系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(9) (2008, 9), 1134–1147

奇异协方差阵下有效前沿及有效组合的解析解*

蒋 春 福
(深圳大学数学与计算科学学院， 深圳 518060)

戴 永 隆
(中山大学数学与计算科学学院， 广州 510275)

摘要 利用广义逆矩阵研究了协方差阵奇异时的投资组合问题，突破了传统方法中要求协方差阵可逆的限制，得到了证券市场存在有效组合的充要条件，并给出了有效前沿和有效组合的解析解，成功地推广了经典 Markowitz 模型，同时还将有助于证券组合有效子集的深入研究.

关键词 奇异协方差阵，有效组合，有效前沿，解析解.

MR(2000) 主题分类号 62P05, 15A09

1 引 言

对于 Markowitz[1] 问题的研究，以往的文献大都假定协方差阵为正定，但是随着资产种类的增加和金融衍生产品的大量涌现，许多机构投资者必然会考虑包含衍生工具的投资组合问题，这时很可能出现多重共线性和相关性，从而出现协方差阵奇异的情况．因此，奇异协方差阵下的投资决策问题才是最为普遍的．但因为此时协方差阵不可逆，以前的传统方法不再适用，所以目前涉及这方面的文献不多.

Buser[2] 最先研究奇异协方差阵下的投资组合问题，通过技术性地构造出两个新的基金得到此时两基金定理仍然成立，不过后来 Ryan 和 Lefoll[3] 指出文献 [2] 中的两基金定理的证明过程存在错误，并做了纠正． Szegö[4] 曾猜想当协方差阵的秩小于 $n-1$ 时证券市场要么存在套利，要么存在有效子集．此外，还有 VöRöS[5] 研究了一些具有特殊协方差结构的投资组合问题， Korki 和 Turtle[6] 则是考虑了证券数量趋于无穷大时的极限问题，得到了证券组合有效前沿的收敛定理.

* 深圳大学科研启动基金 (200738), 国家自然科学基金 (10626021) 和广东省自然科学基金 (06300957) 资助项目.

收稿日期：2005-11-03, 收到修改稿日期：2007-08-14.

我国学者史树中和杨杰 [7−8] 通过引入“I 型无风险组合”和“II 型无风险组合”的概念，分析了组合前沿的特征，并指出协方差阵奇异时有可能存在有效子集，还给出了判定证券子集是否为有效子集的充要条件. 最近，姚海洋等 [9] 在无套利假设下分析了奇异协方差阵下证券组合有效前沿的特征，本文将指出他们的结论并不具有一般性. 苏咪咪和叶中行 [10] 则是利用主成分分析方法研究了协方差阵秩为 $n-1$ 的情形，但其证明过程也存在错误.

显见，对于奇异协方差阵下的投资组合问题，已有文献大都只是分析了有效前沿或组合前沿的特征，而对于有效前沿和有效组合的解析解问题，还没有得到完整地解决. 本文利用矩阵的广义逆方法研究了这一问题，突破了传统方法中要求协方差阵可逆这一限制，得到了组合前沿和前沿组合的解析表示，成功地推广了经典 Markowitz 模型.

设 n 种证券的收益率用随机向量 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)'$ 表示，其中 r_i 表示第 i 种证券的收益率， n 种证券的期望收益率向量为 $\mu=E(r)$, 协方差阵为 $V=\mathrm{Var}(r)$. 投资者在 n 种证券的投资比例分别记为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$. 称 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)'$ 为可行组合，若 $\omega'\mathbf{1}=1$, 这里 $\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)'$. 记 $r_\omega=r'\omega$ 为证券组合的收益率， $\mu_\omega=\mu'\omega$ 为证券组合的期望收益率， $\sigma_\omega^2=\omega'V\omega$ 为证券组合的风险. 满足 $V\omega=0$ 的证券组合 ω 称为零风险组合. 证券组合的全体记为 W, 零风险组合的全体记为 W_f, 即

$$W=\{\omega\in\mathbb{R}^n|\ \omega'\mathbf{1}=1\},\quad W_f=\{\omega\in\mathbb{R}^n|\ \omega'\mathbf{1}=1,\ V\omega=0\}.$$

Markowitz 的基本问题就是在给定收益 r_p 下使组合风险最小，或者等价地，在给定风险 σ_p 下使组合收益最大. 基本问题可描述为如下的 M-V 模型

$$\begin{cases}\text{Min} & \sigma_\omega^2=\omega'V\omega\\ \text{s.t.} & \omega'\mathbf{1}=1,\\ & \omega'\mu=r_p.\end{cases}\tag{1}$$

因为假定 $V\geq 0$ 为非负定矩阵，所以 M-V 模型 (1) 自然也包含存在无风险证券时的情形. 一般地，称 M-V 模型 (1) 的解为前沿组合，前沿组合在风险 - 收益 $(\sigma_\omega,\mu_\omega)$ 坐标平面上对应的点称为组合前沿，组合前沿在“收益大，风险小”半序下的极大元全体称为有效前沿，其相应的前沿组合称为有效组合 [7].

为求模型 (1) 的最优解，需构造 Lagrange 函数

$$L(\omega,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{2}\,\omega'V\omega+\lambda_1(\omega'\mathbf{1}-1)+\lambda_2(\omega'\mu-r_p),\tag{2}$$

其中 λ_1,λ_2 均为 Lagrange 乘子. 令 $\frac{\partial L}{\partial\omega}=0,\ \frac{\partial L}{\partial\lambda_1}=0,\ \frac{\partial L}{\partial\lambda_2}=0$, 可得矩阵方程

$$\begin{pmatrix}V & L'\\ L & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega\\ \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \ell\end{pmatrix}.\tag{3}$$

其中 $L=(\mathbf{1}\quad\mu)',\ \ell=(1,r_p)',\ \lambda=(\lambda_1,\lambda_2)'$.

显然，矩阵方程 (3) 中 ω 的解即为 M-V 模型 (1) 前沿组合的通解.

由于下文需要，这里介绍一些矩阵广义逆的预备知识. 一般地，设 A 为任一矩阵，则称一切满足 $AXA=A$ 的矩阵 X 为 A 的广义逆，记为 A^-. 若 X 满足下述四个条件

$$AXA=A,\quad XAX=X,\quad (AX)'=AX,\quad (XA)'=XA,$$

则称矩阵 X 为 A 的 Moore-Penrose 广义逆，记为 A^+.

对任一矩阵 A, 其广义逆 A^- 总是存在的，但一般不唯一，而 A^+ 却是唯一的， A^- 唯一当且仅当 A 为可逆方阵，此时 $A^- = A^{-1}$.

利用矩阵的广义逆,我们可以得到矩阵方程 $Ax = b$ 的通解,即若矩阵方程 $Ax = b$ 相容,则其通解可表示为 $x = A^-b$, 这里 A^- 为 A 的任意广义逆,或者也可表示为 $x = A^-b+(I-A^-A)z$, 这里 A^- 为任一固定的广义逆， z 为任意向量.

