系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(5) (2008, 5), 554–575

具有边界控制的线性 Timoshenko 型系统的指数稳定性*

杜 燕 许跟起

(天津大学数学系, 天津 300072)

摘要 研究多孔弹性材料在实际应用中的稳定性问题. 多孔物体的动力学行为由线性 Timoshenko 型方程描述, 这样的系统一般只是渐近稳定但不指数稳定. 假定系统在一端简单支撑, 另一端自由, 在自由端对系统施加边界反馈控制, 讨论闭环系统的适定性和指数稳定性. 首先, 证明了由闭环系统决定的算子 $\mathcal{A}$ 是预解紧的耗散算子、生成 C_0 压缩半群, 从而得到了系统的适定性. 进一步通过对系统算子 $\mathcal{A}$ 的本征值的渐近值估计, 得到算子谱分布在一个带域, 相互分离的, 模充分大的本征值都是 $\mathcal{A}$ 的简单本征值. 通过引入一个辅助算子 $\mathcal{A}_0$, 利用算子 $\mathcal{A}_0$ 的谱性质以及算子 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}_0$ 之间的关系, 得到了 $\mathcal{A}$ 的广义本征向量的完整性以及 Riesz 基性质. 最后利用 Riesz 基性质和谱分布得到闭环系统的指数稳定性.

关键词 线性 Timoshenko 型系统, 边界反馈控制, Riesz 基, 指数稳定性.

MR(2000) 主题分类号 93C20, 93D15, 47B40, 35C20

1 引 言

众所周知, 能源、信息和材料是当代技术文明的三大支柱. 以工业为基础的技术革命, 主要是新型材料. 新型材料是新兴技术的物质基础, 复合材料的研制与应用则是 21 世纪的发展方向. 当前, 材料科学的发展为航空航天工业提供的最有广泛前景的材料是复合材料. 由于复合材料具有重量轻、强度高、结构性能好等特点, 复合材料已经成为航天航空工业的基本结构材料, 在其它方面的应用也显示出无可比拟的巨大潜力. 比如, 在航天飞机上复合材料用做航天飞机舱门、机械臂和压力容器等, 在火箭与导弹上采用碳纤维复合材料大大减轻火箭和导弹的惰性重量, 既减轻发射重量又可节省发射费用或携带更重的弹头或增加有效射程和落点精度.

虽然复合材料的重量比传统的材料要轻, 但在一些对重量要求比较高的产业来讲它们仍然达不到要求, 为了解决这一问题通常是在复合材料上打孔, 它的重量将大大的减轻并且还不影响其性能如强度等. 这一方法具有很大的应用价值, 同时也引出一些理论上的问题. 因此对多孔的弹性材料的研究就应运而生. 一般来说, 多孔物体被视为一种弹性物质, 所以多孔物体行为理论是古典弹性学理论的一般化. 关于多孔的弹性物质的理论是由 Cowin 和

* 国家自然科学基金 (NSFC-60474017) 和教育部南开 - 天津大学刘徽应用数学中心资助课题.
收稿日期: 2005-12-21.

Nunziato 创立的 [1−3]. 在该理论中，整体密度是 “两个数量场 ”, “物体的密度 ” 和 “体积分数场 ” 三者的乘积. 在 Ciarletta 和 Iscan 的书 [4] 中对该理论进行了细致的研究.

在一维情况下，多孔物体行为由下面发展方程描述

$$\begin{cases} \rho_0 \ddot{u} = t', \\ \rho_0 K \ddot{\varphi} = h' + g, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 t 是应力， h 是平衡应力， g 是平衡体力. 变元 u 和 φ 分别表示固体弹性物质的位移和体积分数.

其结构方程是

$$\begin{cases} t = \mu u' + \beta\varphi, \\ h = \alpha\varphi', \\ g = -\beta u' - \gamma\dot{\varphi} - \xi\varphi. \end{cases} \tag{1.2}$$

假定内部能量密度是正定型的，则结构系数满足条件 $\mu > 0,\ \alpha > 0,\ \xi > 0,\ \xi\mu > \beta^2$. 将结构方程代入发展方程得到域方程

$$\begin{cases} \rho_0 \ddot{u}(x,t) = \mu u''(x,t) + \beta\varphi'(x,t), \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \\ \rho_0 K \ddot{\varphi}(x,t) = \alpha\varphi''(x,t) - \beta u'(x,t) - \xi\varphi(x,t) - \gamma\dot{\varphi}(x,t), \quad 0 < x < \ell,\ t > 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

常数 ρ_0 是质量密度， K 是平衡惯性. 方程 (1.3) 类似于 Timoshenko 方程，所以称其为线性 Timoshenko 型系统.

在目前已发表的文章中，主要研究的是一维的齐次线性方程和具有耗散性的各向同性的多孔的弹性物质. 并且认为：具有耗散过程的弹性学的组合是由于多孔性导致的. 因此，一个很自然的问题就提出来，由多孔性导致的耗散过程是否具有指数稳定性？

在 Quintanilla 的文章中 [5], 在简单支撑边界条件 $u(x,t) = 0,\ \varphi'(x,t) = 0,\ x = 0, \ell$, 下得到了域方程代表的系统是渐近稳定的，但并不指数稳定. 明显地，这样的性质在工程应用中是不充分的. 为了使相应的系统达到指数稳定，还需对系统施加控制.

在本文我们假定系统一端简单支撑一端自由，并在自由端施加速度线性反馈控制，即边界条件为

$$\begin{cases} u(0,t) = \varphi'(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ \mu u'(\ell,t) + \beta\varphi(\ell,t) = -\eta_1 \dot{u}(\ell,t), \quad t > 0, \\ \varphi'(\ell,t) = -\eta_2\dot{\varphi}(\ell,t), \quad t > 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

那么相应的闭环系统为

$$\begin{cases} \rho_0 \ddot{u}(x,t) = \mu u''(x,t) + \beta\varphi'(x,t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ \rho_0 K \ddot{\varphi}(x,t) = \alpha\varphi''(x,t) - \beta u'(x,t) - \xi\varphi(x,t) - \gamma\dot{\varphi}(x,t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \varphi'(0,t) = 0, \quad t > 0, \\ \mu u'(\ell,t) + \beta\varphi(\ell,t) = -\eta_1 \dot{u}(\ell,t), \quad t > 0, \\ \varphi'(\ell,t) = -\eta_2\dot{\varphi}(\ell,t), \quad t > 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中常系数满足的条件

$$\begin{cases} \mu > 0, \quad \alpha > 0, \quad K > 0, \quad \rho_0 > 0, \quad \xi > 0, \quad \gamma > 0, \\ \beta > 0, \quad \xi\mu > \beta^2, \quad \eta_1 > 0, \quad \eta_2 > 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

本文我们将研究闭环系统 (1.5) 在系数满足 (1.6) 条件下的性质，特别是系统的指数稳定性．对于规范的 Timoshenko 系统，近些年有不少研究结果，比如文 [6–9] 在各种反馈控制律下得到了闭环系统的指数稳定性以及 Riesz 基性质．我们这里不同的是尽管系统称为 Timoshenko 型系统，但它不是规范的 Timoshenko 系统，由于其描述的是多孔物体的行为，其系数具有一定的约束条件，所以在研究问题时这些都是要注意的．另外一个困难是在讨论中我们不能使用已导出的一维 Timoshenko 方程解公式 [10]．在分析系统时，为了克服上述困难，我们主要是采用 Birkhoff 渐近展开方法 [11]，给出系统谱的渐近值估计．这里我们完全是利用算子谱方法研究系统的指数稳定性，通过证明系统算子广义本征向量的完整性和 Riesz 基性质，从而系统满足谱确定增长条件，然后利用谱分布得到期望的结果．本文的内容安排如下：在第 2 节，我们首先规范化系统，通过设置合适的状态空间，将闭环系统 (1.5) 写成一个抽象初值问题，然后利用算子半群的理论得到闭环系统 (1.5) 的适定性和渐近稳定性．并表明系统算子 $\mathcal{A}$ 是预解紧的．第 3 节我们着重研究系统算子的谱．我们将算子的本征值问题转化成等价的一阶微分方程的边值问题，算子的本征值作为参数．由于一阶微分方程关于谱参数是非线性的，这里重要的一步是做了一个可逆的变换，将一阶微分方程转化为关于谱参数渐近线性的方程．通过渐近线性化方程的基本解矩阵的渐近展开，并利用边界条件得到相应特征方程零点的渐近分布，从而得到算子 $\mathcal{A}$ 的渐近本征值．在第 4 节，我们主要研究算子 $\mathcal{A}$ 的广义本征向量的完整性，这里我们的技巧在于引入一个辅助算子 $\mathcal{A}_0$，利用算子 $\mathcal{A}_0$ 的谱性质和算子 $\mathcal{A}$ 与辅助算子 $\mathcal{A}_0$ 关系来得到算子 $\mathcal{A}$ 的广义本征向量的完整性．在第 5 节，我们研究算子 $\mathcal{A}$ 的广义本征向量的 Riesz 基性质以及系统的指数稳定性．通过证明算子 $\mathcal{A}$ 的广义本征向量的 Riesz 基性质，我们得到系统满足谱确定增长条件，从而利用第 3 节获得的算子 $\mathcal{A}$ 的谱分布断言系统的指数稳定性．

