

# 基于参数李雅普诺夫函数的 鲁棒预测控制器<sup>\*</sup>

郑鹏远 席裕庚 李德伟

(上海交通大学自动化研究所, 上海 200240)

**摘要** 针对多包描述的不确定系统, 提出一种新的鲁棒约束预测控制器. 离线设计时引入参数 Lyapunov 函数以减少单一 Lyapunov 函数设计时的保守性, 得到多包系统 Worst-case 情况下性能最优的不变集, 在线求解多包系统无穷时域性能指标的 min-max 优化问题. 设计采用了时变的终端约束集, 扩大了初始可行域, 而且能够获得较优的控制性能. 仿真结果验证了该方法的有效性.

**关键词** 鲁棒预测控制, 不变集, 时变终端约束集, 线性矩阵不等式, 参数李雅普诺夫函数.

MR(2000) 主题分类号 93D09

## 1 引言

近年来, 不确定性系统的鲁棒预测控制已经成为预测控制研究的热点, 在保证稳定的前提下, 主要目标在于降低在线计算量, 改进可行性和最优性. 文献 [1] 指出了约束预测控制稳定性分析中的三个要素: 终端约束集、终端代价函数和局部控制律. 利用这三个要素, 预测控制的稳定性问题得到了广泛的研究. 文献 [2–5] 采用 LMI 方法求解无穷时域二次性能指标的 min-max 优化问题, 因为需要在线求解多参数 LMI 优化问题, 当系统维数较高时, 此类在线算法计算量较大, 不利于实际应用. 为了解决这个问题, 研究者们相继提出了一系列改进的设计方法 [6–11]. 文献 [6–8] 离线确定一系列线性状态反馈控制律及其相对应的椭圆不变集, 在线则选择当前状态所处的最小的椭圆不变集所对应的控制律, 使在线计算量大为减小; 文献 [9–11] 采用离线设计在线综合的方法设计预测控制器. 文献 [11] 是一种在线计算量较低的可行方法, 通过在离线设计的不变集外附加自由引导变量, 进一步扩大了初始可行域并改善了控制性能, 但由于其变时域控制过程始终选取固定的终端约束集, 在当前状态进入约束集后其无穷时域控制输入固定为单一的状态反馈形式, 因此缺乏自由度进一步改进控制性能; 而且由于其设计方法基于单一的 Lyapunov 函数, 以及它在设计中所采用的多包不确定系统的标称系统在一般情况下是未知的, 均导致该设计方法具有较大的保守性.

为了更好地解决预测控制器初始可行域与控制性能的矛盾, 并且使其对于标称系统未知的控制系统亦具有适用性, 减少设计方法上的保守性, 本文提出一种新的鲁棒约束预测控

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金 (60504026, 60674041) 和国家 863 计划 (2006AA04Z173) 资助课题.

收稿日期: 2008-03-31.

制器, 引入参数 Lyapunov 函数减少了单一 Lyapunov 函数设计时要求二次稳定的保守性, 并且其终端约束集自初始时刻起均为时变的, 不但有较大的初始可行域, 而且可获得更优的控制性能.

## 2 问题描述

考虑时变 / 不确定系统

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k). \quad (1)$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n$  和  $u \in \mathbb{R}^m$  分别为系统状态和控制输入.

系统模型参数的不确定性可用多包形式描述为

$$[A(k), B(k)] \in \Omega, \quad \Omega = \text{Co}\{[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_L, B_L]\}.$$

即

$$[A(k), B(k)] = \sum_{l=1}^L \lambda_l(k)[A_l, B_l], \quad \sum_{l=1}^L \lambda_l(k) = 1.$$

输入约束和状态约束为

$$|u_j(k+i)| \leq u_{j,\max}, \quad i \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2a)$$

$$|\Psi_s x(k+i+1)| \leq \psi_{s,\max}, \quad i \geq 0, \quad s = 1, 2, \dots, q. \quad (2b)$$

通常无穷时域预测控制的在线优化问题可表示为

$$\min_{u(k+i|k), i \geq 0} \max_{[A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \|x(k+i|k)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u(k+i|k)\|_{\mathcal{R}}^2 \right] \\ \text{s.t.} \quad (1) \quad (2). \quad (3)$$

其中,  $\mathcal{L}$  和  $\mathcal{R}$  为正定加权矩阵, 由于受控系统具有不确定性, 难以直接优化性能指标  $J_\infty(k)$ .