另外，还有一个结论本文也经常要用到，即若 $\mathscr{M}(B) \subset \mathscr{M}(A), \mathscr{M}(C) \subset \mathscr{M}(A')$, 则 $C'A^-B$ 与 A^- 的选取无关. 事实上，若 $\mathscr{M}(B) \subset \mathscr{M}(A), \mathscr{M}(C) \subset \mathscr{M}(A')$, 则存在矩阵 P 和 Q 使得 $B = AQ$, $C = A'P$, 从而不难得到 $C'A^-B = P'AQ$ 与 A^- 的选取无关.

记号说明：设 A 为一矩阵，记 A' 表示 A 的转置， $R(A)$ 表示矩阵 A 的秩， A^- 表示 A 的广义逆， A^+ 表示 A 的 Moore-Penrose 广义逆， $N_A = I - A^+A$, $P_A = A(A'A)^+A'$ 为 A 的正交投影阵， $\mathscr{M}(A)$ 表示由矩阵 A 的列向量生成的线性空间， $\mathscr{M}(A)^\perp$ 表示 $\mathscr{M}(A)$ 的正交补空间， $A^\perp$ 为满足 $A'A^\perp = 0$ 的且具有最大秩的矩阵.

2 一些引理

引理 2.1 设有矩阵 $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 $T \geq 0$, 矩阵 $L \in \mathbb{R}^{k\times n}$, 若 $\mathscr{M}(L') \subset \mathscr{M}(T)$, 则有

1) $TT^-L' = L'$, $LT^-T = L$.

2) $Q = LT^-L'$ 与 T^- 的选取无关，且 $\mathscr{M}(L) = \mathscr{M}(Q)$.

3) Q 的 Moore-Penrose 广义逆

$$Q^+ = L'^+TL^+ - L'^+TN_L(N_LTN_L)^+N_LTL^+.$$

证 1) 及 2) 的前半部分是显然的， 2) 的后半部分是因为 $Q = LT^-L'$ 与 T^- 的选取无关，特别地，可选取满秩的 T^-, 使得 $\mathscr{M}(L) \subset \mathscr{M}(Q)$, 而 $\mathscr{M}(Q) \subset \mathscr{M}(L)$ 是显然的，所以有 $\mathscr{M}(Q) = \mathscr{M}(L)$. 3) 事实上，由 1) 可知

$$N_LTN_L(N_LTN_L)^+N_LT = N_LT,$$

令

$$M = L'^+TL^+ - L'^+TN_L(N_LTN_L)^+N_LTL^+,$$

容易验证

$$QM = MQ = LL^+, \quad QMQ = Q, \quad MQM = M,$$

从而由 Moore-Penrose 广义逆的定义可知引理结论成立.

引理 2.2[11] 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ 为 n 维非零列向量，则有

1) 若 $c \in \mathscr{M}(A)$, 则

$$(A \pm cc')^+ = A^+ - \frac{A^+cc'A^+}{c'A^+c \pm 1}. \tag{4}$$

2) 若 $c \notin \mathscr{M}(A)$, 则

$$(A + cc')^+ = A^+ + \frac{(1 + c'A^+c)P^\perp cc'P^\perp}{(c'P^\perp c)^2} - \frac{A^+cc'P^\perp + P^\perp cc'A^+}{c'P^\perp c}. \tag{5}$$

其中 $P^\perp = I - AA^+$.

引理 2.3 设矩阵 $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 且 $V\geq 0$, 矩阵 $L\in\mathbb{R}^{k\times n}$, $T=V+L'L$, 则有

1) 若 $\mathscr{M}(L')\subset\mathscr{M}(V)$, 则

$$T^{+}=V^{+}-V^{+}L'(I+LV^{+}L')^{+}LV^{+};$$

2) 若 $\mathscr{M}(L')\cap\mathscr{M}(V)=\{0\}$, 且 $R(L)=k$, 则

$$VT^{+}V=V,\ \ VT^{+}L'=0,\ \ LT^{+}L'=I.$$

证 1) 记 $M=V^{+}-V^{+}L'(I+LV^{+}L')^{+}LV^{+}$, 显然 M 为对称阵. 计算可得

$$MT=TM=V^{+}V,\quad MTM=M,\quad TMT=T,$$

从而由 Moore-Penrose 广义逆的定义立得结论.

2) 若 $\mathscr{M}(L')\cap\mathscr{M}(V)=\{0\}$, 将 V 和 L' 的列向量扩张成 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基，设为 $D=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 不妨设 $\mathscr{M}(V)\subset\mathscr{M}(D_1)$, $\mathscr{M}(L')\subset\mathscr{M}(D_2)$, 这里 $D=(D_1,D_2)$, $D_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$, $D_2=(\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n)$. 因为 $V\geq 0$, 故存在矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $V=C'C$. 又 $\mathscr{M}(C')=\mathscr{M}(C'C)\subset\mathscr{M}(D_1)$, 即存在 $Z_1\in\mathbb{R}^{r\times n}$, $Z_2\in\mathbb{R}^{(n-r)\times k}$ 使得

$$C'=D_1Z_1=D\begin{pmatrix} Z_1\\ O\end{pmatrix},\quad L'=D_2Z_2=D\begin{pmatrix} O\\ Z_2\end{pmatrix}.$$

从而

$$T=C'C+L'L=D\begin{pmatrix} Z_1Z_1' & O\\ O & Z_2Z_2'\end{pmatrix}D',$$

计算可得

$$VT^{+}V=V,\quad VT^{+}L'=0,\quad LT^{+}L'=P_{Z_2'},\tag{6}$$

其中 $P_{Z_2'}=Z_2'(Z_2Z_2')^{+}Z_2$, 又因为 $R(L)=k$, 所以必有 $LT^{+}L'=P_{Z_2'}=I$. 引理证毕.

引理 2.4 [12] 对于 M-V 模型 (1), 存在前沿组合的充分必要条件是 $\ell\in\mathscr{M}(L)$, 且前沿组合及组合前沿的表达式分别为

$$\omega=T^{+}L'Q^{+}\ell+N_T\xi,\quad \sigma_\omega^2=\ell'(Q^{+}-Q^{+}Q)\ell=\ell'H\ell.\tag{7}$$

其中 $T=V+L'L,\ Q=LT^{+}L',\ H=L'^{+}VL^{+}-L'^{+}VN_L(N_LVN_L)^{+}N_LVL^{+},\ \ \ell=(1,r_p)'$.

引理 2.5 对于 M-V 模型 (1), 若 $\mathbf{1}\notin\mathscr{M}(V)$, 则下列命题等价

1) 存在实数 $\rho\in\mathbb{R}$ 使得 $\mu-\rho\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$;

2) 任给零风险组合 $\pi\in W_f$ 都有 $\mu-\mu_\pi\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$;

3) 零风险组合全体 W_f 可表示为

$$W_f=\left\{\pi\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ \pi=\frac{P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}+\left(P^{\perp}-\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'P^{\perp}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\right)\xi,\quad \xi\in\mathbb{R}^n\right\},\tag{8}$$

且任给零风险组合 $\pi\in W_f$ 都有

$$\mu_\pi=\begin{cases}\dfrac{\mu'P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}, & 若\ \mu\notin\mathscr{M}(V),\\ 0, & 若\ \mu\in\mathscr{M}(V).\end{cases}\tag{9}$$

其中 $P^{\perp}=I-VV^{+}=N_V$.