2 系统的规范化及适定性和渐近稳定性

本节我们研究系统 (1.5) 的适定性以及渐近稳定性．我们首先设置合适的状态空间，将系统 (1.5) 规范化成一个抽象的初值问题，然后利用半群理论研究系统的适定性与稳定性．

选择状态空间 $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = V_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)\times H^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell),$$

$$V_0^k = \{\varphi\in H^k(0,\ell)\mid \varphi(0)=0\},\quad k\geq 1.$$

其中 $H^k(0,\ell)$ 是 k 阶的 Sobolev 空间．

对任意的 $Y_i=[u_i,v_i,\varphi_i,\phi_i]^\tau\in\mathcal{H},\ i=1,2$, 空间 $\mathcal{H}$ 中的内积定义为

$$\begin{aligned}(Y_1,Y_2)_1 = &\int_0^\ell \rho_0 v_1(x)\overline{v_2(x)}\mathrm{d}x + \int_0^\ell \rho_0 K\phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{\mu}\int_0^\ell [\mu u_1'(x)+\beta\varphi_1(x)]\overline{[\mu u_2'(x)+\beta\varphi_2(x)]}\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{\alpha}\int_0^\ell \alpha^2\varphi_1'(x)\overline{\varphi_2'(x)}\mathrm{d}x+\Big(\xi-\frac{\beta^2}{\mu}\Big)\int_0^\ell \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

可以验证 $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot)_1)$ 是 Hilbert 空间．

在空间 $\mathcal{H}$ 中定义线性算子 $\mathcal{A}$ 如下

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu}{\rho_0}D_{x^2} & 0 & \dfrac{\beta}{\rho_0}D_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{\beta}{\rho_0 K}D_x & 0 & \dfrac{\alpha}{\rho_0 K}D_{x^2}-\dfrac{\xi}{\rho_0 K} & -\dfrac{\gamma}{\rho_0 K} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$\mathcal{A}$ 的定义域为

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\left\{[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in H^2\times H^1\times H^2\times H^1 \,\middle|\, \begin{array}{l} u(0)=0,\varphi'(0)=0, \\ \mu u'(\ell)+\beta\varphi(\ell)=-\eta_1 v(\ell), \\ \varphi'(\ell)=-\eta_2\phi(\ell) \end{array}\right\}. \tag{2.2}$$

令 $Y=[u,\dot{u},\varphi,\dot{\varphi}]^\tau$, 则原系统可写成

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \ddot{u}\\ \dot{\varphi}\\ \ddot{\varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu}{\rho_0}D_{x^2} & 0 & \dfrac{\beta}{\rho_0}D_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{\beta}{\rho_0 K}D_x & 0 & \dfrac{\alpha}{\rho_0 K}D_{x^2}-\dfrac{\xi}{\rho_0 K} & -\dfrac{\gamma}{\rho_0 K} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ \dot{u}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

则闭环系统 (1.5) 可化为一阶抽象微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}=\mathcal{A}Y(t), \quad t>0, \\ Y(0)=Y_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $Y(t)=[u(\cdot,t),\dot{u}(\cdot,t),\varphi(\cdot,t),\dot{\varphi}(\cdot,t)]^\tau$, 且 $Y_0\in\mathcal{H}$ 是给定的初值.

本节我们将主要研究系统 (2.4) 的适定性和渐近稳定性问题. 首先我们有下面的结论.

定理 2.1 $\mathcal{A}$ 是耗散算子, 即 $\Re\,(\mathcal{A}Y,Y)_1\leq 0,\ \forall Y\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

证　对任意实的 $Y=[f,g,\varphi,\phi]^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}Y,Y)_1=&\int_0^\ell \rho_0\Big(\frac{\mu}{\rho_0}f''(x)+\frac{\beta}{\rho_0}\varphi'(x)\Big)g(x)\mathrm{d}x \\ &+\int_0^\ell \rho_0 K\Big(-\frac{\beta}{\rho_0 K}f'(x)+\frac{\alpha}{\rho_0 K}\varphi''(x)-\frac{\xi}{\rho_0 K}\varphi(x)-\frac{\gamma}{\rho_0 K}\phi(x)\Big)\phi(x)\mathrm{d}x \\ &+\frac{1}{\mu}\int_0^\ell(\mu g'(x)+\beta\phi(x))(\mu f'(x)+\beta\varphi(x))\mathrm{d}x \\ &+\frac{1}{\alpha}\int_0^\ell \alpha^2\varphi'(x)\phi'(x)\mathrm{d}x+\Big(\xi-\frac{\beta^2}{\mu}\Big)\int_0^\ell\varphi(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\ =&\,\mu f'(x)g(x)\big|_0^\ell-\mu\int_0^\ell f'(x)g'(x)\mathrm{d}x+\beta\int_0^\ell\varphi'(x)g(x)\mathrm{d}x-\beta\int_0^\ell f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\ &+\alpha\varphi'(x)\phi(x)\big|_0^\ell-\alpha\int_0^\ell\varphi'(x)\phi'(x)\mathrm{d}x-\xi\int_0^\ell\varphi(x)\phi(x)\mathrm{d}x-\gamma\int_0^\ell[\phi(x)]^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mu\int_0^\ell f'(x)g'(x)\mathrm{d}x+\beta\varphi(x)g(x)\big|_0^\ell-\beta\int_0^\ell \varphi'(x)g(x)\mathrm{d}x\\
&+\beta\int_0^\ell f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x+\frac{\beta^2}{\mu}\int_0^\ell \varphi(x)\phi(x)\mathrm{d}x+\alpha\int_0^\ell \varphi'(x)\phi'(x)\mathrm{d}x\\
&+\Big(\xi-\frac{\beta^2}{\mu}\Big)\int_0^\ell \varphi(x)\phi(x)\mathrm{d}x\\
=&\,[\mu f'(x)+\beta\varphi(x)]g(x)\big|_0^\ell+\alpha\varphi'(x)\phi(x)\big|_0^\ell-\gamma\int_0^\ell[\phi(x)]^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

由于 $Y=[f,g,\varphi,\phi]^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, 我们有

$$
\begin{cases}
g(0)=0,\quad \varphi'(0)=0,\\
\mu f'(\ell)+\beta\varphi(\ell)=-\eta_1 g(\ell),\\
\varphi'(\ell)=-\eta_2\phi(\ell).
\end{cases}
$$

于是

$$
\Re(\mathcal{A}Y,Y)_1=-\eta_1[g(\ell)]^2-\alpha\eta_2[\phi(\ell)]^2-\gamma\int_0^\ell[\phi(x)]^2\mathrm{d}x\le 0.
$$

所以算子 $\mathcal{A}$ 是耗散算子.

定理 2.2 算子 $\mathcal{A}$ 是可逆的, 且 $\mathcal{A}^{-1}$ 是紧算子.