为了有效地求解上述优化问题, 文献 [2] 引入控制不变集设计鲁棒控制器, 通过引入二次函数  $V(x) = x^T P x$ , 且强制要求其满足鲁棒稳定性约束

$$V(x(k+i+1|k)) - V(x(k+i|k)) \leq - \left[ \|x(k+i|k)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u(k+i|k)\|_{\mathcal{R}}^2 \right], \\ \forall [A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, \quad i \geq 0. \quad (4)$$

在系统稳定的情况下,  $x(\infty|k) = 0, V(\infty|k) = 0$ . 定义标量  $\gamma \geq 0$ , 矩阵  $Q = \gamma P^{-1}$  和矩阵  $X, Y, Z$  为 LMI 变量. 将 (4) 从  $i=0$  叠加到  $i=\infty$ , 可得其无穷时域性能指标上界

$$\max_{[A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k) \leq V(0, k) \leq \gamma. \quad (5)$$

取反馈控制律为  $F = YQ^{-1}$ , 则可将 (4), (5) 转化为如下 LMI

$$\begin{bmatrix} Q & QA_l^T + Y^T B_l^T & Q\mathcal{L}^{\frac{1}{2}} & Y^T \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} \\ A_l Q + B_l Y & Q & 0 & 0 \\ \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0. \quad (7)$$

输入约束和状态约束同样可转化为如下 LMI

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad X_{jj} \leq u_{j,\max}^2, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (8a)$$

$$\begin{bmatrix} Z & \Psi(A_l Q + B_l Y) \\ (A_l Q + B_l Y)^T \Psi^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z_{ss} \leq \psi_{s,\max}^2, \quad \Psi = [\Psi_1^T \ \Psi_2^T \ \dots \ \Psi_q^T]^T, \quad (8b)$$

$$s = 1, 2, \dots, q, \quad l = 1, 2, \dots, L.$$

因此将优化问题 (3) 转化为下列 LMI 求解问题.

**算法 1**<sup>[2]</sup>

$$\min_{\gamma, Q, X, Y} \gamma \quad \text{s.t. (6) (7) (8)}.$$

集合  $\varepsilon(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T Q^{-1} x \leq 1, Q > 0\}$  即为系统 (1) 的椭圆不变集, 其对应的反馈控制律为  $u(k|k) = Fx(k)$ ,  $F = YQ^{-1}$ .

文献 [2] 采用单一的 Lyapunov 函数, 则要求控制律二次稳定, 致使该设计方法具有较大的保守性. 为了减少上述设计的保守性, 文献 [4] 引入了参数 Lyapunov 函数  $V(i, k) = x(k+i|k)^T P(i, k)x(k+i|k)$ , 且强制要求其满足鲁棒稳定性约束

$$V(i+1, k) - V(i, k) \leq -[\|x(k+i|k)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u(k+i|k)\|_{\mathcal{R}}^2], \quad \forall [A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, \quad i \geq 0.$$

其中,  $P(i, k) = \sum_{l=1}^L \lambda_l(k+i)P_l$ ,  $i \geq 0$ , 进一步将优化问题 (3) 转化为如下 LMI 求解问题.

**算法 2**<sup>[4]</sup>

$$\min_{Q_1, Q_2, \dots, Q_L, \gamma, X, Y, G} \gamma$$

$$\text{s.t. } \begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & Q_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} G + G^T - Q_l & Q_l A_l^T + Y^T B_l^T & G^T \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} & Y^T \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} \\ A_l Q_l + B_l Y & Q_l & 0 & 0 \\ \mathcal{L}^{\frac{1}{2}} G & 0 & \gamma I & 0 \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$l = 1, 2, \dots, L, \quad t = 1, 2, \dots, L. \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & G + G^T - Q_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad X_{jj} \leq u_{j,\max}^2, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (11a)$$

$$\begin{bmatrix} Z & \Psi(A_l G + B_l Y) \\ (A_l G + B_l Y)^T \Psi^T & G + G^T - Q_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad Z_{ss} \leq \psi_{s,\max}^2, \quad \Psi = [\Psi_1^T \ \Psi_2^T \ \cdots \ \Psi_q^T]^T, \\ s = 1, 2, \dots, q, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (11b)$$

比较算法 2 与算法 1, 可知其改善控制性能是以更大的计算负担为代价的. 为了减少在线计算量, 文献 [11] 假设存在标称系统  $[\hat{A}, \hat{B}]$ , 采用离线设计在线综合的方法, 设计了鲁棒预测控制器:

**算法 3**<sup>[11]</sup> 首先离线设计椭圆不变集  $\varepsilon(Q_1)$  和  $\varepsilon(Q_0)$ , 引入一给定半径的内切圆, 要求  $\varepsilon(Q_1)$  覆盖该内切圆以保证系统的初始可行域,  $\varepsilon(Q_0)$  则对应系统无约束条件下的性能椭圆.

在线实施时, 以变时域控制驱动状态进入不变集  $\varepsilon(Q_1)$ ; 当控制时域缩减为  $N = 0$  时, 以  $\varepsilon(Q_1)$  和  $\varepsilon(Q_0)$  的凸组合来优化当前时刻所对应的状态反馈律, 将系统状态驱动到不变集  $\varepsilon(Q_0)$ ; 在  $\varepsilon(Q_0)$  中, 施加  $\varepsilon(Q_0)$  所对应的状态反馈律, 使系统状态趋近平衡点.