证 1)$\Longrightarrow$2) 若存在实数 ρ 使得 $\mu-\rho\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, 则对任意零风险组合 $\pi\in W_f$ 有 $(\mu-\rho\mathbf{1})'\pi=0$, 由 $\pi'\mathbf{1}=1$ 知 $\mu_\pi=\pi'\mu=\rho$, 所以 $\mu-\mu_\pi\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$.

2)$\Longrightarrow$3) 证明分三个部分.

i) W_f 非空且具有 (8) 的表达形式. 首先, W_f 非空, 即存在 $\omega\in\mathbb{R}^n$ 使得 $V\omega=0$, $\omega'\mathbf{1}=1$ 同时成立. 事实上, 若任给 $\omega\in\mathscr{M}(V)^{\perp}$ 均有 $\omega'\mathbf{1}=0$, 这蕴涵着 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, 与引理条件 $\mathbf{1}\notin\mathscr{M}(V)$ 相矛盾. 其次, 因为 $\mathbf{1}\notin\mathscr{M}(V)$, 所以零风险组合为如下矩阵方程的解

$$\begin{pmatrix} V & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi \\ \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

显然, 方程 (10) 类似于方程 (3), 只不过这里 $L=\mathbf{1}'$, $\ell=1$. 令 $T=V+\mathbf{1}\mathbf{1}'$, $Q=\mathbf{1}'T^{+}\mathbf{1}$. 由引理 2.2 及引理 2.3 知 $Q=1$,

$$T^{+}=V^{+}+\frac{(1+\mathbf{1}'V^{+}\mathbf{1})P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'P^{\perp}}{(\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1})^2}-\frac{V^{+}\mathbf{1}\mathbf{1}'P^{\perp}+P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'V^{+}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}. \tag{11}$$

其中 $P^{\perp}=I-VV^{+}=N_V$. 再由引理 2.4 不难得到

$$\pi=T^{+}\mathbf{1}+N_T\xi=\frac{P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}+\left(P^{\perp}-\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'P^{\perp}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\right)\xi. \tag{12}$$

其中 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 为任意 n 维列向量, 所以有 (8) 式成立.

ii) 若 $\mu\notin\mathscr{M}(V)$, 则 $\mu_\pi=\frac{\mu'P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}$. 显然,此时对任给零风险组合 $\pi\in W_f$ 都有 $\mu_\pi\neq 0$, 且 μ_π 为与 π 无关的常数,因为若存在 $\pi_1\in W_f$, $\pi_2\in W_f$ 使得 $\mu-\mu_{\pi_1}\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, $\mu-\mu_{\pi_2}\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, 但 $\mu_{\pi_1}\neq\mu_{\pi_2}$, 则易得 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, 从而导出矛盾, 因此 $\mu_\pi=c$ 为一常数. 将 μ 和 $\mathbf{1}$ 进行正交分解: $\mu=VV^{+}\mu+P^{\perp}\mu$, $\mathbf{1}=VV^{+}\mathbf{1}+P^{\perp}\mathbf{1}$. 又因为对任给 $\pi\in W_f$ 都有 $\mu-\mu_\pi\mathbf{1}=\mu-c\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, 所以必有 $P^{\perp}\mu=c\,P^{\perp}\mathbf{1}$, 从而易得 $\mu_\pi=\frac{\mu'P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}$.

iii) 若 $\mu\in\mathscr{M}(V)$, 则 $\mu_\pi=0$. 这是显然的, 而且还蕴涵在 ii) 的结论之中.

3)$\Longrightarrow$1) 只需在 (12) 式两边同乘 μ' 得

$$\mu_\pi=\frac{\mu'P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}+\left(\mu'-\frac{\mu'P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\ \mathbf{1}'\right)P^{\perp}\xi. \tag{13}$$

因为任给 $\pi\in W_f$ 都有 $\mu_\pi=\frac{\mu'P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}$, 由 (13) 知这等价于 $(\mu-\mu_\pi\mathbf{1})'P^{\perp}\xi=0$ 对任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 都成立, 从而必有 $\mu-\mu_\pi\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, 令 $\rho=\mu_\pi$ 可得 1) 成立. 引理证毕.

3 主要结果及其证明

定理 3.1 对于模型 (1), 若任给 $c\in\mathbb{R}$ 都有 $\mu\neq c\mathbf{1}$, 则在 $(\sigma_\omega,\mu_\omega)$ 平面上, 关于组合前沿的解析解有下列结论成立:

1) 若 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, $\mu\in\mathscr{M}(V)$, 则组合前沿为

$$\sigma_\omega^2=\frac{A}{D}\left(\mu_\omega-\frac{B}{A}\right)^2+\frac{1}{A},$$

其中 $A=\mathbf{1}'V^+\mathbf{1},\ B=\mathbf{1}'V^+\mu,\ C=\mu'V^+\mu,\ D=AC-B^2$.

2) 若 $\mathbf{1}\notin\mathscr{M}(V)$, 且存在 $\pi\in W_f$ 使得 $\mu-\mu_\pi\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, 则组合前沿为

$$\sigma_\omega^2=\frac{(\mu_\omega-\mu_\pi)^2}{H},$$

其中 $H=C-2B\mu_\pi+A\mu_\pi^2$, $\mu_\pi=\frac{\mu' P^\perp\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}$, $P^\perp=I-VV^+$.

3) 若 $\mathscr{M}(L')\cap\mathscr{M}(V)=\{0\}$, 则组合前沿为 $\sigma_\omega=0$.

4) 若 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, $\mu\notin\mathscr{M}(V)$, 则组合前沿为 $\sigma_\omega=\frac{1}{\sqrt{A}}$.

证　1)　若 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V),\ \mu\in\mathscr{M}(V)$. 由引理 2.1 知 $R(L'V^+L)=R(L')=2$, 从而

$$H=(L'V^+L)^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}'V^+\mathbf{1} & \mathbf{1}'V^+\mu\\ \mu'V^+\mathbf{1} & \mu'V^+\mu\end{pmatrix}^{-1},$$

因此，组合前沿为下面关于 σ_ω 和 $\mu_\omega=r_p$ 的函数所在的双曲线.

$$\sigma_\omega^2=\frac{Ar_p^2-2Br_p+C}{AC-B^2}=\frac{A}{\Delta}\left(\mu_\omega-\frac{B}{A}\right)^2+\frac{1}{A}. \tag{14}$$

有效前沿为双曲线的上半支，其中 $A=\mathbf{1}'V^+\mathbf{1},\ B=\mathbf{1}'V^+\mu,\ C=\mu'V^+\mu,\ \Delta=AC-B^2$.

2) 若 $\mathbf{1}\notin\mathscr{M}(V)$, 且存在 $\pi\in W_f$ 使得 $\eta\in\mathscr{M}(V)$, 其中 $\eta=\mu-\mu_\pi\mathbf{1}$.

首先由引理 2.5 知，任意零风险组合 $\pi\in W_f$ 的期望收益 μ_π 为 (9) 所示．注意到此时 M-V 模型 (1) 中的约束条件 $\mu'\omega=r_p$ 等价于 $\eta'\omega=r_p-\mu_\pi$, 因此，为求模型 (1) 的有效组合，只需在矩阵方程 (3) 中令 $L=(\mathbf{1}\quad\eta)'$ 以及 $\ell=(1,r_p-\mu_\pi)'$, 便可类似地由引理 2.4 得组合前沿为 $\sigma_\omega^2=\ell(Q^+-Q^+Q)\ell$.