证 设对于任意的 $F=[f_1,f_2,g_1,g_2]^\tau\in\mathcal{H}$, 存在 $Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, 有 $\mathcal{A}Y=F$, 即

$$
\begin{cases}
v(x)=f_1(x),\quad \phi(x)=g_1(x),\\
\mu u''(x)+\beta\varphi'(x)=\rho_0 f_2(x),\\
\alpha\varphi''(x)-\beta u'(x)-\xi\varphi(x)-\gamma\phi(x)=\rho_0 K g_2(x),\\
u(0)=0,\quad \varphi'(0)=0,\\
\mu u'(\ell)+\beta\varphi(\ell)=-\eta_1 f_1(\ell),\\
\varphi'(\ell)=-\eta_2 g_1(\ell).
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

对 (2.5) 式中的第一个微分方程关于 x 积分得

$$
\int_x^\ell \rho_0 f_2(s)\mathrm{d}s=[\mu u'(\ell)+\beta\varphi(\ell)]-\mu u'(x)-\beta\varphi(x).
$$

由边界条件 $\mu u'(\ell)+\beta\varphi(\ell)=-\eta_1 f_1(\ell)$ 得

$$
\beta\varphi(x)+\mu u'(x)+\eta_1 f_1(\ell)+\int_x^\ell \rho_0 f_2(s)\mathrm{d}s=0.
\tag{2.6}
$$

解出 $u'(x)$ 代入 (2.5) 中的第二个微分方程得

$$
\rho_0 K g_2(x)=\alpha\varphi''(x)+\Big(\frac{\beta^2}{\mu}-\xi\Big)\varphi(x)-\gamma g_1(x)+\frac{\beta\eta_1}{\mu}f_1(\ell)+\frac{\beta}{\mu}\int_x^\ell \rho_0 f_2(s)\mathrm{d}s,
$$

即

$$\alpha\mu\varphi''(x)-(\xi\mu-\beta^2)\varphi(x)-\mu\gamma g_1(x)+\beta\eta_1 f_1(\ell)-\mu\rho_0 K g_2(x)+\beta\int_x^\ell\rho_0 f_2(s)\mathrm{d}s=0. \tag{2.7}$$

令

$$G(x)=\frac{1}{\alpha\mu}\Big[-\mu\gamma g_1(x)+\beta\eta_1 f_1(\ell)-\mu\rho_0 K g_2(x)+\beta\int_x^\ell\rho_0 f_2(s)\mathrm{d}s\Big],\quad m=\sqrt{\frac{\xi\mu-\beta^2}{\alpha\mu}},$$

则 (2.7) 式变形为

$$\varphi''(x)-m^2\varphi(x)+G(x)=0. \tag{2.8}$$

求解 (2.8) 得到通解 $\varphi(x)$ 的表达式

$$\varphi(x)=C_1\mathrm{e}^{mx}+C_2\mathrm{e}^{-mx}-\frac{1}{m}\int_0^x\sinh m(x-r)G(r)\mathrm{d}r. \tag{2.9}$$

注意到

$$\varphi'(x)=C_1m\mathrm{e}^{mx}-C_2m\mathrm{e}^{-mx}-\int_0^x\cosh m(x-r)G(r)\mathrm{d}r.$$

由边界条件 $\varphi'(0)=0$ 得到 $C_1=C_2$, 由边界条件 $\varphi'(\ell)=-\eta_2 g_1(\ell)$ 得到

$$-\eta_2 g_1(\ell)=2mC_1\sinh m\ell-\int_0^\ell\cosh m(\ell-r)G(r)\mathrm{d}r.$$

从而有

$$C_1=\frac{1}{2m\sinh m\ell}\Big[\int_0^\ell\cosh m(\ell-r)G(r)\mathrm{d}r-\eta_2 g_1(\ell)\Big]. \tag{2.10}$$

因此

$$\varphi(x)=C_1\cosh mx-\frac{1}{m}\int_0^x\sinh m(x-r)G(r)\mathrm{d}r. \tag{2.11}$$

将 $\varphi(x)$ 代入 (2.6) 得

$$u'(x)=-\frac{1}{\mu}\Big[\beta\varphi(x)+\eta_1 f_1(\ell)+\int_x^\ell\rho_0 f_2(s)\mathrm{d}s\Big],$$

两端关于 x 积分得

$$u(x)=-\frac{1}{\mu}\Big[\beta\int_0^x\varphi(r)\mathrm{d}r+\eta_1 f_1(\ell)x+\int_0^x\mathrm{d}r\int_r^\ell\rho_0 f_2(s)\mathrm{d}s\Big]. \tag{2.12}$$

即对于任意的 $F=[f_1,f_2,g_1,g_2]^\tau\in\mathcal{H}$, 设 $v=f_1,\phi=g_1$, 而 $u(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别由 (2.12) 和 (2.11) 给出, 常数 C_1 由 (2.10) 确定, 则有唯一的 $Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 使得 $\mathcal{A}Y=F$. 所以逆算子 $\mathcal{A}^{-1}$ 存在, 因此 $\mathcal{A}^{-1}F=Y$ 且 $0\in\rho(\mathcal{A})$. 利用 Sobolev 嵌入定理可知 $\mathcal{A}^{-1}$ 是紧算子.

定理 2.3 算子 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}$ 上生成 C_0 压缩半群 $T(t)$.

证 Lumer-Phillips[12] 定理表明：$\mathcal{A}$ 是 C_0 压缩半群 $T(t)$ 的母元的充要条件是 $\Re(\mathcal{A}F,F)_1\le 0$, 且当 $\Re\lambda>0,\lambda\in\rho(\mathcal{A})$. 由定理 2.1 可知， $\mathcal{A}$ 是耗散算子即 $\Re(\mathcal{A}F,F)_1\le 0$, 定理 2.2 表明复平面的右半平面都是预解点. 从而算子 $\mathcal{A}$ 生成 C_0 压缩半群 $T(t)$.

定理 2.4 虚轴上没有 $\mathcal{A}$ 的谱点，因此 $\mathcal{A}$ 生成的半群 $T(t)$ 是渐近稳定的.

证 因为 $\mathcal{A}^{-1}$ 是紧算子，所以 $\sigma(\mathcal{A})=\{\lambda_n|n\in Z\}$ 都是点谱. 只需证明在虚轴上没有 $\mathcal{A}$ 的本征值.

我们利用反证法. 假设存在 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A})\cap iR$, 显然 $\lambda\neq 0$. 不妨设 $\lambda=ir$, $Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau$ 是相应的本征向量. 则 $(\lambda I-\mathcal{A})Y=0$, 即

$$\begin{cases}v(x)=\lambda u(x),\quad \phi(x)=\lambda\varphi(x),\\ \rho_0\lambda^2u(x)-\mu u''(x)-\beta\varphi'(x)=0,\\ \rho_0K\lambda^2\varphi(x)-\alpha\varphi''(x)+\beta u'(x)+\xi\varphi(x)+\gamma\lambda\varphi(x)=0,\\ u(0)=0,\quad \varphi'(0)=0,\\ \mu u'(\ell)+\beta\varphi(\ell)=-\eta_1\lambda u(\ell),\quad \varphi'(\ell)=-\eta_2\lambda\varphi(\ell).\end{cases}$$

因为 $\mathcal{A}$ 是耗散算子，所以

$$0=\Re\lambda||Y||^2=\Re(\mathcal{A}Y,Y)_1=-\eta_1[v(\ell)]^2-\alpha\eta_2[\phi(\ell)]^2-\gamma\int_0^\ell[\phi(x)]^2\mathrm{d}x\le 0,$$

由此得到 $v(\ell)=0,\ \phi(\ell)=0,\ \phi(x)=0$. 因此 $u(\ell)=0,\ \varphi(x)=0$. 将之代入系统方程得

$$\begin{cases}\rho_0\lambda^2u(x)-\mu u''(x)=0,\quad 0<x<\ell,\\ u'(x)=0,\quad 0<x<\ell,\\ u(0)=u(\ell)=0,\end{cases}$$

所以 $u(x)=0$. 从而 $Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau=[0,0,0,0]^\tau$. 此与 $Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau$ 是 $\mathcal{A}$ 的本征向量矛盾. 因此虚轴上没有 $\mathcal{A}$ 的本征值，由 Lyubich 和 Phóng 定理 [13] 得半群 $T(t)$ 是渐近稳定的. 即系统 (2.4) 是渐近稳定的.

3 $\mathcal{A}$ 的本征值的渐近值计算

前节我们得到算子 $\mathcal{A}$ 具有紧的预解式，生成压缩半群，相应系统是渐近稳定的. 为了研究系统的指数稳定性，我们需要知道算子 $\mathcal{A}$ 的谱分布. 因此本节我们重点研究算子的本征值问题. 由于我们的算子是非规范的 Timoshenko 算子，不能直接应用已有的解渐近公式，所以我们将利用最基本的方法求算子 $\mathcal{A}$ 的本征值的渐近值. 这个过程主要通过下面四步来完成.