注 1 文献 [11] 的离线设计和在线优化均以标称系统存在为前提, 但对于多包系统而言, 标称系统可能并不存在, 这种假设限制了该方法的应用. 文献 [11] 的离线设计和在线优化还存在一些保守性. 首先, 其离线设计  $\varepsilon(Q_1)$  是在保证初始可行域尽可能大的前提下, 求解性能指标最优的椭圆不变集. 由于事先无法知道该系统的椭圆不变集的形状, 引入内切圆对椭圆不变集的短轴长度形成了不必要的约束 (即要求椭圆不变集的短轴长度不小于其内切圆半径), 进而使整个设计较为保守. 其次, 在线优化以固定不变集作为终端约束集, 造成控制性能不能进一步改善. 而且, 由于采用单一的 Lyapunov 函数, 则要求控制律二次稳定, 致使该设计方法具有较大的保守性.

### 3 鲁棒约束预测控制器的综合设计

基于上节分析, 本节将从实际系统出发, 引入文献 [4] 的参数 Lyapunov 函数, 同时借鉴文献 [11] 所采用的离线设计和在线优化方法, 在保持原有设计的优点的同时, 减少保守性, 改善系统性能.

#### 3.1 离线设计

首先分别设计多包系统 worst-case 情况下性能最优的椭圆集  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}$  和  $Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,L}$ . 其中,  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}$  决定着系统的初始可行域的大小;  $Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,L}$  用于改善系统的控制性能. 设计不变集, 可通过对其对应的性能指标上界赋值来保证初始可行域. 即令

$$\gamma = c, \quad (12a)$$

$$Q \leq Q_{i,l}, \quad i = 0, 1, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (12b)$$

通过  $\max \log \det(Q)$  可以求得椭圆集  $Q_{i,1}, Q_{i,2}, \dots, Q_{i,L}$ , 且使其最大内切椭圆  $Q$  能够覆盖最大范围.

**算法 4** 离线设计椭圆不变集  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}$  和  $Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,L}$ .

步骤 1 设计椭圆集  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}$ : 为取得较大的初始可行域, 则要求其最大内切椭圆  $Q$  能覆盖较大范围, 与其相对应的性能指标上界  $\gamma$  则应取较大的数值. 选取  $\gamma = c_1$ , 其值

由系统要求的初始可行域大小决定, 求解下列优化问题得到  $(Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}, \gamma_{INI}, X_{INI}, Y_{INI}, G_{INI}, Q_{INI})$ .

$$\max_{Q_1, Q_2, \dots, Q_L, X, Y, G, Q} \log \det(Q) \quad \text{s.t.} \quad (10) \quad (11) \quad (12).$$

步骤 2 求解系统无输入约束时的最优控制律. 任取  $\gamma = c_2$ , 求解下列优化问题以得到  $(Q_{opt,1}, Q_{opt,2}, \dots, Q_{opt,L}, \gamma_{opt}, Y_{opt}, G_{opt}, Q_{opt})$ .

$$\max_{Q_1, Q_2, \dots, Q_L, Y, G, Q} \log \det(Q) \quad \text{s.t.} \quad (10) \quad (12).$$

$F_{opt} = Y_{opt} G_{opt}^{-1}$  即系统无输入约束时的最优控制律.

步骤 3 设计椭圆集  $Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,L}$ , 使得有约束优化问题所对应的反馈控制律  $F_0$  正是无输入约束时的最优控制律  $F_{opt}$ , 并且其覆盖最大范围.

这时的约束反馈控制律即为无约束最优控制律, 即

$$F_0 = Y_0 G_0^{-1} = Y_{opt} G_{opt}^{-1} = F_{opt},$$

令  $\beta > 0, \gamma_0 = \beta \gamma_{opt}, Y_0 = \beta Y_{opt}, G_0 = \beta G_{opt}$ . 求解下列优化问题得到  $(Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,L}, \gamma_0, X_0, Y_0, G_0, Q_0)$ .

$$\max_{\beta, Q_1, Q_2, \dots, Q_L, X, Q} \log \det(Q) \quad \text{s.t.} \quad (10) \quad (11) \quad (12b).$$

注 2 以上离线设计椭圆集  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}$  时先给定性能指标上界值, 然后在保证性能指标的条件下求得其最大内切椭圆  $\varepsilon(Q)$  能覆盖最大范围. 而文献 [11] 中  $Q_1$  的设计是在给定椭圆不变集内切圆半径的前提下, 寻求性能指标的优化. 由于  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}$  和  $Q_1$  的设计本意是扩大系统的初始可行域, 因此本文的做法显得更为合理. 此外, 由于减少了对椭圆不变集短轴的约束条件, 并且引入参数 Lyapunov 函数代替单一的 Lyapunov 函数,  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}$  的设计相比文献 [11] 中  $Q_1$  引入内切圆的设计方法, 更加降低了保守性.