令 $\Delta=V+\eta\eta'$, 则 $T=V+L'L=\Delta+\mathbf{1}\mathbf{1}'$, 因为 $\mathbf{1}\notin\mathscr{M}(\Delta)$, 而 $\eta\in\mathscr{M}(V)\subset\mathscr{M}(\Delta)$, 所以由引理 2.3 得

$$\mathbf{1}'\left(\Delta+\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)^+\mathbf{1}=1,\quad \eta'\left(\Delta+\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)^+\mathbf{1}=0. \tag{15}$$

又由引理 2.2 知

$$\left(\Delta+\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)^+=\Delta^++\frac{\left(1+\mathbf{1}'\Delta^+\mathbf{1}\right)P^\perp\mathbf{1}\mathbf{1}'P^\perp}{\left(\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}\right)^2}-\frac{\Delta^+\mathbf{1}\mathbf{1}'P^\perp+P^\perp\mathbf{1}\mathbf{1}'\Delta^+}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}, \tag{16}$$

$$\Delta^+=\left(V+\eta\eta'\right)^+=V^+-\frac{V^+\eta\eta'V^+}{1+\eta'V^+\eta}. \tag{17}$$

其中 $P^\perp=I-\Delta\Delta^+$. 注意到 $\eta\in\mathscr{M}(\Delta)$, 所以 $P^\perp\eta=0$. 从而由 (16) 和 (17) 知

$$\eta'\left(\Delta+\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)^+\eta=\frac{\eta'V^+\eta}{1+\eta'V^+\eta}\neq 1. \tag{18}$$

将 (15) 和 (18) 代入并计算可得

$$Q=LT^+L'=\begin{pmatrix}\mathbf{1}'\left(\Delta+\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)^+\mathbf{1} & \mathbf{1}'\left(\Delta+\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)^+\eta\\ \eta'\left(\Delta+\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)^+\mathbf{1} & \eta'\left(\Delta+\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)^+\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{1+h}\end{pmatrix}, \tag{19}$$

其中 $h=1/\eta'V^+\eta>0$. 由 (19) 可得组合前沿为

$$\sigma_\omega^2=\ell'(Q^+-Q^+Q)\ell=(1,\ r_p-\mu_\pi)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ r_p-\mu_\pi\end{pmatrix}=h\,(\mu_\omega-\mu_\pi)^2. \tag{20}$$

其中 μ_π 同 (9). 显然，此时组合前沿在 $(\sigma_\omega,\mu_\omega)$ 平面上为两条相交射线，交点为 $(0,\mu_\pi)$, 斜率分别为 $\pm\sqrt{h}$, 有效前沿为斜率大于零的部分. 特别地，若 $\mu_\pi=0$, 则交点为原点.

3) 若 $\mathscr{M}(L')\cap\mathscr{M}(V)=\{0\}$, 由引理 2.3 知 $Q=LT^+L'=I$, 从而由 (7) 有组合前沿为 $\sigma_\omega^2=0$, 即此时组合前沿在 $(\sigma_\omega,\mu_\omega)$ 平面内为 μ_ω 轴.

4) 若 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, $\mu\notin\mathscr{M}(V)$, 令 $\varDelta=V+\mathbf{1}\mathbf{1}'$, 则 $T=V+L'L=\varDelta+\mu\mu'$, 又因为 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)\subset\mathscr{M}(\varDelta)$, $\mu\notin\mathscr{M}(\varDelta)$, 所以由引理 2.4 得

$$\mu'\left(\varDelta+\mu\mu'\right)^+\mu=1,\quad \mathbf{1}'\left(\varDelta+\mu\mu'\right)^+\mu=0. \tag{21}$$

因为 $\mu\notin\mathscr{M}(\varDelta)$, $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, 从而由引理 2.2 知

$$\left(\varDelta+\mu\mu'\right)^+=\varDelta^+ + \frac{(1+\mu'\varDelta^+\mu)\,P^\perp\mu\mu'P^\perp}{(\mu'P^\perp\mu)^2}-\frac{\varDelta^+\mu\mu'P^\perp+P^\perp\mu\mu'\varDelta^+}{\mu'P^\perp\mu}, \tag{22}$$

$$\varDelta^+=\left(V+\mathbf{1}\mathbf{1}'\right)^+=V^+-\frac{V^+\mathbf{1}\mathbf{1}'V^+}{1+\mathbf{1}'V^+\mathbf{1}}. \tag{23}$$

其中 $P^\perp=I-\varDelta\varDelta^+$. 注意到 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(\varDelta)$, 所以 $P^\perp\mathbf{1}=0$. 从而由 (22) 和 (23) 有

$$\mathbf{1}'\left(\varDelta+\mu\mu'\right)^+\mathbf{1}=\frac{\mathbf{1}'V^+\mathbf{1}}{1+\mathbf{1}'V^+\mathbf{1}}\neq 1. \tag{24}$$

将 (21) 和 (24) 式代入并计算可得

$$Q=LT^+L'=\begin{pmatrix}\mathbf{1}'\left(\varDelta+\mu\mu'\right)^+\mathbf{1} & \mathbf{1}'\left(\varDelta+\mu\mu'\right)^+\mu\\ \mu'\left(\varDelta+\mu\mu'\right)^+\mathbf{1} & \mu'\left(\varDelta+\mu\mu'\right)^+\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{A}{1+A} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{25}$$

其中 $A=\mathbf{1}'V^+\mathbf{1}$. 由 (7) 知组合前沿为

$$\sigma_\omega^2=\ell'(Q^+-Q^+Q)\ell=(1,\ r_p)\begin{pmatrix}\dfrac{1}{A} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ r_p\end{pmatrix}=\frac{1}{A}. \tag{26}$$

因此，此时组合前沿在 $(\sigma_\omega,\mu_\omega)$ 平面内为平行 μ_ω 轴的直线. 定理证毕.

注 1　文献 [10] 通过正交矩阵 U 将协方差阵 V 对角化，即有 $U'VU=\varLambda$, 这里 $\varLambda=\mathrm{diag}(g_1,g_2,\cdots,g_{n-1},0)$, g_i 为 V 的非零特征值 $(i=1,2,\cdots,n-1)$, $g_n=0$ 为零特征值, $U=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, u_i 为 g_i 的特征向量. 再记 $a_i=u_i'\mu$, $b_i=u_i'\mathbf{1}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 通过变换 $\omega=Uv$, 他们得到了一些结果，但其证明过程存在下面两处错误:

1) 没有证明 $a_n\neq 0$, $b_n\neq 0$. 但事实上，我们发现 a_n 和 b_n 都有可能为零.