3.1 边界本征值问题

设 λ 是 $\mathcal{A}$ 的一个本征值， $Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是相应的一个本征向量. 则

$$v(x)=\lambda u(x),\quad \phi(x)=\lambda\varphi(x),$$

函数 $u(x)$, $\varphi(x)$ 满足方程

$$\begin{cases}\rho_0\lambda^2 u(x)-\mu u''(x)-\beta\varphi'(x)=0, \quad 0<x<\ell,\\ \rho_0K\lambda^2\varphi(x)-\alpha\varphi''(x)+\beta u'(x)+\xi\varphi(x)+\gamma\lambda\varphi(x)=0, \quad 0<x<\ell,\\ u(0)=0, \quad \varphi'(0)=0,\\ \mu u'(\ell)+\beta\varphi(\ell)=-\lambda\eta_1 u(\ell),\\ \varphi'(\ell)=-\lambda\eta_2\varphi(\ell).\end{cases}$$

下面我们将上面的方程转化成一阶的边界本征值问题. 令 $z(x)=u'(x)$, $\psi(x)=\varphi'(x)$, $Z(x)=[u,z,\varphi,\psi]^\tau$, 则微分方程写成

$$\frac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x}=M(\lambda)Z(x),$$

其中

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \dfrac{\rho_0}{\mu}\lambda^2 & 0 & 0 & -\dfrac{\beta}{\mu}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{\beta}{\alpha} & \dfrac{\rho_0K}{\alpha}\lambda^2+\dfrac{\gamma}{\alpha}\lambda+\dfrac{\xi}{\alpha} & 0\end{pmatrix}.$$

将 $M(\lambda)$ 分解得

$$\begin{aligned}M(\lambda)&=\lambda^2M_0+\lambda M_1+M_2\\ &=\lambda^2\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ \dfrac{\rho_0}{\mu}&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&\dfrac{\rho_0K}{\alpha}&0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\dfrac{\gamma}{\alpha}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&-\dfrac{\beta}{\mu}\\0&0&0&1\\0&\dfrac{\beta}{\alpha}&\dfrac{\xi}{\alpha}&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

相应的边界条件

$$\begin{aligned}&Z(0)=[u(0),z(0),\varphi(0),\psi(0)]^\tau=[0,u'(0),\varphi(0),0]^\tau,\\ &Z(\ell)=[u(\ell),z(\ell),\varphi(\ell),\psi(\ell)]^\tau=\Big[u(\ell),-\frac{1}{\mu}(\lambda\eta_1u(\ell)+\beta\varphi(\ell)),\varphi(\ell),-\lambda\eta_2\varphi(\ell)\Big]^\tau.\end{aligned}$$

取矩阵

$$B_0(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \quad B_1(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\ \dfrac{\lambda\eta_1}{\mu}&1&\dfrac{\beta}{\mu}&0\\0&0&\lambda\eta_2&1\end{pmatrix},$$

则边界条件可写成

$$B_0(\lambda)Z(0)+B_1(\lambda)Z(\ell)=0.$$

于是我们有下面的结论.

命题 3.1 一阶线性微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x} = M(\lambda)Z(x), \quad 0 < x < \ell, \\ B_0(\lambda)Z(0) + B_1(\lambda)Z(\ell) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

的边界本征值问题非零解的存在性和算子 $\mathcal{A}$ 的本征值是等价的.

3.2 边界值问题本征参数的线性化

在上面的矩阵 $M(\lambda)$ 是本征参数 λ 二阶形式, 也就是说 $M(\lambda)$ 关于 λ 是非线性的, 为了能达到求本征值渐近值的目的, 我们需将矩阵 $M(\lambda)$ 渐近线性化. 这里重要的一点是找一个可逆矩阵 $P(\lambda)$ 使得 $P^{-1}(\lambda)M(\lambda)P(\lambda)$ 是一个渐近线性矩阵.

令 $m_1 = \sqrt{\frac{\rho_0}{\mu}}$, $m_2 = \sqrt{\frac{\rho_0 K}{\alpha}}$, 构造可逆矩阵

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ m_1\lambda & -m_1\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m_2\lambda & -m_2\lambda \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2m_1\lambda} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2m_1\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2m_2\lambda} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2m_2\lambda} \end{pmatrix}.$$

令 $Z(x) = P(\lambda)W(x)$, 则 $\frac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x} = P(\lambda)\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = M(\lambda)Z(x) = M(\lambda)P(\lambda)W(x)$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = P^{-1}(\lambda)M(\lambda)P(\lambda)W(x),$$

$$P^{-1}(\lambda)M(\lambda)P(\lambda) = \lambda^2 P^{-1}(\lambda)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\rho_0}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\rho_0 K}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} P(\lambda) + \lambda P^{-1}(\lambda)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} P(\lambda)$$

$$+P^{-1}(\lambda)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\beta}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{\beta}{\alpha} & \dfrac{\xi}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} P(\lambda)$$

$$
= \lambda \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{\beta m_2}{2\mu m_1} & \dfrac{\beta m_2}{2\mu m_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{\beta m_2}{2\mu m_1} & -\dfrac{\beta m_2}{2\mu m_1} \\ \dfrac{\beta m_1}{2\alpha m_2} & -\dfrac{\beta m_1}{2\alpha m_2} & \dfrac{\gamma}{2\alpha m_2} & \dfrac{\gamma}{2\alpha m_2} \\ -\dfrac{\beta m_1}{2\alpha m_2} & \dfrac{\beta m_1}{2\alpha m_2} & -\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2} & -\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2} \end{pmatrix}
$$

$$
+\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\xi}{2\alpha m_2} & \dfrac{\xi}{2\alpha m_2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\xi}{2\alpha m_2} & -\dfrac{\xi}{2\alpha m_2} \end{pmatrix}
$$

$$
= \lambda M_0^* + M_1^* + \lambda^{-1} M_2^* = M^*(\lambda).
$$

我们得到渐近线性参数的边界本征值问题

$$
\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = M^*(\lambda)W(x), \quad 0 < x < \ell, \\ B_0(\lambda)P(\lambda)W(0) + B_1(\lambda)P(\lambda)W(\ell) = 0. \end{cases} \tag{3.2}
$$

命题 3.2 一阶线性微分方程

$$
\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Z(x)}{\mathrm{d}x} = M(\lambda)Z(x), \quad 0 < x < \ell, \\ B_0(\lambda)Z(0) + B_1(\lambda)Z(\ell) = 0 \end{cases} \tag{3.3}
$$

的边界本征值问题和方程 (3.2) 是等价的.

3.3 渐近线性边界本征值问题的基本解矩阵的渐近展开

一阶微分方程

$$
\frac{\mathrm{d}R(x)}{\mathrm{d}x} = \lambda M_0^* R(x)
$$

的基本解矩阵为

$$
E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{m_1\lambda x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-m_1\lambda x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{m_2\lambda x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-m_2\lambda x} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda M_0^* x}.
$$

定理 3.3 一阶微分方程

$$
\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} = [\lambda M_0^* + M_1^* + \lambda^{-1} M_2^*]W(x) \tag{3.4}
$$

的基本解矩阵有渐近表达式

$$W(x,\lambda)=[P_0(x)+O(\lambda^{-1})]E(x,\lambda).$$

证 设 $W(x,\lambda)$ 有如下形式

$$W(x,\lambda)=\Big[P_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}P_n(x)\Big]E(x,\lambda),$$

其中 $P_n(x), n\geq 0$, 待定. 将 $W(x,\lambda)$ 的表达式代入方程 (3.4) 得

$$\begin{aligned}&\Big[P_0'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}P_n'(x)\Big]E(x,\lambda)+\Big[P_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}P_n(x)\Big]\lambda M_0^*E(x,\lambda)\\&=(\lambda M_0^*+M_1^*+\lambda^{-1}M_2^*)\Big[P_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}P_n(x)\Big]E(x,\lambda),\end{aligned}$$

由于 $E(x,\lambda)$ 是可逆矩阵, 所以

$$\begin{aligned}&P_0'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}P_n'(x)+\lambda\Big[P_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}P_n(x)\Big]M_0^*\\&=(\lambda M_0^*+M_1^*+\lambda^{-1}M_2^*)\Big[P_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}P_n(x)\Big].\end{aligned}$$

比较等式两端 λ 的同次幂系数矩阵

$$\lambda: P_0(x)M_0^*=M_0^*P_0(x), \tag{3.5}$$

$$1: P_0'(x)+P_1(x)M_0^*=M_0^*P_1(x)+M_1^*P_0(x), \tag{3.6}$$

$$\lambda^{-1}: P_1'(x)+P_2(x)M_0^*=M_0^*P_2(x)+M_1^*P_1(x)+M_2^*P_0(x), \tag{3.7}$$

$$\lambda^{-n}: P_n'(x)+P_{n+1}(x)M_0^*=M_0^*P_{n+1}(x)+M_1^*P_n(x)+M_2^*P_{n-2}(x),\quad n\geq 2. \tag{3.8}$$