引理 1 基于算法 4 离线所设计的  $(Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}, \gamma_{INI}, X_{INI}, Y_{INI}, G_{INI})$  和  $(Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,L}, \gamma_0, X_0, Y_0, G_0)$ , 进行如下线性组合.

$$\begin{aligned} & a_1(Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}, \gamma_{INI}, X_{INI}, Y_{INI}, G_{INI}) + a_2(Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,L}, \gamma_0, X_0, Y_0, G_0) \\ &= (a_1 Q_{1,1} + a_2 Q_{0,1}, a_1 Q_{1,2} + a_2 Q_{0,2}, \dots, a_1 Q_{1,L} + a_2 Q_{0,L}, a_1 \gamma_{INI} + a_2 \gamma_0, a_1 X_{INI} + a_2 X_0, \\ & \quad a_1 Y_{INI} + a_2 Y_0, a_1 G_{INI} + a_2 G_0), \end{aligned}$$

$$0 \leq a_1 \leq 1, \quad 0 \leq a_2 \leq 1, \quad a_1 + a_2 \leq 1.$$

则组合所得的椭圆集  $a_1 Q_{1,1} + a_2 Q_{0,1}, a_1 Q_{1,2} + a_2 Q_{0,2}, \dots, a_1 Q_{1,L} + a_2 Q_{0,L}$  为系统 (1) 的控制不变集. 当系统终端  $x(k+N|k)$  进入  $\varepsilon(a_1 Q_{1,l} + a_2 Q_{0,l})$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ , 其终端代价函数的上界为

$$\begin{aligned} & x^T(k+N|k)P(N,k)x(k+N|k) \leq a_1 \gamma_{INI} + a_2 \gamma_0, \\ & P(N,k) = \sum_{l=1}^L \lambda_l(k+N)(a_1 \gamma_{INI} + a_2 \gamma_0)(a_1 Q_{1,l} + a_2 Q_{0,l})^{-1}. \end{aligned}$$

证 因为篇幅所限, 此处略去.

### 3.2 在线综合

对于不确定系统 (1), 我们可以得到系统的状态预测

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ \vdots \\ x(k+N|k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(k) \\ \vdots \\ A(k+N-1)\cdots A(k+1)A(k) \end{bmatrix} x(k) \\ &+ \begin{bmatrix} B(k) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ A(k+N-1)\cdots A(k+1)B(k) & \cdots & \cdots & B(k+N-1) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} u(k|k) \\ \vdots \\ u(k+N-1|k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

将上式改写为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ x(k+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}(k) \\ \tilde{A}_N(k) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \tilde{B}(k) \\ \tilde{B}_N(k) \end{bmatrix} \tilde{u}(k). \quad (13)$$

其中  $\tilde{x}(k+1) = [x(k+1|k)^T, x(k+2|k)^T, \dots, x(k+N-1|k)^T]^T$ . 由 (1) 和 (13) 式可知, 系统矩阵  $[\tilde{A}(k), \tilde{B}(k)]$  为一系列顶点的凸组合, 其顶点数为  $\tilde{L} = L^{N-1}$ .  $[\tilde{A}_N(k), \tilde{B}_N(k)]$  作为终端状态  $x(k+N)$  的系统矩阵, 为一系列顶点的凸组合, 其顶点数则为  $\tilde{L}_N = L^N$ . 即

$$[\tilde{A}(k), \tilde{B}(k)] = \sum_{\tilde{l}=1}^{\tilde{L}} \xi_{\tilde{l}}(k) [\tilde{A}_{\tilde{l}}, \tilde{B}_{\tilde{l}}], \quad \sum_{\tilde{l}=1}^{\tilde{L}} \xi_{\tilde{l}}(k) = 1, \quad \tilde{l} = 1, 2, \dots, \tilde{L}.$$

$$[\tilde{A}_N(k), \tilde{B}_N(k)] = \sum_{\tilde{l}_N=1}^{\tilde{L}_N} \theta_{\tilde{l}_N}(k) [\tilde{A}_{N,\tilde{l}_N}, \tilde{B}_{N,\tilde{l}_N}], \quad \sum_{\tilde{l}_N=1}^{\tilde{L}_N} \theta_{\tilde{l}_N}(k) = 1, \quad \tilde{l}_N = 1, 2, \dots, \tilde{L}_N.$$

则在控制时域  $N$  内输入约束为

$$|u_j(k+i|k)| \leq u_{j,\max}, \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (14a)$$

将 (13) 代入 (2b) 得状态约束

$$\left| \tilde{\Psi} [\tilde{A}_{\tilde{l}} x(k) + \tilde{B}_{\tilde{l}} \tilde{u}(k)] \right| \leq \tilde{\psi}, \quad \tilde{l} = 1, 2, \dots, \tilde{L}. \quad (14b)$$

$$\left| \Psi_s [\tilde{A}_{N,\tilde{l}_N} x(k) + \tilde{B}_{N,\tilde{l}_N} \tilde{u}(k)] \right| \leq \psi_{s,\max}, \quad s = 1, 2, \dots, q, \quad \tilde{l}_N = 1, 2, \dots, \tilde{L}_N. \quad (14c)$$

$\tilde{\Psi}$  是由  $\Psi$  组成的相应维数的块对角阵,  $\tilde{\psi}$  是由  $\psi$  组成的相应维数的列向量, 其中  $\Psi = [\Psi_1^T, \Psi_2^T, \dots, \Psi_q^T]^T$ ,  $\psi = [\psi_{1,\max}, \psi_{2,\max}, \dots, \psi_{q,\max}]^T$ .