不难证明 $a_n=0$ 当且仅当 $\mu\in\mathscr{M}(V)$, 这是因为：一方面，若 $\mu\in\mathscr{M}(V)$, 则显然有 $a_n=0$；另一方面， $a_n=0$ 等价于 μ 与 u_n 正交，注意到 U 为正交阵，所以必存在实数

$k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 使得 $\mu = k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_{n-1}u_{n-1}$, 又因为 $\mathscr{M}(V) = \mathscr{M}(u_1, u_2, \cdots, u_{n-1})$, 所以 $\mu \in \mathscr{M}(V)$.

同理可证 $b_n = 0$ 当且仅当 $\mathbf{1} \in \mathscr{M}(V)$. 此外，文献 [10] 还蕴涵一个假设，那就是 $r_p b_n - a_n \equiv 0$ 不成立，亦即存在非零实数 ρ 使得 $\rho b_n - a_n = 0$. 同理这又等价于存在非零实数 ρ 使得 $\mu - \rho\mathbf{1} \in \mathscr{M}(V)$.

因此，文献 [10] 中得到的组合前沿仅为本文 (20) 所表示的组合前沿中 $\mu_\pi \neq 0$ 的一种情形，只不过他们选择的是 $(\sigma_\omega^2 - \mu_\omega)$ 平面. 有趣的是，此时还有 $\rho = \frac{a_n}{b_n} = \mu' \frac{P^\perp \mathbf{1}}{\mathbf{1}' P^\perp \mathbf{1}} = \mu_\pi$ 成立，这是因为 $P^\perp = I - VV^+ = U(I - \Lambda\Lambda^+)U' = u_n u_n'$ 的原故.

2) 没有证明 $Ab_n^2 - 2Ba_nb_n + Ca_n^2 \neq 0$. 以下记 $K = Ab_n^2 - 2Ba_nb_n + Ca_n^2$, 这里

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} g_i^{-1} a_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^{n-1} g_i^{-1} a_i b_i, \quad C = \sum_{i=1}^{n-1} g_i^{-1} b_i^2.$$

但事实上，即使 $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, K 也有可能为零，即当且仅当 $\frac{b_n}{a_n} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$ 时，$K = 0$. 特别地，若存在常数 $c \in R$ 使得 $\mu = c\mathbf{1}$, 则 $K = 0$.

定理 3.2　对于 M-V 模型 (1), 若存在常数 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $\mu = c\mathbf{1}$, 则组合前沿和有效前沿均为单点集.

证　1) 若 $\mathbf{1} \notin \mathscr{M}(V)$, 这等价于 $\mathscr{M}(L') \cap \mathscr{M}(V) = \{0\}$, 类似 (6) 式的证明可得 $Q = LT^+L'$ 为正交投影阵，从而有 $Q^+ = Q$, 所以由 (7) 得组合风险 $\sigma_\omega^2 = 0$, 因此，组合前沿与有效前沿均为单点集 $P(0, c)$.

2) 若 $\mathbf{1} \in \mathscr{M}(V)$, 这等价于 $\mathscr{M}(L') \subset \mathscr{M}(V)$, 此时仍有 $H = (L'V^+L)^+$, 且 $R(L'V^+L) = R(L') = 1$, 计算得

$$H = \begin{pmatrix} \mathbf{1}'V^+\mathbf{1} & \mathbf{1}'V^+\mu \\ \mu'V^+\mathbf{1} & \mu'V^+\mu \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{A}\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & c^2 \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{A(1+c^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & c \\ c & c^2 \end{pmatrix},$$

其中 $A = \mathbf{1}'V^+\mathbf{1}$. 注意到此时存在前沿组合当且仅当 $r_p = c$, 因此组合风险为

$$\sigma_\omega^2 = \frac{(1 + cr_p)^2}{A(1+c^2)^2} = \frac{1}{A}. \tag{27}$$

即组合前沿和有效前沿均为单点集 $P(\frac{1}{\sqrt{A}}, c)$. 定理证毕.

推论 3.1 对于 M-V 模型 (1), 存在有效组合当且仅当下面三个条件之一成立：

1) $\mathbf{1} \in \mathscr{M}(V)$, $\mu \in \mathscr{M}(V)$;

2) $\mathbf{1} \notin \mathscr{M}(V)$, 且任给 $\pi \in W_f$ 都有 $\eta \in \mathscr{M}(V)$, 其中 $\eta = \mu - \mu_\pi\mathbf{1}$, μ_π 同 (9);

3) 存在常数 $c \in R$ 使得 $\mu = c\mathbf{1}$.

证　充分性　由定理 3.1 的 1), 2) 以及定理 3.2 知存在有效组合，充分性得证.

必要性　用反证法，先考虑条件

2)′ $\mathbf{1} \notin \mathscr{M}(V)$, 且存在 $\rho \in R$ 使得 $\mu - \rho\mathbf{1} \in \mathscr{M}(V)$.

由引理 2.5 知条件 2) 与条件 2)′ 是等价的，因此，只需证明 1), 2)′ 或 3) 为必要条件. 注意到在条件 2)′ 下仅有以下两种情形：

a) $\mathbf{1} \notin \mathscr{M}(V)$, $\mu \notin \mathscr{M}(V)$, 且存在非零常数 $\rho \in R$ 使得 $\mu - \rho\mathbf{1} \in \mathscr{M}(V)$.

b) $\mathbf{1} \notin \mathscr{M}(V)$, $\mu \in \mathscr{M}(V)$, $\rho = 0$.

因此，若条件 1), 2)$'$ 和 3) 都不成立，则仅有以下两种情况

i) $\mathscr{M}(L') \cap \mathscr{M}(V) = \{0\}$, ii) $\mathbf{1} \in \mathscr{M}(V)$, $\mu \notin \mathscr{M}(V)$.

所以，只需证明在上述两种情况下有效前沿为空集即可，由定理 3.1 和定理 3.2 知，若条件 1)–3) 都不成立，则组合前沿在 $(\sigma_\omega, \mu_\omega)$ 平面内为垂直 σ_ω 轴的直线．就是说，相同风险的证券组合，收益率却可以为任意实数，因此此时不存在有效组合．证毕．

推论 3.2 对于包含 n 种证券（风险证券或无风险证券）的证券市场，不存在套利组合的充分必要条件是下面三个之一成立：

1) $\mathbf{1} \in \mathscr{M}(V)$, $\mu \in \mathscr{M}(V)$.

2) $\mathbf{1} \notin \mathscr{M}(V)$, 且任给 $\pi \in W_f$ 有 $\eta \in \mathscr{M}(V)$, 其中 $\eta = \mu - \mu_\pi \mathbf{1}$, μ_π 同 (9).

3) 存在常数 $c \in R$ 使得 $\mu = c\mathbf{1}$.

证 可由定理 3.1 和定理 3.2 直接得到．推论 3.2 证明了 Szegö 的猜想是正确的．

注 2 文献 [9] 曾在无套利假设下得到了奇异协方差阵下证券组合的有效前沿要么为 F_1, 要么为 F_2, 这里 F_1 为极大线性无关风险证券的有效前沿， F_2 为极大线性无关风险证券与无风险证券的有效前沿，即 F_1 和 F_2 在 $(\sigma_\omega, \mu_\omega)$ 平面内分别为双曲线上半支和一条射线．这里需要指出的是，他们的证明需要市场存在无风险证券．也就是说，如果市场不存在无风险证券，那么有效前沿有可能为 F_1, 但无法得到 F_2.