由于 M_0^* 是对角矩阵, 由 (3.5) 知 $P_0(x)$ 与 M_0^* 可以交换, 所以 $P_0(x)$ 也是对角矩阵. 不妨设

$$P_0(x)=\mathrm{diag}\left[p_1^{(0)}(x),p_2^{(0)}(x),p_3^{(0)}(x),p_4^{(0)}(x)\right],$$

又已知

$$W(0,\lambda)=\Big[P_0(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}P_n(0)\Big]=I,$$

所以可设 $P_0(0)=I$, $P_n(0)=\theta$, $n\geq 1$. 将 (3.6) 式变形为

$$1: P_0'(x)+P_1(x)M_0^*-M_0^*P_1(x)=M_1^*P_0(x), \tag{3.9}$$

因为 $P_1(x)M_0^*-M_0^*P_1(x)$ 的对角线上的元素为零, 所以通过 (3.9) 可以确定 $P_0(x)$ 的对角线上的元素. 由 (3.9) 得

$$p_j^{'(0)}(x)=a_{jj}^{(1)}(x)p_j^{(0)}(x),$$

所以

$$p_j^{(0)}(x)=\exp\Big(\int_0^x a_{jj}^{(1)}(s)\mathrm{d}s\Big).$$

其中 $a_{jj}^{(1)}(s)$ 是矩阵 M_1^* 的对角线上的元素.又已知矩阵 M_1^* 的对角线元素为 $(0,0,\frac{\gamma}{2\alpha m_2},-\frac{\gamma}{2\alpha m_2})$, 解得

$$p_1^{(0)}(x)=1,\quad p_2^{(0)}(x)=1,\quad p_3^{(0)}(x)=\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x},\quad p_4^{(0)}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x}.$$

所以

$$P_0(x)=\mathrm{diag}\big(1,1,\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x},\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x}\big). \tag{3.10}$$

设矩阵 $P_1(x)=(p_{ij}^{(1)}(x))_{4\times 4}$, 将 $P_0(x)$ 代入 (3.6) 式来解 $P_1(x)$, 除对角线元素外，都可由方程唯一确定，解得

$$p_{12}^{(1)}(x)=0;\quad p_{13}^{(1)}(x)=\frac{\beta m_2}{2\mu m_1(m_1-m_2)}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x};\quad p_{14}^{(1)}(x)=-\frac{\beta m_2}{2\mu m_1(m_1+m_2)}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x};$$

$$p_{21}^{(1)}(x)=0;\quad p_{23}^{(1)}(x)=\frac{\beta m_2}{2\mu m_1(m_1+m_2)}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x};\quad p_{24}^{(1)}(x)=-\frac{\beta m_2}{2\mu m_1(m_1-m_2)}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x};$$

$$p_{31}^{(1)}(x)=\frac{\beta m_1}{2\alpha m_2(m_1-m_2)};\quad p_{32}^{(1)}(x)=\frac{\beta m_1}{2\alpha m_2(m_1+m_2)};\quad p_{34}^{(1)}(x)=-\frac{\gamma}{4\alpha m_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x};$$

$$p_{41}^{(1)}(x)=-\frac{\beta m_1}{2\alpha m_2(m_1+m_2)};\quad p_{42}^{(1)}(x)=-\frac{\beta m_1}{2\alpha m_2(m_1-m_2)};\quad p_{43}^{(1)}(x)=-\frac{\gamma}{4\alpha m_2^2}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x}.$$

将 (3.7) 式变形为

$$\lambda^{-1}: P_1'(x)+P_2(x)M_0^*-M_0^*P_2(x)=M_1^*P_1(x)+M_2^*P_0(x), \tag{3.11}$$

因为 $P_2(x)M_0^*-M_0^*P_2(x)$ 的对角线上的元素为零，所以通过 (3.11) 可以确定 $P_1(x)$ 的对角线上的元素．由 (3.11) 得

$$p_{jj}^{'(1)}(x)=a_{jj}^{(1)}(x)p_{jj}^{(1)}(x)+a_{jj}^{(2)}(x)p_j^{(0)}(x),$$

所以

$$p_{jj}^{(1)}(x)=\exp\Big(\int_0^x a_{jj}^{(1)}(s)\mathrm{d}s\Big)\Big[\int_0^x \mathrm{e}^{\int_0^x a_{jj}^{(1)}(s)\mathrm{d}s}a_{jj}^{(2)}(s)p_j^{(0)}(s)\mathrm{d}s\Big].$$

其中 $a_{jj}^{(i)}(s)$ 是矩阵 M_i^* 的对角线上的元素．解得

$$p_{11}^{(1)}(x)=0;\quad p_{22}^{(1)}(x)=0;$$

$$p_{33}^{(1)}(x)=\frac{\xi}{\gamma}\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x}\big(\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x}-1\big);\quad p_{44}^{(1)}(x)=\frac{\xi}{\gamma}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x}\big(\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}x}-1\big).$$

到此确定出了矩阵 $P_1(x)$, 将 $P_1(x)$ 代入 (3.7) 再解 $P_2(x)$. 以此类推可以解出 $P_n(x)$.

解得的 $P_n(x)$, 在 $x\in(0,\ell)$ 上连续，且一致有界．对 $\delta>0$, 当 $|\lambda|\geq\delta>0$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n+1}P_n(x)\to P_1(x)(|\lambda|\to\infty)$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}P_n(x)=O(\lambda^{-1})$.

所以方程 (3.4) 的基本解矩阵为

$$W(x,\lambda)=[P_0(x)+O(\lambda^{-1})]E(x,\lambda). \tag{3.12}$$

3.4 渐近本征值计算

前面我们给出了渐近线性方程基本解矩阵的渐近展开，这里我们将应用这个渐近展开去计算本征值的渐近值.

我们先考虑渐近线性参数一阶系统边界值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}=M^*(\lambda)W(x), \quad 0<x<\ell,\\ B_0(\lambda)P(\lambda)W(0)+B_1(\lambda)P(\lambda)W(\ell)=0\end{cases} \tag{3.13}$$

的非零解的存在性.

由定理 3.3 知其基本解矩阵为

$$W(x,\lambda)=[P_0(x)+O(\lambda^{-1})]E(x,\lambda),$$

则任一解 $W(x)$ 可表示为

$$W(x)=W(x,\lambda)\eta,\ \eta\in C^4,$$

将其代入边界条件得

$$B_0(\lambda)P(\lambda)W(0,\lambda)\eta+B_1(\lambda)P(\lambda)W(\ell,\lambda)\eta=0.$$

即

$$\left\{B_0(\lambda)P(\lambda)+B_1(\lambda)P(\lambda)\left[P_0(\ell)+O(\lambda^{-1})\right]E(\ell,\lambda)\right\}\eta=0.$$

要使之有非零解 η, 则

$$D(\lambda)=\det\left\{B_0(\lambda)P(\lambda)+B_1(\lambda)P(\lambda)\left[P_0(\ell)+O(\lambda^{-1})\right]E(\ell,\lambda)\right\}=0. \tag{3.14}$$

当 $\Re\lambda\to\infty$ 时，我们有

$$\lim_{\Re\lambda\to+\infty}\frac{D(\lambda)}{\lambda^3\mathrm{e}^{(m_1+m_2)\lambda\ell}}=m_2\Big[m_1+\frac{\eta_1}{\mu}\Big][\eta_2+m_2]\mathrm{e}^{\frac{\gamma\ell}{2\alpha m_2}},$$

$$\lim_{\Re\lambda\to-\infty}\frac{D(\lambda)}{\lambda^3\mathrm{e}^{(m_1+m_2)\lambda\ell}}=m_2\Big[m_1-\frac{\eta_1}{\mu}\Big][\eta_2-m_2]\mathrm{e}^{-\frac{\gamma\ell}{2\alpha m_2}}.$$