对于离线设计得到的椭圆集  $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}$  和  $Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,L}$ , 以其组合  $a_1 Q_{1,l} + a_2 Q_{0,l}$  作为终端约束, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k)^T \tilde{A}_{N, \tilde{l}_N}^T + \tilde{u}(k)^T \tilde{B}_{N, \tilde{l}_N}^T \\ \tilde{A}_{N, \tilde{l}_N} x(k) + \tilde{B}_{N, \tilde{l}_N} \tilde{u}(k) & a_1 Q_{1,l} + a_2 Q_{0,l} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (15)$$

$$l = 1, 2, \dots, L, \quad \tilde{l}_N = 1, 2, \dots, \tilde{L}_N.$$

$$0 \leq a_1 \leq 1, \quad 0 \leq a_2 \leq 1, \quad a_1 + a_2 \leq 1. \quad (16)$$

则将优化问题 (3) 转化为

$$\begin{aligned} & \min_{\tilde{u}(k)} \max_{[A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} \bar{J}(k) \\ & \bar{J}(k) = \|x(k)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|\tilde{A}(k)x(k) + \tilde{B}(k)\tilde{u}(k)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|\tilde{u}(k)\|_{\tilde{\mathcal{R}}}^2 \\ & \quad + \|\tilde{A}_N(k)x(k) + \tilde{B}_N(k)\tilde{u}(k)\|_{P(N,k)}^2 \\ & \text{s.t.} \quad (14) \quad (15) \quad (16). \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$P(N, k) = \sum_{l=1}^L \lambda_l(k+N) P_l, \quad P_l = \gamma Q_l^{-1}, \quad Q_l = a_1 Q_{1,l} + a_2 Q_{0,l}, \quad \gamma = (a_1 \gamma_{INI} + a_2 \gamma_0),$$

$\tilde{\mathcal{L}}$  和  $\tilde{\mathcal{R}}$  分别是由  $\mathcal{L}$  和  $\mathcal{R}$  组成的相应维数的块对角阵.

由 (15) 知  $x(k+N|k) \in \varepsilon(a_1 Q_{1,l} + a_2 Q_{0,l})$ , 则由引理 1 知终端代价函数存在上界

$$\left\| \tilde{A}_N(k)x(k) + \tilde{B}_N(k)\tilde{u}(k) \right\|_{P(N,k)}^2 \leq a_1 \gamma_{INI} + a_2 \gamma_0.$$

令

$$\left\| \tilde{A}(k)x(k) + \tilde{B}(k)\tilde{u}(k) \right\|_{\mathcal{L}}^2 + \|\tilde{u}(k)\|_{\tilde{\mathcal{R}}}^2 \leq b,$$

即

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{L}}^{-1} & 0 & \tilde{A}_l x(k) + \tilde{B}_l \tilde{u}(k) \\ 0 & \tilde{\mathcal{R}}^{-1} & \tilde{u}(k) \\ x(k)^T \tilde{A}_l^T + \tilde{u}(k)^T \tilde{B}_l^T & \tilde{u}(k)^T & b \end{bmatrix} \geq 0, \quad \tilde{l} = 1, 2, \dots, \tilde{L}. \quad (18)$$

从而优化问题 (17) 可化为

$$\begin{aligned} & \min_{a_1, a_2, b, \tilde{u}(k)} \|x(k)\|_{\mathcal{L}}^2 + b + a_1 \gamma_{INI} + a_2 \gamma_0 \\ & \text{s.t.} \quad (14) \quad (15) \quad (16) \quad (18). \end{aligned} \quad (19)$$

综合上述离线设计和在线综合, 给出如下鲁棒预测控制器.

**算法 5** 利用算法 4 离线构造  $(Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,L}, \gamma_{INI}, X_{INI}, Y_{INI}, G_{INI})$  和  $(Q_{0,1}, Q_{0,2}, \dots, Q_{0,L}, \gamma_0, X_0, Y_0, G_0)$ . 然后在  $k=0$  时刻, 求解在线优化问题 (19), 应用  $u(0|0)$ . 当  $k>0$  时, 采取如下步骤

步骤 1  $N>1$  时, 减小控制时域, 令  $N := N-1$ , 求解优化问题 (19), 应用  $u(k|k)$ .

步骤 2  $N=1$  时, 求解优化问题 (19), 应用  $u(k|k)$ . 重复步骤 2 直至系统稳定在平衡点为止.

注 3 该预测控制器综合考虑多包系统的所有顶点, 引入参数 Lyapunov 函数代替单一的 Lyapunov 函数, 离线设计 worst-case 情况下性能最优的椭圆, 对于标称系统未知情形也适用, 应用范围更为广泛. 在线实施时, 其终端约束集随系统状态进行优化, 并且在当前状态进入约束集  $\varepsilon(a_1 Q_{1,l} + a_2 Q_{0,l})$  以后采取控制时域  $N=1$ , 其控制输入始终存在一自由引导变量  $u(k|k)$ , 因此有效地改善了系统的控制性能.