从本文结论来看，有效前沿为一条射线的充分必要条件是存在零风险组合，且市场无套利，而不必存在无风险证券．存在无风险证券的情形仅是本文的一个特例．

事实上，因为这时可将无风险证券看成是一种特殊的风险证券，考虑 $n+1$ 种证券的投资组合问题，其中最后一种证券为无风险证券 r_f. 为简便起见，此时零风险组合全体仍记为 W_f, 其它相关矩阵或向量分别为

$$\widetilde{V} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ r_f \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}^\perp = \begin{pmatrix} P^\perp & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然 $\mathbf{1} \notin \mathscr{M}(\widetilde{V})$, 因此，由推论 3.2 知，若市场无套利，则仅有下面两种情形

1) 若任给常数 $c \in R$ 都有 $\widetilde{\mu} \neq c\mathbf{1}$. 此时任给零风险组合 $\pi \in W_f$, 必有 $\widetilde{\eta} \in \mathscr{M}(\widetilde{V})$, 这里 $\widetilde{\eta} = \widetilde{\mu} - \mathbf{1}\mu_\pi$. 注意到 $\pi_0 = (0, 0, \cdots, 0, 1)'$ 为一零风险组合，所以 $\widetilde{\eta}_0 = \widetilde{\mu} - \mathbf{1}\mu_{\pi_0} \in \mathscr{M}(\widetilde{V})$, 从而 $\widetilde{P}^\perp \widetilde{\eta}_0 = 0$. 再由引理 2.5 知，任给零风险组合 $\pi \in W_f$, 有

$$\mu_\pi = \frac{\widetilde{\mu}' \widetilde{P}^\perp \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \widetilde{P}^\perp \mathbf{1}} = \frac{\widetilde{\eta}_0' \widetilde{P}^\perp \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \widetilde{P}^\perp \mathbf{1}} + \mu_{\pi_0} = \mu_{\pi_0} = r_f.$$

2) 若存在常数 $c \in R$ 使得 $\widetilde{\mu} = c\mathbf{1}$. 显然此时也有同样的结论．

因此，若市场存在一种无风险证券 r_f, 那么在无套利假设下，所有无风险组合的收益率都是一样的，且等于无风险证券的收益率 r_f. 此时将 (20) 中的 μ_π 换成 r_f 即得文献 [9] 的结论，因此，我们的结论要一般得多．

定理 3.1 和定理 3.2 推广了经典 Markowitz 投资组合模型，从证明过程可知，协方差阵奇异时组合前沿共有六种情形，定理也给出各种情形下的组合前沿的具体解析表示，当然，我们也可以得到各种情形下有效组合的解析解．注意到一般情况下对任给 $c \in R$, $\mu \neq c\mathbf{1}$. 由定理 3.1 知此时只有在前两种情形下才存在有效组合，因此下面仅给出定理 3.1 的前两种情形

下有效组合的解析表示，定理 3.1 的后两种情形及定理 3.2 中的两种特殊情形可类似得之，本文就不再赘述了.

定理 3.3 对于 M-V 模型 (1), 若任给 $c\in R$ 都有 $\mu\neq c\mathbf{1}$, 则关于有效组合的通解有如下结论

1) 若 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V),\ \mu\in\mathscr{M}(V)$, 则有效组合的通解为

$$\omega=\lambda_1V^+\mu+\lambda_2V^+\mathbf{1}+P^\perp\xi, \tag{28}$$

这里 $\xi\in R^n$ 为任意 n 维列向量,

$$\lambda_1=\frac{Ar_p-B}{\varDelta},\quad \lambda_2=\frac{C-Br_p}{\varDelta}. \tag{29}$$

其中 $A=\mathbf{1}'V^+\mathbf{1},\ B=\mathbf{1}'V^+\mu,\ C=\mu'V^+\mu,\ \varDelta=AC-B^2,\ P^\perp=I-VV^+=N_V,\ r_p\geq\frac{B}{A}$.

2) 若 $\mathbf{1}\notin\mathscr{M}(V)$, 且任给 $\pi\in W_f$ 都有 $\eta\in\mathscr{M}(V)$, 则有效组合的通解为

$$\omega=\vartheta+(1-\vartheta'\mathbf{1})\,\pi, \tag{30}$$

这里 ϑ 为风险证券的投资比例，而 $1-\mathbf{1}'\vartheta$ 为零风险组合 $\pi\in W_f$ 的投资比例，且

$$\vartheta=\frac{r_p-\mu_\pi}{\eta'V^+\eta}\ V^+\eta+P^\perp\xi_1,\quad \pi=\frac{P^\perp\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}+\Big(P^\perp-\frac{P^\perp\mathbf{1}\mathbf{1}'P^\perp}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}\Big)\xi_2. \tag{31}$$

其中 $\eta=\mu-\mu_\pi\mathbf{1},\ \mu_\pi=\mu'\frac{P^\perp\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}},\ P^\perp=I-VV^+,\ r_p\geq\mu_\pi,\ \xi_1\in R^n,\ \xi_2\in R^n$ 均为任意 n 维列向量.

证　1) 因为 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V),\ \mu\in\mathscr{M}(V)$, 即 $\mathscr{M}(L')\subset\mathscr{M}(V)$, 所以由引理 2.3 知

$$T^+=V^+-V^+L'(I+LV^+L')^+LV^+.$$

计算可得

$$Q=LT^+L'=LV^+L'(I+LV^+L')^+,\quad N_T=I-T^+T=I-V^+V=N_V.$$

由定理 3.1 知此时有效前沿为双曲线的上半支，因此有效组合只需在前沿组合的通解中取 $r_p\geq\frac{B}{A}$ 即可. 由引理 2.4 得有效组合的通解为

$$\omega=T^+L'Q^+\ell+N_T\xi=V^+L'(LV^+L')^+\ell+N_V\xi, \tag{32}$$

这里 $\xi\in R^n$ 为任意 n 维列向量. 注意到此时 LV^+L' 为可逆矩阵，且

$$(LV^+L')^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}'V^+\mathbf{1} & \mathbf{1}'V^+\mu\\ \mu'V^+\mathbf{1} & \mu'V^+\mu\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix}C & -B\\ -B & A\end{pmatrix}, \tag{33}$$

其中 $A=\mathbf{1}'V^+\mathbf{1},\ B=\mathbf{1}'V^+\mu,\ C=\mu'V^+\mu,\ \varDelta=AC-B^2$. 将 (33) 代入 (32) 可立得 1).