所以当 $\eta_1\neq\mu m_1$, $\eta_2\neq m_2$ 时，存在 N 使得

$$|D(\lambda)|>0, \quad |\Re\lambda|\geq N.$$

注意到 $B_0(\lambda), B_1(\lambda)$,$P(\lambda)$ 和 $E(\ell,\lambda)$ 的表达式，以及

$$P_0(\ell)+O(\lambda^{-1})=\begin{pmatrix}1+O(\lambda^{-1}) & O(\lambda^{-1}) & O(\lambda^{-1}) & O(\lambda^{-1})\\ O(\lambda^{-1}) & 1+O(\lambda^{-1}) & O(\lambda^{-1}) & O(\lambda^{-1})\\ O(\lambda^{-1}) & O(\lambda^{-1}) & \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}\ell}+O(\lambda^{-1}) & O(\lambda^{-1})\\ O(\lambda^{-1}) & O(\lambda^{-1}) & O(\lambda^{-1}) & \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}\ell}+O(\lambda^{-1})\end{pmatrix}.$$

对 $|\Re\lambda| \le N$, 计算得

$$B_0(\lambda)P(\lambda)+B_1(\lambda)P(\lambda)[P_0(\ell)+O(\lambda^{-1})]E(\ell,\lambda)=H(\lambda)=(h_{ij}(\lambda))_{4\times 4},$$

其中

$$\begin{aligned}
&h_{11}=1,\ h_{12}=1,\ h_{13}=0,\ h_{14}=0;\\
&h_{21}=0,\ h_{22}=0,\ h_{23}=m_2\lambda,\ h_{24}=-m_2\lambda;\\
&h_{31}=\left[1+O(\lambda^{-1})\right]\left(\frac{\eta_1}{\mu}+m_1\right)\lambda \mathrm{e}^{m_1\lambda\ell}+O(\lambda^{-1}),\\
&h_{32}=\left[1+O(\lambda^{-1})\right]\left(\frac{\eta_1}{\mu}-m_1\right)\lambda \mathrm{e}^{-m_1\lambda\ell}+O(\lambda^{-1}),\\
&h_{33}=\frac{\beta}{\mu}\Big[\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}\ell}+O(\lambda^{-1})\Big]\mathrm{e}^{m_2\lambda\ell}+O(\lambda^{-1}),\\
&h_{34}=\frac{\beta}{\mu}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}\ell}+O(\lambda^{-1})\Big]\mathrm{e}^{-m_2\lambda\ell}+O(\lambda^{-1});\\
&h_{41}=O(\lambda^{-1}),\quad h_{42}=O(\lambda^{-1}),\\
&h_{43}=(\eta_2+m_2)\lambda\Big[\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2\alpha m_2}\ell}+O(\lambda^{-1})\Big]\mathrm{e}^{m_2\lambda\ell}+O(\lambda^{-1}),\\
&h_{44}=(\eta_2-m_2)\lambda\Big[\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2\alpha m_2}\ell}+O(\lambda^{-1})\Big]\mathrm{e}^{-m_2\lambda\ell}+O(\lambda^{-1}).
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
D(\lambda)&=\det|H(\lambda)|\\
&=\Big[\lambda\Big(m_1-\frac{\eta_1}{\mu}\Big)\mathrm{e}^{-m_1\lambda\ell}+\lambda\Big(m_1+\frac{\eta_1}{\mu}\Big)\mathrm{e}^{m_1\lambda\ell}+O(\lambda^{-1})\Big]\\
&\quad\cdot\Big[m_2\lambda^2(\eta_2-m_2)\mathrm{e}^{-(\frac{\gamma\ell}{2\alpha m_2}+m_2\lambda\ell)}+m_2\lambda^2(\eta_2+m_2)\mathrm{e}^{\frac{\gamma\ell}{2\alpha m_2}+m_2\lambda\ell}+O(\lambda^{-1})\Big]+O(\lambda^{-1})\\
&=\Big[\lambda\Big(m_1-\frac{\eta_1}{\mu}\Big)\mathrm{e}^{-m_1\lambda\ell}+\lambda\Big(m_1+\frac{\eta_1}{\mu}\Big)\mathrm{e}^{m_1\lambda\ell}\Big]\\
&\quad\cdot\Big[m_2\lambda^2(\eta_2-m_2)\mathrm{e}^{-(\frac{\gamma\ell}{2\alpha m_2}+m_2\lambda\ell)}+m_2\lambda^2(\eta_2+m_2)\mathrm{e}^{\frac{\gamma\ell}{2\alpha m_2}+m_2\lambda\ell}\Big]+O(\lambda^{-1})\\
&=D_1(\lambda)+O(\lambda^{-1})=0.
\end{aligned}$$

当 $|\lambda|$ 充分大时， $D(\lambda)=D_1(\lambda)+O(\lambda^{-1})=0$ 有渐近零点 $D_1(\lambda)=0$. 即

$$\begin{aligned}
D_1(\lambda)=&\Big[\lambda\Big(m_1-\frac{\eta_1}{\mu}\Big)\mathrm{e}^{-m_1\ell\lambda}+\lambda\Big(m_1+\frac{\eta_1}{\mu}\Big)\mathrm{e}^{m_1\ell\lambda}\Big]\\
&\cdot\left[m_2\lambda^2(\eta_2-m_2)\mathrm{e}^{-h\ell}+m_2\lambda^2(\eta_2+m_2)\mathrm{e}^{h\ell}\right]=0,
\end{aligned}$$

其中 $h=m_2\lambda+\frac{\gamma}{2\alpha m_2}$.

所以有

$$\lambda\Big(m_1-\frac{\eta_1}{\mu}\Big)\mathrm{e}^{-m_1\ell\lambda}+\lambda\Big(m_1+\frac{\eta_1}{\mu}\Big)\mathrm{e}^{m_1\ell\lambda}=0, \tag{3.15}$$

$$m_2\lambda^2(\eta_2-m_2)\mathrm{e}^{-h\ell}+m_2\lambda^2(\eta_2+m_2)\mathrm{e}^{h\ell}=0. \tag{3.16}$$

由 (3.15) 得

$$\Big(\frac{\eta_1}{\mu}-m_1\Big)\mathrm{e}^{-m_1\ell\lambda}=\Big(\frac{\eta_1}{\mu}+m_1\Big)\mathrm{e}^{m_1\ell\lambda},$$

即

$$\mathrm{e}^{2m_1\ell\lambda}=\frac{\eta_1-\mu m_1}{\eta_1+\mu m_1}.$$

解得

$$\widetilde{\lambda_{1,n}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2m_1\ell}\ln\left|\dfrac{\eta_1-\mu m_1}{\eta_1+\mu m_1}\right|+\dfrac{n}{m_1\ell}\pi i, & \eta_1-\mu m_1>0,\\[2ex] \dfrac{1}{2m_1\ell}\ln\left|\dfrac{\eta_1-\mu m_1}{\eta_1+\mu m_1}\right|+\dfrac{2n+1}{2m_1\ell}\pi i, & \eta_1-\mu m_1<0.\end{cases} \tag{3.17}$$

由 (3.16) 得

$$(\eta_2-m_2)\mathrm{e}^{-h\ell}+(\eta_2+m_2)\mathrm{e}^{h\ell}=0,$$

即

$$\mathrm{e}^{2h\ell}=\frac{m_2-\eta_2}{m_2+\eta_2}.$$

解得

$$\widetilde{\lambda_{2,n}}=\begin{cases}-\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2^2}+\dfrac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\dfrac{m_2-\eta_2}{m_2+\eta_2}\right|+\dfrac{n}{m_2\ell}\pi i, & m_2-\eta_2>0,\\[2ex] -\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2^2}+\dfrac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\dfrac{m_2-\eta_2}{m_2+\eta_2}\right|+\dfrac{2n+1}{2m_2\ell}\pi i, & m_2-\eta_2<0.\end{cases} \tag{3.18}$$

所以算子 $\mathcal{A}$ 的渐近本征值为 $\{\widetilde{\lambda_{1,n}}|n\in Z\}\cup\{\widetilde{\lambda_{2,n}}|n\in Z\}$.

对函数 $D(\lambda)$ 应用复变函数中的 Rouché 定理可以得到下面的结论.

定理 3.4 算子 $\mathcal{A}$ 如定义，且 $\eta_1\neq\mu m_1,\eta_2\neq m_2$. 则 $\mathcal{A}$ 的谱 $\sigma(\mathcal{A})$ 分布在一个垂直的带域里，相互可分离的，且由两支组成，即

$$\sigma(\mathcal{A})=\{\lambda_{1,n},\lambda_{2,n};n\in Z\},$$

当 $|\lambda_{j,n}|$ 充分大时，$\lambda_{j,n}$ 有渐近的表达式 $\lambda_{j,n}=\widetilde{\lambda_{j,n}}+O(\widetilde{\lambda_{j,n}}^{-1})$, 其中 $\widetilde{\lambda_{j,n}}$ 由 (3.17) 和 (3.18) 给出.

