in}-\triangle_{\rm out}+2.\end{aligned}$$

对 $I(G)$ 中的元素 $a\in V$, 由规则 II, III,

$$\begin{aligned}d_{I(G)}(a)&\leq\triangle_{\rm in}+\triangle_{\rm out}+\triangle_{\rm out}(\triangle_{\rm in}-1)+\triangle_{\rm out}^2+\triangle_{\rm out}(\triangle_{\rm in}-1)(\triangle_{\rm out}-1)\\&\quad+\triangle_{\rm out}+\triangle_{\rm in}+\triangle_{\rm out}(\triangle_{\rm in}-1)\\&=\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}^2+\triangle_{\rm out}(\triangle_{\rm in}+1)+2\triangle_{\rm in}.\end{aligned}$$

因此命题成立.

**引理 3.2**　有向图 $G=(V,A)$ 的全调度需且仅需 $\chi(I(G))$ 个时隙.

证　令 $r=\chi(I(G))$ 且 $\varphi:V_{I(G)}\to\{1,2,\cdots,r\}$ 是 $I(G)$ 上的一个正常 $r$- 染色.

如下构造有向图 $G=(V,A)$ 的全调度.

如果 $I(G)$ 中的一个元素，$(x,y)\in A$ 或 $z\in V$ 在 $\varphi$ 中着颜色 $i$, $1\leq i\leq r$, 那么调度 $S$ 给节点 $x$ 到节点 $y$ 的链路信息分配时隙 $i$ 或给节点 $z$ 的广播信息分配时隙 $i$.

元素 $x$ 与 $(x,y)$ 在 $I(G)$ 中相邻，因此在每个时隙，$x$ 执行至多一项任务；或者传输广播信息或者传输链路信息. 又以 $x$ 为起点的弧在 $I(G)$ 中相邻，所以在每个时隙，$x$ 向其传播范围的至多一个节点传输链路信息.

$I(G)$ 的点集在 $\varphi$ 中被正常染色，因此在调度 $S$ 中，每个节点所可能的传输信息不会被重复分配时隙.

因此我们所得到的调度 $S$ 是良定义的.

下面证明在调度 $S$ 中，所有可能的链路信息和广播信息都能无冲突地传输.

假设在调度 $S$ 中，节点 $x$ 到 $y$ 的链路信息和 $z$ 的广播信息被分配时隙 $i$, 由 $I(G)$ 的构造，规则 I 、 II 、 III 保证信息能无冲突地传输.

另一方面，假设 $S$ 是一个长度为 $r$ 的全调度. 如下构造 $I(G)$ 的 $r$- 正常染色.

在全调度 $S$ 中，若 $x$ 到 $y$ 的链路信息被分配时隙 $i$, 则 $I(G)$ 中元素 $(x,y)$ 着颜色 $i$; 若 $z$ 的广播信息被分配时隙 $j$, 则 $I(G)$ 中元素 $z$ 着颜色 $j$. 由于全调度 $S$ 的无冲突性，及 $I(G)$ 的构造，类似可证，所得的染色是 $I(G)$ 的一个正常染色. 证毕.

**定理 3.1** 对每个有向图 $G$, 能在多项式时间内构造出长度为 $O(\triangle_{\rm out}^2\triangle_{\rm in})$ 的全调度.

证 由引理 3.1, 3.2 和 Brook's 定理 (参见文 [6]), 易见命题成立.

## 4 随机分布式算法

首先，我们如下定义一个操作.

**操作**$((L_{xy},B_x),r)$: 节点 $x$ 以 $p$ 的概率向它的外邻点 $y$ 传输链路信息，以概率 $q$ 传输广播信息，以概率 $1-p-q$ 既不传输链路信息，也不传输广播信息，重复独立的进行 $r$ 次，其中参数 $r$, $p$, $q$ 将进一步待定.

算法分为 $\triangle_{\rm out}$ 个阶段：对每个节点 $x$ 的外邻点排序，不妨设为 $y_1,y_2,\cdots,y_k$, 其中 $1\le k\le\triangle_{\rm out}$. 在第 $i$ 个阶段， $(1\le i\le\triangle_{\rm out})$, $V$ 中的每个节点 $x$ 都执行操作 $((L_{xy_i},B_x),r)$.

根据以上算法描述，对每条弧 $(x,y)\in A$, 定义事件 $A_{xy}$ 为：节点 $x$ 向其外邻点 $y$ 传输链路信息失败；对每个顶点 $x\in V$, 定义事件 $A_x$ 为：节点 $x$ 传输广播信息失败.

令 $p=q=\frac{1}{2\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}$, 则有

**引理 4.1** 对任何一条弧 $(x,y)\in A$,

$$\Pr(A_{xy})\le\exp\Big(-\frac{r}{4e\,\triangle_{\rm in}\,\triangle_{\rm out}}\Big).$$

证 事件 $A_{xy}$ 意味着在操作 $((L_{xy},B_x),r)$ 的所有 $r$ 次独立实验中，节点 $x$ 向节点 $y$ 传输链路信息失败. 节点 $x$ 向入度为 $d_{\rm in}$ 的外邻点 $y$ 传输链路信息在操作 $((L_{xy},B_x),r)$ 的某次独立实验中成功的概率大于等于

$$p(1-p-q)^{d_{\rm in}}\ge\frac{1}{2\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}\Big(1-\frac{1}{\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}\Big)^{\triangle_{\rm in}}\ge\frac{1}{2\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}\Big(\frac{1}{2\mathrm{e}}\Big)^{\frac{1}{\triangle_{\rm out}}}\ge\frac{1}{4\mathrm{e}\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}.$$

所以

$$\Pr(A_{xy})\le\Big(1-\frac{1}{4\mathrm{e}\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}\Big)^r\le\exp\Big(-\frac{r}{4\mathrm{e}\,\triangle_{\rm in}\,\triangle_{\rm out}}\Big).$$

证毕.