2) 类似定理 3.1 充分性 2) 部分的证明，需令

$$L=(\mathbf{1}\ \ \eta)',\quad T=V+L'L=\varDelta+\mathbf{1}\mathbf{1}',\quad \varDelta=V+\eta\eta',\quad Q=LT^+L'.$$

由引理 2.4 及 (19) 式知有效组合的通解为

$$
\begin{aligned}
\omega &= (T^{+}\mathbf{1},\ T^{+}\eta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ r_p-\mu_\pi \end{pmatrix} + N_T\xi \\
&= T^{+}\mathbf{1} + \frac{(r_p-\mu_\pi)(1+\eta' V^{+}\eta)}{\eta' V^{+}\eta}\ T^{+}\eta + N_T\xi. \qquad (34)
\end{aligned}
$$

其中 $\xi\in R^n$ 为任意 n 维列向量, $r_p\ge\mu_\pi=\mu'\frac{P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}$. 再由 (16), (17) 计算可得

$$
\begin{aligned}
T^{+}\mathbf{1} &= \frac{P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}, \\
T^{+}\eta &= \Delta^{+}\eta + \frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'\Delta^{+}\eta}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}} = \Big(I-\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\Big)\frac{V^{+}\eta}{1+\eta' V^{+}\eta}, \\
N_T &= P^{\perp} - \frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'P^{\perp}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}},
\end{aligned}
$$

又因 $\eta\in\mathscr{M}(V)$, 所以 $\mathscr{M}(V)=\mathscr{M}(\Delta)$, 从而必有 $P^{\perp}=I-\Delta\Delta^{+}=I-VV^{+}$.

因此，由 (34) 得有效组合的通解为

$$
\omega = \frac{P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}} + \Big[(r_p-\mu_\pi)\ \Big(I-\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\Big)\frac{V^{+}\eta}{\eta' V^{+}\eta}\Big] + \Big(P^{\perp}-\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'P^{\perp}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\Big)\xi. \qquad (35)
$$

因此，以下只需证明 (34) 式与 (30) 式所表示的通解是等价的即可. 为叙述方便起见，不妨将形如 (30) 所示的有效组合全体记为 W_1, 形如 (35) 式所示的有效组合全体记为 W_2, 下面证明 $W_1=W_2$.

任取 $\omega^*\in W_1$, 设 $\xi_1^*\in R^n$, $\xi_2^*\in R^n$ 为使得 $\omega^*=\vartheta+(1-\vartheta'\mathbf{1})\pi$ 的向量，其中

$$
\vartheta = \frac{r_p-\mu_\pi}{\eta' V^{+}\eta}\ V^{+}\eta + P^{\perp}\xi_1^*, \quad \pi = \frac{P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}} + \Big(P^{\perp}-\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'P^{\perp}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\Big)\xi_2^*.
$$

计算得

$$
\begin{aligned}
\omega^* &= \frac{r_p-\mu_\pi}{\eta' V^{+}\eta}\ V^{+}\eta + P^{\perp}\xi_1^* + \frac{P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}} + \Big(P^{\perp}-\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'P^{\perp}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\Big)\xi_2^* \\
&\quad -\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\Big(\frac{r_p-\mu_\pi}{\eta' V^{+}\eta}\ V^{+}\eta + P^{\perp}\xi_1^*\Big) - \mathbf{1}'\vartheta\Big(P^{\perp}-\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'P^{\perp}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\Big)\xi_2^* \\
&= \frac{P^{\perp}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}} + \Big[(r_p-\mu_\pi)\ \Big(I-\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\Big)\frac{V^{+}\eta}{\eta' V^{+}\eta}\Big] \\
&\quad +\Big(P^{\perp}-\frac{P^{\perp}\mathbf{1}\mathbf{1}'P^{\perp}}{\mathbf{1}'P^{\perp}\mathbf{1}}\Big)\Big(\xi_1^*+(1-\mathbf{1}'\vartheta)\,\xi_2^*\Big). \qquad (36)
\end{aligned}
$$

比较 (35) 与 (36) 并注意到 ξ 的任意性，不难得到 $W_1\subset W_2$. 类似地，也可以证明 $W_2\subset W_1$, 从而 $W_1=W_2$. 定理证毕.

注 3　事实上，定理 3.3 中的 2) 部分还有另一种证明方法，即将零风险组合 π 看成是一种无风险证券，其上的投资比例为 ω_{n+1}, 则有如下 M-V 模型

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } \sigma_\omega^2 = \omega' V\omega \\
&\text{s.t.}\ \ \eta'\omega = r_p-\mu_\pi.
\end{aligned}
$$

其中 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)'$, $\omega_{n+1}=1-\mathbf{1}'\omega$, $\eta=\mu-\mathbf{1}\mu_\pi$ 为超额收益率向量.

类似于 M-V 模型 (1), 可得上述模型的最优解为矩阵方程

$$\begin{pmatrix} V & \eta \\ \eta' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ r_p-\mu_\pi \end{pmatrix}$$

的解，其中 $\eta=\mu-\mathbf{1}\mu_\pi$. 这样也可得到风险证券上的投资比例为 ϑ, 零风险组合 π 上的投资比例为 $1-\vartheta'\mathbf{1}$.

注 4　当 $V>0$ 时，不难验证 (28) 式为经典 Markowitz 模型下 n 种风险证券投资组合问题的最优解. 进一步，若还考虑一种无风险证券 r_f, 则 (30) 式也是适用的. 事实上，此时可将无风险证券看成是一种特殊的风险证券，其上的投资比例记为 ω_{n+1}, 并记 $\widetilde{\omega}=(\omega',\omega_{n+1})'$. 考虑这 $n+1$ 种风险证券的投资组合问题，收益率向量变为 $\widetilde{\mu}=(\mu',r_f)'$, 而零风险组合只存在一个，即 $W_f=\{\pi=(0,0,\cdots,0,1)'\}$, $\mu_\pi=r_f$, 当然它们也可以分别从 (31) 和 (9) 中得到，从而 $\widetilde{\eta}=(\eta',0)$, 这里 $\eta=\mu-r_f\mathbf{1}$. 协方差阵 $\widetilde{V}$ 及 $\widetilde{P}^\perp=I-\widetilde{V}\widetilde{V}^+$ 分别为

$$\widetilde{V}=\begin{pmatrix} V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},\quad \widetilde{P}^\perp=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

计算可得有效组合为

$$\widetilde{\omega}=\begin{pmatrix} \omega^* \\ 1-\mathbf{1}'\omega^* \end{pmatrix},\quad \omega^*=\frac{r_p-r_f}{\eta'V^{-1}\eta}V^{-1}\eta,$$

其中 ω^* 为前 n 种风险证券的投资比例，$1-\mathbf{1}'\omega^*$ 为无风险证券 r_f 的投资比例，这正是经典 Markowitz 模型的结论，因此，定理 3.3 是经典 Markowitz 模型的进一步推广.

理论上，如果不假定 V 为正定，那么将无风险证券和风险证券分开讨论是没有必要的，因为无风险证券 r_f 可以看成是一种特殊的风险证券，只不过其方差为零. 注 2 、注 3 以及注 4 分别从几个不同方面充分证实了这一点，也丰富了这方面的内容.