证 如果 λ 是 $\mathcal{A}$ 的谱当且仅当 $D(\lambda)=0$, 由此得到第 1 部分的结论. 第 2 部分的结论实际上就是对 Rouché 定理的一个应用，其证明过程是对 Rouché 定理中条件的验证. 此处证明略去.

4 辅助算子 $\mathcal{A}_0$ 及其谱性质

本文中我们主要研究系统 (2.4) 的指数稳定性和算子 $\mathcal{A}$ 的广义本征向量系统的 Riesz 基性质. 为了达到此目的，我们引入辅助算子 $\mathcal{A}_0$[14]

$$\mathcal{A}_0Y=\Big[v,\frac{\mu}{\rho_0}u'',\phi,\frac{\alpha}{\rho_0K}\varphi''-\frac{\gamma}{\rho_0K}\phi\Big]^\tau,\quad \forall Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \tag{4.1}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)=\left\{[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in H^2\times H^1\times H^2\times H^1\,\middle|\,\begin{array}{l}u(0)=0,\quad \varphi'(0)=0;\\ \mu u'(\ell)=-\eta_1 v(\ell),\quad \varphi'(\ell)=-\eta_2\phi(\ell)\end{array}\right\}. \quad (4.2)$$

以后我们总假定 $\eta_1\neq\mu m_1,\eta_2\neq m_2$.

4.1 算子 $\mathcal{A}_0$ 的性质

在空间 $\mathcal{H}$ 上定义新的内积， $\forall\ \ Y_i=[u_i,v_i,\varphi_i,\phi_i]^\tau\in\mathcal{H}$, $i=1,2$,

$$(Y_1,Y_2)_2=\int_0^\ell\rho_0 v_1\overline{v_2}\mathrm{d}x+\int_0^\ell\rho_0K\phi_1\overline{\phi_2}\mathrm{d}x+\mu\int_0^\ell u_1'\overline{u_2'}\mathrm{d}x+\alpha\int_0^\ell\varphi_1'\overline{\varphi_2'}\mathrm{d}x+\varphi_1(\ell)\overline{\varphi_2(\ell)},$$

则

$$||Y||_2^2=\int_0^\ell\rho_0(v)^2\mathrm{d}x+\int_0^\ell\rho_0K(\phi)^2\mathrm{d}x+\mu\int_0^\ell(u')^2\mathrm{d}x+\alpha\int_0^\ell(\varphi')^2\mathrm{d}x.$$

可以证明这个内积与原内积等价.

定理 4.1 $\mathcal{A}_0$ 是可逆的且 $\mathcal{A}_0^{-1}$ 是紧算子.

定理 4.1 的证明与定理 2.2 类似，这里略去细节.

引理 4.2 如果序列 $\{e_n\}$ 是空间 H 的一个 Riesz 基，序列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\neq0$, 当 $|n|\to\infty$ 时，有 $a_n\to a\neq0$. 那么 $\{a_ne_n\}$ 也构成空间 H 的 Riesz 基.

因为算子 $\mathcal{A}_0$ 是预解紧的，所以 $\mathcal{A}_0$ 的谱由其所有的本征值组成．并且有下面的结论.

定理 4.3 算子 $\mathcal{A}_0$ 的本征值为

$$\sigma(\mathcal{A}_0)=\{\zeta_{1,n},\zeta_{2,n},\zeta_0=0,\,|\,n\in Z\},$$

其中 $\zeta_{1,n}=\widetilde{\lambda_{j,n}}$ 由 (3.17) 给出

$$\zeta_{2,n}=\begin{cases}-\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2^2}+\dfrac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\dfrac{m_2-\eta_2}{m_2+\eta_2}\right|+\dfrac{n}{m_2\ell}\pi i+o\Big(\dfrac1n\Big),\quad m_2-\eta_2>0,\\ -\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2^2}+\dfrac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\dfrac{m_2-\eta_2}{m_2+\eta_2}\right|+\dfrac{2n+1}{2m_2\ell}\pi i+o\Big(\dfrac1n\Big),\quad m_2-\eta_2<0,\end{cases}$$

且相应的本征向量构成 $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot)_2)$ 的一个 Riesz 基.

证 设 $Y=[u,v,\varphi,\phi]^\tau\in D(\mathcal{A}_0)$, λ 是 $\mathcal{A}_0$ 的一个特征值，则 $v(x)=\lambda u(x)$, $\phi(x)=\lambda\varphi(x)$, 且 $u(x),\varphi(x)$ 满足方程

$$\begin{cases}\rho_0\lambda^2u(x)=\mu u''(x),\quad 0<x<\ell,\\ \rho_0K\lambda^2\varphi(x)=\alpha\varphi''(x)-\lambda\gamma\varphi(x),\quad 0<x<\ell,\\ u(0)=0,\quad \varphi'(0)=0,\\ \mu u'(\ell)=-\lambda\eta_1u(\ell),\quad \varphi'(\ell)=-\lambda\eta_2\varphi(\ell).\end{cases}$$

解二次微分方程

$$\rho_0\lambda^2u(x)=\mu u''(x),\quad u(0)=0,\quad \mu u'(\ell)=-\lambda\eta_1u(\ell),$$

得

$$e^{2\sqrt{\frac{\rho_0}{\mu}}\lambda\ell}=\frac{\eta_1-\sqrt{\rho_0\mu}}{\eta_1+\sqrt{\rho_0\mu}}.$$

令 $m_1=\sqrt{\frac{\rho_0}{\mu}}$, 解得

$$\zeta_{1,n}=\begin{cases}\dfrac{1}{2m_1\ell}\ln\left|\dfrac{\eta_1-\mu m_1}{\eta_1+\mu m_1}\right|+\dfrac{n}{m_1\ell}\pi i, & \eta_1-\mu m_1>0,\\[2ex] \dfrac{1}{2m_1\ell}\ln\left|\dfrac{\eta_1-\mu m_1}{\eta_1+\mu m_1}\right|+\dfrac{2n+1}{2m_1\ell}\pi i, & \eta_1-\mu m_1<0.\end{cases}$$

同理解微分方程

$$\rho_0K\lambda^2\varphi(x)=\alpha\varphi''(x)-\lambda\gamma\varphi(x),\quad \varphi'(0)=0,\quad \varphi'(\ell)=-\lambda\eta_2\varphi(\ell),$$

得本征值 $\zeta_0=0$ 和

$$\zeta_{2,n}=\begin{cases}-\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2^2}+\dfrac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\dfrac{m_2-\eta_2}{m_2+\eta_2}\right|+\dfrac{n}{m_2\ell}\pi i+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big), & m_2-\eta_2>0,\\[2ex] -\dfrac{\gamma}{2\alpha m_2^2}+\dfrac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\dfrac{m_2-\eta_2}{m_2+\eta_2}\right|+\dfrac{2n+1}{2m_2\ell}\pi i+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big), & m_2-\eta_2<0,\end{cases}$$

其中 $m_2=\sqrt{\frac{\rho_0K}{\alpha}}$. 所以算子 $\mathcal{A}_0$ 的本征值为 $\sigma(\mathcal{A}_0)=\{\zeta_{1,n},\zeta_{2,n},\zeta_0|n\in Z\}$.