注 4 LMI 可通过内点法有效地进行求解, 其计算量可表示为  $O(RS^3)^{[12]}$ , 其中  $R$  是 LMI 的行数,  $S$  是优化变量的数目. 算法 1 和算法 2 由于采用在线优化, 其变量数随系统维数的增加而急剧增大, 而算法 5 采用了离线设计在线优化, 其在线优化的变量数与系统维数无关, 因此算法 5 的在线计算量相比算法 1 和算法 2 显著降低; 相比算法 3, 算法 5 的在线计算量略有增加, 但由于采用了参数李雅普诺夫函数, 可以取得更优的控制性能.

## 4 稳定性分析

**定理 1** 对于受控系统 (1), 如果算法 5 在初始时刻有可行解, 则算法 5 所设计的鲁棒预测控制器可以镇定该系统渐近稳定.

证 设  $k$  时刻存在可行解  $a_1^*, a_2^*$  及  $b^*, \tilde{u}^*(k) = \{u^*(k|k), u^*(k+1|k), \dots, u^*(k+N-1|k)\}$ , 使得系统终端状态  $x(k+N|k) \subset \varepsilon(a_1^* Q_{1,l} + a_2^* Q_{0,l}), l=1, 2, \dots, L$ , 其性能指标值为  $\bar{J}^*(k)$ . 当  $k+1$  时刻, 控制量  $u^*(k|k)$  已经实施到系统上, 控制时域  $N := N-1$ , 则可以选取  $a_1^*, a_2^*$  以及  $b = b^* - x(k+1|k)^T \mathcal{L}x(k+1|k) - u^*(k|k)^T \mathcal{R}u^*(k|k)$ ,  $\tilde{u}(k+1) = \{u^*(k+1|k), \dots, u^*(k+N-1|k)\}$  作为一组解, 此时  $\tilde{u}(k+1)$  将驱动系统状态  $x(k+N|k+1) \subset \varepsilon(a_1^* Q_{1,l} + a_2^* Q_{0,l})$ . 即  $\{u^*(k+1|k), \dots, u^*(k+N-1|k)\}$ ,  $a_1^*$  及  $a_2^*$  仍满足  $k+1$  时刻的条件 (15) 和 (16), 同样这组控制量与  $b$  仍满足条件 (18), 此外条件 (14) 显然成立. 因此这组解是  $k+1$  时刻的可行解, 且  $\bar{J}^*(k)$  显然是递减的.

当控制时域递减为  $N=1$  时, 即由变时域控制切换为固定时域 ( $N=1$ ) 控制. 设  $k$  时刻控制时域已经递减为  $N=1$ ,  $u^*(k|k)$ ,  $a_1^*, a_2^*$  及  $b^*$  为  $k$  时刻的可行解, 则与其相对应的性能指标为

$$\bar{J}^*(k) = \|x^*(k|k)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u^*(k|k)\|_{\mathcal{R}}^2 + \|x^*(k+1|k)\|_{P^*(1,k)}^2,$$

其中,  $P^*(1,k) = \sum_{l=1}^L \lambda_l(k+1) P_l, P_l = \gamma Q_l^{-1}, Q_l = a_1^* Q_{1,l} + a_2^* Q_{0,l}, \gamma = (a_1^* \gamma_{INI} + a_2^* \gamma_0)$ .

因为  $[A(k), B(k)] = \sum_{l=1}^L \lambda_l [A_l, B_l], \sum_{l=1}^L \lambda_l(k) = 1$ , 则在  $k+1$  时刻

$$x(k+1|k+1) = \sum_{l=1}^L \lambda_l(k) x_l(k+1|k), \quad (20)$$

其中,  $x_l(k+1|k) = A_l x(k) + B_l u^*(k|k), l=1, 2, \dots, L$ .



我们进而可以构造  $u(k+1|k+1)$ ,  $a_1^*$ ,  $a_2^*$ ,  $b = \|\bar{u}_{\max}\|_{\mathcal{R}}^2$  作为  $k+1$  时刻的一组解. 其中

$$u(k+1|k+1) = F(k)x(k+1|k+1). \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\max} &= [u_{1,\max}, \dots, u_{m,\max}]^T, \quad F(k) = Y^*(G^*)^{-1}, \\ Y^* &= a_1^*Y_{INI} + a_2^*Y_0, \quad G^* = a_1^*G_{INI} + a_2^*G_0. \end{aligned}$$

因为  $x(k+1|k+1) \in \varepsilon(a_1^*Q_{1,l} + a_2^*Q_{0,l})$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ , 在状态反馈 (21) 下  $x(k+2|k+1) \subset \varepsilon(a_1^*Q_{1,l} + a_2^*Q_{0,l})$ , 即仍满足 (15) 和 (16), 此外条件 (14) 显然成立. 又因为控制时域  $N = 1$  时 (18) 式即可简化为  $\|u(k)\|_{\mathcal{R}}^2 \leq b$ , 结合 (2) 式可知  $b = \|\bar{u}_{\max}\|_{\mathcal{R}}^2$  一定能满足条件 (18). 因此  $a_1^*$ ,  $a_2^*$ ,  $b$  及  $u(k+1|k+1)$  是  $k+1$  时刻优化问题 (19) 的可行解, 其相对应的性能指标则为

$$\begin{aligned} \bar{J}(k+1) &= \|x(k+1|k+1)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u(k+1|k+1)\|_{\mathcal{R}}^2 + \|x(k+2|k+1)\|_{P^*(1,k+1)}^2 \\ &= \|x^*(k+1|k)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u^*(k+1|k)\|_{\mathcal{R}}^2 + \|x^*(k+2|k)\|_{P^*(2,k)}^2. \end{aligned}$$