推论 3.3 若任给 $c\in R$ 都有 $\mu\neq c\mathbf{1}$, 则关于有效组合有如下的两基金分离定理

1) 若 $\mathbf{1}\in\mathscr{M}(V)$, $\mu\in\mathscr{M}(V)$, 则有效组合

$$\omega=\lambda\,\omega_d+(1-\lambda)\,\omega_g,$$

这里

$$\omega_d=\frac{V^+\mu}{\mathbf{1}'V^+\mu}+P^\perp\xi,\quad \omega_g=\frac{V^+\mathbf{1}}{\mathbf{1}'V^+\mathbf{1}}+P^\perp\xi,\quad \lambda=\frac{Ar_p-B}{\varDelta}\,B.$$

其中 $A=\mathbf{1}'V^+\mathbf{1}$, $B=\mathbf{1}'V^+\mu$, $C=\mu'V^+\mu$, $\varDelta=AC-B^2$, $\xi\in R^n$ 为任意 n 维列向量,

2) 若 $\mathbf{1}\notin\mathscr{M}(V)$, 且任给 $\pi\in W_f$ 都有 $\eta\in\mathscr{M}(V)$, 则有效组合

$$\omega=\lambda\,\varpi+(1-\lambda)\,\pi,$$

这里

$$\varpi=\frac{V^+\eta}{\mathbf{1}'V^+\eta}+\left(P^\perp-\frac{P^\perp\mathbf{1}\mathbf{1}'P^\perp}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}\right)\xi,\quad \pi=\frac{P^\perp\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}+\left(P^\perp-\frac{P^\perp\mathbf{1}\mathbf{1}'P^\perp}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}\right)\xi,$$

$$\lambda=\frac{\mathbf{1}'V^+\eta}{\eta'V^+\eta}\,(r_p-\mu_\pi)\,.$$

其中 $\eta=\mu-\mu_\pi\mathbf{1}$, $\mu_\pi=\mu'\frac{P^\perp\mathbf{1}}{\mathbf{1}'P^\perp\mathbf{1}}$, $P^\perp=I-VV^+$, $\xi\in R^n$ 为任意 n 维列向量.

证 1) 可由 (28) 式得到, 2) 可由 (35) 式得到.

有趣的是，推论 3.3 中两种情形下的基金分离定理还有共同之处，即第一种情形下的 ω_g 和第二种情形下的 π 均为顶点组合，且

$$\mathrm{Cov}(\omega_d'r,\omega_g'r)=\mathrm{Var}(\omega_g'r)=\frac{1}{A},\quad \mathrm{Cov}(\varpi'r,\pi'r)=\mathrm{Var}(\pi'r)=0.$$

这与经典 Markowitz 模型所得到的基金分离定理也是一致的. 事实上，不难发现，许多经典 Markowitz 模型下的结论都可以从本文各定理中得到有效地推广.

4 结 语

本文利用广义逆矩阵弥补了传统方法中要求协方差阵可逆的缺陷，在没有对协方差阵的结构和秩作任何限制的条件下给出了有效前沿和有效组合的解析解. 同时我们也发现，在协方差奇异下得到的许多结论都与经典 Markowitz 模型的结论相似，而且后者实质是前者的一种特殊情况，因此，本文将有助于进一步构建证券组合选择的统一理论.

分析有效组合和有效前沿的解析解不难发现，在有效组合的通解中含有 $\xi\in R^n$（或 $\xi_i\in R^n$, $i=1,2$）的项对有效前沿没有作任何贡献，因此，虽然在奇异协方差下有效组合的解不唯一，但有效前沿的一些性质与有效组合的解的唯一性无关. 事实上，如果与文献 [7–8] 中所提出的未来价格和当前价格的思想联系起来，也不难发现含有 $\xi\in R^n$ 的项既不是 "I 型组合 ", 也不是 "II 型组合 ", 而是一种当前价格为零，未来价格也为零的 "零组合 "(即各证券的投资比例权重和为零，比如 (28) 式中的 $P^\perp\xi$, 对任意 $\xi\in R^n$ 都有 $\mathbf{1}'P^\perp\xi=0$), 从而不可能对有效前沿有贡献.

尽管如此，有效组合中含有 $\xi\in R^n$(或 $\xi_i\in R^n$, $i=1,2$) 的项对有效子集的研究是有启发意义的，因为根据文献 [8] 对有效子集合的定义，证券子集 $S_k=\{1,2,\cdots,k\}$ 为证券全集 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 的有效子集等价于对任给投资目标 $r_p\geq\mu_g$, 都至少存在一个 $\xi\in R^n$, 使得有效组合 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k,0,0,\cdots,0)'$, $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_k=1$, 这里 μ_g 为最小风险组合的期望收益率. 也就是说，如果证券子集 S_k 为证券全集 S_n 的有效子集，那么对任意投资目标 r_p(从而对任意理性投资者), 总可以通过含有 $\xi\in R^n$ 的项来适当调整前 k 种证券的投资比例，而使得后 $n-k$ 种证券的投资比例为零，因此，后 $n-k$ 种证券就成了冗余证券.

最后，需要指出的是，在本文初稿完成之后，我们也找到了本文中各定理条件和结论的一些经济解释，并且也找到了证券子集为有效子集的一些新的充要条件，限于篇幅，我们将另文讨论.

参 考 文 献

[1] Markowitz H. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 1952, **7**(1): 77–91.
[2] Buser S A. Mean-variance portfolio selection with either a singular or nonsingular variance-covariance matrix. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1977, **12**(3): 347–361.

[3] Ryan P J and Lefoll J. A comment on mean-variance portfolio selection with either a singular or nonsingular variance-covariance matrix. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1981, **16**(3): 389–395.
[4] Szegö G P. Portfolio Theory: With Application to Bank Asset Management. New York: Academic Press, 1980.
[5] VöRöS J. The explicit derivation of the efficient portfolio frontier in the case of degeneracy and general singularity. *European Journal of Operational Reasearch*, 1987, **32**(2): 302–310.
[6] Korki B and Turtle H J. A note on the analytics and geometry of limiting mean-variance investment opportunity sets. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 1997, **9**(3): 289–300.
[7] 杨杰，史树中．证券组合前沿分类及有效子集．经济数学， 2001, **18**(1): 8–18.
[8] 史树中，杨杰．证券组合选择的有效子集．应用数学学报， 2002, **25**(1): 176–186.
[9] 姚海祥，易建新，李仲飞．奇异方差 - 协方差矩阵的 n 种风险资产有效边界的特征．数量经济技术经济研究，2005, **22**(1): 107–113.
[10] 苏咪咪，叶中行．协方差矩阵奇异情况下的最优投资组合．应用概率统计， 2005, **21**(3): 244–248.
[11] Dunne T T and Stone M. Downdating the moore-penrose generalized inverse for cross-validation of centred least squares prediction. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 1993, **55**(2): 369–375.
[12] 蒋春福，戴永隆．奇异协方差阵下前沿组合及无套利分析．中山大学学报 (自然科学版), 2005, **44**(5): 14–17.

ANALYTIC SOLUTIONS OF EFFICIENT FRONTIER AND EFFICIENT PORTFOLIO WITH SINGULAR COVARIANCE MATRIX

JIANG Chunfu

(*College of Mathematics Computational Science, Shen Zhen University, Shenzhen* 518060)

DAI Yonglong

(*School of Mathematics & Computational Science, Sun Yat-Sen University, Guangzhou* 510275)

Abstract This paper is concerned with the portfolio selection model with singular covariance matrix by using the generalized inverse matrix. The sufficient and necessary condition for existing efficient portfolio is obtained, and also the analytic solutions of efficient portfolio and efficient frontier is derived, which generalize successfully the classic Markowitz model and are helpful to investigate portfolio efficient subset further.

Key words Singular covariance matrix, efficient portfolio, efficient frontier, analytic solutions.