**引理 4.2** 对每个节点 $x\in V$,

$$\Pr(A_x)\le\exp\Big(-\frac{r}{4\mathrm{e}\triangle_{\rm in}}\Big).$$

证　事件 $A_x$ 意味着在所有的 $\triangle_{\rm out}$ 个阶段中，节点 $x$ 传输广播信息失败．而节点 $x$ 在操作 $((L_{xy}, B_x), r)$ 的某次独立实验中传输广播信息成功的概率大于等于

$$q(1-p-q)^{\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}} \geq \frac{1}{2\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}\Big(1-\frac{1}{\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}\Big)^{\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}} \geq \frac{1}{4{\rm e}\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}.$$

所以

$$\Pr(A_x) \leq \Big(1-\frac{1}{4{\rm e}\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}\Big)^{r\triangle_{\rm out}} \leq \exp\Big(-\frac{r}{4{\rm e}\triangle_{\rm in}}\Big).$$

证毕.

令 $r = 4{\rm e}\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}\ln\frac{2n\triangle_{\rm out}}{h}$, 其中 $0<h<1$ 为一常数.

**引理 4.3**　上述随机分布式算法能成功地得到一全调度的概率是 $1-h$, 其中 $0<h<1$.

证　上述随机分布式算法失败，意味着至少有一个坏事件 $A_{xy}$, $(x,y)\in A$, 或 $A_x$, $x\in V$ 发生，由引理 4.1, 4.2, 可得

$$\begin{aligned}\Pr\Big(\Big(\bigcup_{(x,y)\in A} A_{xy}\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{x\in V} A_x\Big)\Big) &\leq \sum_{(x,y)\in A}\Pr(A_{xy})+\sum_{x\in v}\Pr(A_x)\\ &\leq n\triangle_{\rm out}\exp\Big(-\frac{r}{4{\rm e}\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}}\Big)+n\times\exp\Big(-\frac{r}{4{\rm e}\triangle_{\rm in}}\Big)\\ &\leq n\triangle_{\rm out}\frac{h}{2n\triangle_{\rm out}}+n\Big(\frac{h}{2n\triangle_{\rm out}}\Big)^{\triangle_{\rm out}}\\ &\leq h.\end{aligned}$$

所以命题成立.

**定理 4.4**　$\forall\ 0<h<1$ 和 $2\leq\max\{\triangle_{\rm in},\triangle_{\rm out}\}\leq n$, 对任何 $n$ 个点的有向图 $G$, 存在一随机分布式算法，能以 $1-h$ 的概率得到一长度为 $O(\triangle_{\rm in}\triangle_{\rm out}^2\ln\frac{n}{h})$ 的全调度.

## 参　考　文　献


[1] Alon N, Bar-noy A. Single round simulation on radio networks. *Journal of Algorithms*, 1992, **13**(2): 188–210.

[2] Ramanathan S and Lloyd E L. Scheduling algorithms for multihop radio networks. Applications, Technologies, Architectures and Protocols for Computer Communication, Conference proceedings on communications architectures and protocols, 1992, 211–222.

[3] Ramanathan S and Lloyd E L. Scheduling algorithms for multihop radio networks. *IEEE/ACM Trans. Networking*, 1993, **7**(2): 166–177.

[4] Sen A and Huson M L. A new model for scheduling packet radio networks. *Wireless Networks*, 1997, **3**: 71–82.

[5] Watanabe K, Tamura H, Sengoku M. New scheduling problems in a multi-hop network and their complexity results. The 47th IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems, 2004, **2**: 25–28.

[6] Bondy J A and Murty U S R. Graph Theory with Applications. London: Macmillan Press, 1976.
[7] Das Gautam K and Nandy Subhas C. Weighted broadcast in linear radio networks. *Information Processing Letters*, 2008, **106**(4): 136–143.
[8] Ephremedis A, Wieselthier J E and Baker D J. A design concept for reliable mobile radio networks with frequency hopping signalling. *Pmc. IEEE*, 1987, **75**(1): 56–73.
[9] Hilton A J W, Slivnik T and Stirling D S G. Aspects of edge list-colourings. *Discrete Math.*, 2001, **231**(1–3): 253–264.
[10] Watanabe K, Sengoku M, Tamura H, Nakano K and Shinoda S. A scheduling problem in a multihop network for CDMA system. Proc. of ITCCSCC '01, Tokushima, Japan, 2001.

## A RANDOMIZED DISTRIBUTED ALGORITHM FOR TOTAL SCHEDULING PROBLEM

XIAO Lan YAN Guiying REN Wei

(*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

LI Xu

(*Beijing Jiaotong University, Beijing* 100044)

**Abstract** In multihop radio network, total scheduling occurs when stations communicate one-to-one and broadcast simultaneously. In this paper, a global upper bound for total scheduling is proved by a simple construction method. A randomized distributed algorithm is also presented.

**Key words** Radio network, link scheduling, broadcast scheduling, total scheduling, randomized distributed algorithm.