由文献 [4] 知: 对于任何  $[A(k+i), B(k+i)] \in \Omega$ ,  $i \geq 0$ , 以固定的状态反馈  $F(k+i) = Y^*(G^*)^{-1}$ ,  $i \geq 0$ , 则满足

$$\|x^*(k+2|k)\|_{P^*(2,k)}^2 - \|x^*(k+1|k)\|_{P^*(1,k)}^2 + \|x^*(k+1|k)\|_{\mathcal{L}}^2 + \|u^*(k+1|k)\|_{\mathcal{R}}^2 \leq 0.$$

因此

$$\begin{aligned} \bar{J}(k+1) - \bar{J}^*(k) &\leq -\|x^*(k|k)\|_{\mathcal{L}}^2 - \|u^*(k|k)\|_{\mathcal{R}}^2 < 0, \\ \bar{J}^*(k+1) &\leq \bar{J}(k+1) < \bar{J}^*(k). \end{aligned}$$

Lyapunov 函数递减, 因此所设计的鲁棒预测控制器可以镇定系统 (1), 使闭环系统渐近稳定.

## 5 仿真实验

现在仿真验证控制算法的有效性, 仍采用文献 [9] 中的参考系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_p}{m_1} & \frac{k_p}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_p}{m_2} & -\frac{k_p}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

其中参数选取为  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $0.5 \leq k_p \leq 1.2$ , 输入约束为  $|u| \leq 1$ .  $\mathcal{L} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ ,  $\mathcal{R} = 0.1$ , 采样时间 0.1 秒, 初始状态  $x(0) = [0, 0, 1, 1]^T$ .

1) 性能指标上界同为 5000 时: 算法 5 与算法 3 所分别对应的初始可行域在  $x_1 - x_2$  平面的投影见图 1; 算法 5 与算法 3 所分别对应的初始可行域在  $x_3 - x_4$  平面的投影见图 2 (其中设计  $\varepsilon(Q_1)$  时名义系统取  $k_p = 1$ );

2) 选取  $k_p = 1 + 0.2e^{-0.5t} \cos(10t)$ ,  $c_1 = 3000$ ,  $N = 2$  对算法 5 仿真得到闭环状态轨迹图 3;

3) 我们选取一系列结构参数 ( $0.5 \leq k_p \leq 1.2$ ), 分别对算法 1、算法 2、算法 3 和算法 5 进行仿真, 得到的控制性能值见表 1 (标称系统取  $k_p = 1$ ;  $N = 2$ ).  $r_1 = 0.609$  是满足算法 3 可行的最小取值, 在此选取  $r_1 = 0.609$ ;  $c_1 = 2559$  是满足算法 5 可行的最小值, 在此选取  $c_1 = 3000$ .

表 1 采用不同结构参数  $k_p$  和不同算法时得到的性能指标值

结构参数 $k_p$	算法 1	算法 2	算法 3	算法 5
$1 + 0.2e^{-0.5t} \cos(10t)$	793	706	4851	245
1	793	706	4851	245
1.2	744	664	4624	200
0.5	1174	1042	6331	605

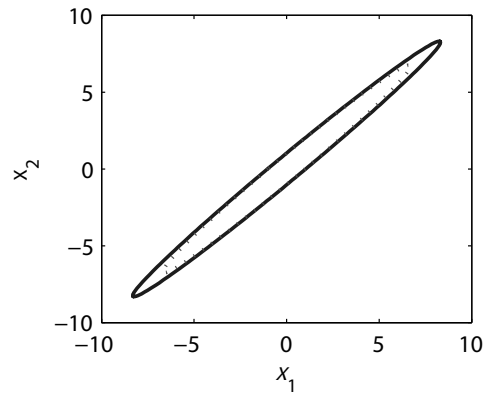


图 1  $x_1 - x_2$  平面算法 5 初始可行域的投影 (实线) 与算法 3 初始可行域的投影 (点线)

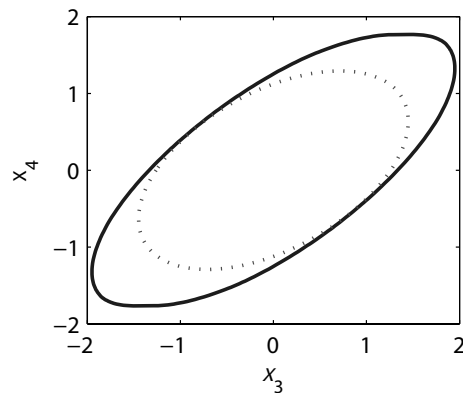


图 2  $x_3 - x_4$  平面算法 5 初始可行域的投影 (实线) 与算法 3 初始可行域的投影 (点线)

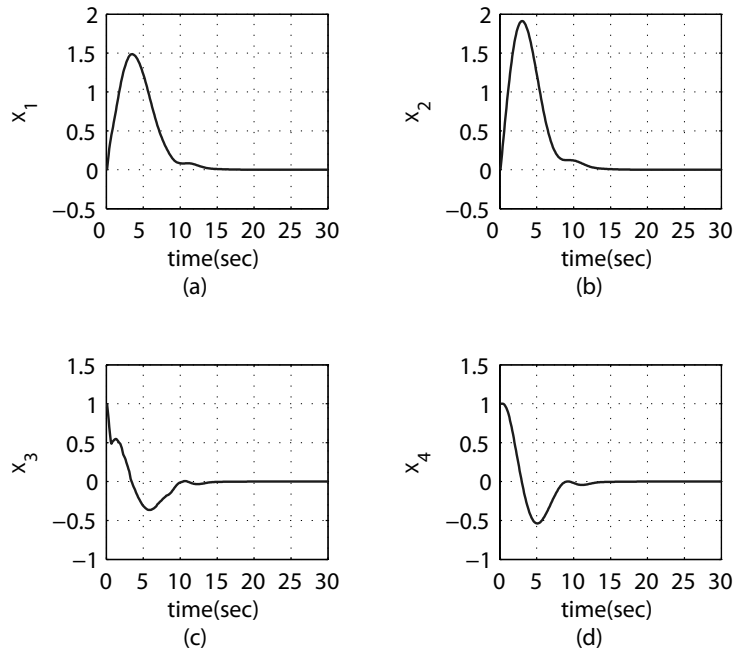


图 3 闭环状态轨迹图

图 1 和图 2 表明, 算法 5 与算法 3 相比较, 扩大了系统的初始可行域; 图 3 表明, 本文设计的控制器是一种稳定且有效的约束预测控制器. 由表 1 可知, 相比算法 1、算法 2 和算法 3, 算法 5 取得了更优的控制性能.

## 6 结 语

本文针对多包描述的不确定性系统, 基于参数 Lyapunov 函数, 给出一种鲁棒约束预测控制器的综合设计方法. 该设计方法减少了以往文献设计方法的保守性, 具有更大的适用范围, 且一般可以得到更优的控制作用. 仿真算例验证了本文设计方法的有效性.

## 参 考 文 献

- [1] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V and Sckaert P O M. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 2000, **36**(6): 789–814.
- [2] Kothare M V, Balakrishnan V and Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 1996, **32**(10): 1361–1379.
- [3] Cuzzola F C, Geromel J C and Morari M. An improved approach for constrained robust model predictive control. *Automatica*, 2002, **38**(7): 1183–1189.

- [4] Mao W J. Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on “ an improved approach for constrained robust model predictive control ”. *Automatica*, 2003, **39**(6): 1109–1112.
- [5] Ding B C, Xi Y G and Li S Y. A synthesis approach of on-line constrained robust model predictive control. *Automatica*, 2004, **40**(1): 163–167.
- [6] Wan Z Y and Kothare M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 2003, **39**(7): 837–846.
- [7] 丁宝苍, 邹涛, 李少远. 时变不确定系统的变时域离线鲁棒预测控制. 控制理论与应用, 2006, **23**(2): 240–244.
- [8] 丁宝苍, 杨鹏. 基于标称性能指标的离线鲁棒预测控制器综合. 自动化学报, 2006, **32**(2): 304–310.
- [9] Wan Z Y and Kothare M V. Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set. *Systems and Control Letters*, 2003, **48**(5): 375–383.
- [10] Pluymers B, Suykens J A and Moor B D. Min-max feedback MPC using a time-varying terminal constraint set and comments on “ Efficient robust constrained model predictive control with a time-varying terminal constraint set ”. *Systems and Control Letters*, 2005, **54**(12): 1143–1148.
- [11] Wan Z Y, Pluymers B, Kothare M V and Moor B D. Comments on : “ Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set” by Wan and Kothare. *Systems and Control Letters*. *Automatica*, 2006, **55**(7): 618–621.
- [12] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J and Chilali M. LMI Control Toolbox: For Use with MATLAB, Natick: The Mathworks, 1995.

## ROBUST MODEL PREDICTIVE CONTROLLER BASED ON PARAMETER-DEPENDENT LYAPUNOV FUNCTION

ZHENG Pengyuan    XI Yugeng    LI Dewei

(*Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240*)

**Abstract** An improved method of synthesizing constrained robust model predictive controller for systems with polytopic description is proposed. It off-line adopts parameter-dependent Lyapunov function reducing the conservativeness corresponding to unique Lyapunov function and constructs invariant sets guaranteeing the optimal performance cost for the worst-case, and on-line solves the min-max optimization problem with infinite horizon performance cost. Consequently, the initial feasible region could be enlarged and better performance is also achieved by adopting the time varying terminal constraint set. The effectiveness of the proposed approach is verified by simulation examples.

**Key words** Robust model predictive control, invariant set, time-varying terminal constraint set, linear matrix inequalities, parameter-dependent Lyapunov function.