下面证明 $\{\zeta_{1,k}\}$ 对应的本征向量构成空间 $V_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)$ 的 Riesz 基. 为了方便, 我们令

$$\beta_1=\ln\left|\frac{\eta_1-\mu m_1}{\eta_1+\mu m_1}\right|,$$

设 Y_k 是 $\zeta_{1,k}$ 对应的本征向量,

$$Y_k=\begin{pmatrix}u_k\\ v_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sin m_1\zeta_{1,k}x}{\zeta_{1,k}}\\ \sin m_1\zeta_{1,k}x\end{pmatrix}.$$

取空间

$$H_1=L^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell),\quad \widetilde{Y_k}\in H_1,$$

取

$$\widetilde{Y_k}=\begin{pmatrix}\cos m_1\zeta_{1,k}x\\ \sin m_1\zeta_{1,k}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{e^{\beta_1x+\frac{\frac{k}{pi}ix}{\ell}}+e^{-\beta_1x-\frac{\frac{k}{pi}ix}{\ell}}}{2}\\[2ex] \dfrac{e^{\beta_1x+\frac{\frac{k}{pi}ix}{\ell}}-e^{-\beta_1x-\frac{k\pi ix}{\ell}}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{e^{\beta_1x}}{2} & \dfrac{e^{-\beta_1x}}{2}\\[2ex] \dfrac{e^{\beta_1x}}{2} & -\dfrac{e^{-\beta_1x}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\frac{k}{pi}\frac{ix}{\ell}}\\ e^{-\frac{k}{pi}\frac{ix}{\ell}}\end{pmatrix},$$

因为 $\{e^{\frac{k}{pi}i\frac{x}{\ell}}\}$ 是 $L^2(0,\ell)$ 中的正交基, 所以 $\{(e^{\frac{k}{pi}i\frac{x}{\ell}},e^{-\frac{k}{pi}i\frac{x}{\ell}})^\tau|k\in Z\}$ 是 $L^2(0,\ell)\times L^2(0,\ell)$ 中的正交基. 又因为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}e^{\beta_1x} & e^{-\beta_1x}\\ e^{\beta_1x} & -e^{-\beta_1x}\end{vmatrix}=-1,$$

定义算子 T,

$$T\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{k}{pi}i\frac{x}{\ell}} \\ \\ \mathrm{e}^{-\frac{k}{pi}i\frac{x}{\ell}} \end{pmatrix} = \widetilde{Y_k}.$$

则 T 是 H_1 中的有界线性算子且是可逆的，因此 $\{\widetilde{Y_k}\}$ 是 H_1 中的 Riesz 基. 从而 $\{Y_k\}$ 是空间 $V_0^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)$ 中的 Riesz 基.

令

$$S^2(\zeta_k)=\frac{\rho_0 K\zeta_k^2+\gamma\zeta_k}{\alpha}\ ,$$

设 $Z_k\in H^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)$ 是 $\zeta_{2,k}$ 对应的本征向量,

$$\widehat{Z}_0=\begin{pmatrix}1\\ \\ 0\end{pmatrix},\quad Z_k=\begin{pmatrix}\varphi_k\\ \\ \phi_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sin S(\zeta_{2,k})x}{\zeta_{2,k}}\\ \\ \sin S(\zeta_{2,k})x\end{pmatrix}.$$

取 $\widetilde{Z_k}\in H_1$,

$$\widetilde{Z_k}=\begin{pmatrix}\varphi_k'\\ \\ \phi_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{S(\zeta_{2,k})}{\zeta_{2,k}} & 0\\ \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos S(\zeta_{2,k})x\\ \\ \sin S(\zeta_{2,k})x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{S(\zeta_{2,k})}{\zeta_{2,k}} & 0\\ \\ 0 & 1\end{pmatrix}T_k.$$

当 $\zeta_{2,k}$ 充分大时，有

$$\frac{S(\zeta_{2,k})}{\zeta_{2,k}}\longrightarrow m_2.$$

利用引理，要证明 $\{\widetilde{Z_k},k\in Z\}$ 是 H_1 中的 Riesz 基等价于证明 $\{T_k,k\in Z\}$ 是 H_1 中的 Riesz 基. 同前面第一部分的证明，容易证得 $\{T_k,k\in Z\}$ 是空间 H_1 的 Riesz 基. 因此 $\{Z_k,\widehat{Z}_0;k\in Z\}$ 是空间 $H^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)$ 中的 Riesz 基. 所以 $\{Y_k,Z_k,\widehat{Z}_0|k\in Z\}$ 构成空间 $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot)_2)$ 的一个 Riesz 基.

推论　4.4　算子 $\mathcal{A}_0$ 的本征值是简单的.

证　算子 $\mathcal{A}_0$ 的本征值由两部分组成，对于 $\{\zeta_{1,n}\}$ 显然是简单的. 对于 $\lambda\in\sigma(\mathcal{A}_0)$, 当 $|\lambda|\to\infty$ 时，$\{\zeta_{2,n}\}$ 也是简单的，加上前面的有限项后仍然是简单的. 因此算子 $\mathcal{A}_0$ 的本征值是简单的.

推论　4.5　算子 $\mathcal{A}_0$ 生成 C_0 群.

证　设 $\{\zeta_{1,n},\zeta_{2,n},\zeta_0\}_{n\in Z}$ 是算子 $\mathcal{A}_0$ 的本征值，其相应的本征向量为

$$\{(Y_n,0),(0,Z_n),(0,\widehat{Z}_0)\}_{n\in Z}.$$

由前面已证知 $\{\zeta_{1,n},\zeta_{2,n}\}_{n\in Z}$ 是简单的, 且 $\{(Y_n,0),(0,Z_n)\}_{n\in Z}$ 构成 $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot)_2)$ 中的一个 Riesz 基. 则此时 $\mathcal{A}_0$ 生成 C_0 群 $S(t)$, $\forall\, x\in\mathcal{H}$ 有

$$S(t)x=\sum_{n\in Z}\mathrm{e}^{\zeta_{1,n}t}(x,Y_n^*)\begin{pmatrix}Y_n\\0\end{pmatrix}+\sum_{n\in Z}\mathrm{e}^{\zeta_{2,n}t}(x,Z_n^*)\begin{pmatrix}0\\Z_n\end{pmatrix}+(x,\widehat{Z}_0^*)\begin{pmatrix}0\\\widehat{Z}_0\end{pmatrix},$$

其中 $\{Y_n^*,Z_n^*,\widehat{Z}_0^*\}_{n\in Z}$ 是对应于 $\{(Y_n,0)),(0,Z_n)(0,\widehat{Z}_0)\}_{n\in Z}$ 的双正交系统.

4.2 算子 $\mathcal{A}$ 与算子 $\mathcal{A}_0$ 之间的关系

在空间 $\mathcal{H}$ 上定义算子 $\mathcal{P}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$

$$\mathcal{P}(u_1,v,\varphi,\phi)=(u,v,\varphi,\phi),$$

且 $u(x)=u_1(x)+g(x)\varphi(\ell)$. 我们选择 $g(x)=-\frac{\beta}{\mu}x$, 那么

$$\mu u'(\ell)=\mu u_1'(\ell)-\beta\varphi(\ell).$$

于是算子 P 映 $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)=\left\{(u_1,v,\varphi,\phi)^\tau\in H^2\times H^1\times H^2\times H^1\ \middle|\ \begin{array}{l}u_1(0)=0,\varphi'(0)=0,\\ \mu u_1'(\ell)=-\eta_1 v(\ell),\\ \varphi'(\ell)=-\eta_2\phi(\ell)\end{array}\right\} \tag{4.3}$$

到 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 是双射. 则对任意的 $(u_1,v,\varphi,\phi)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}\begin{pmatrix}u_1\\ v\\ \varphi\\ \phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v-g(x)\varphi(\ell)\\ \dfrac{\mu}{\rho_0}u_1''+\dfrac{\beta}{\rho_0}\varphi'+\dfrac{\mu}{\rho_0}g''(x)\varphi(\ell)\\ \phi\\ \dfrac{\alpha}{\rho_0 K}\varphi''-\dfrac{\beta}{\rho_0 K}u_1'-\dfrac{\xi}{\rho_0 K}\varphi-\dfrac{\gamma}{\rho_0 K}\dot{\varphi}-\dfrac{\beta}{\rho_0 K}g'(x)\varphi(\ell)\end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

在空间 $\mathcal{H}$ 上定义算子 $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix}u_1\\ v\\ \varphi\\ \phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-g(x)\varphi(\ell)\\ \dfrac{\beta}{\rho_0}\varphi'+\dfrac{\mu}{\rho_0}g''(x)\varphi(\ell)\\ 0\\ -\dfrac{\beta}{\rho_0 K}u_1'-\dfrac{\xi}{\rho_0 K}\varphi-\dfrac{\gamma}{\rho_0 K}\dot{\varphi}-\dfrac{\beta}{\rho_0 K}g'(x)\varphi(\ell)\end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

则有

$$\mathcal{A}_0+\mathcal{B}=\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}, \tag{4.6}$$

易见 $\mathcal{B}$ 是有界线性算子， $\mathcal{A}_0$ 与正规算子相似. 由定理 3.4 知，算子 $\mathcal{A}_0$ 的谱是 $\mathcal{A}$ 的渐近本征值. 将 (4.6) 变形为

$$\mathcal{A}=\mathcal{P}\mathcal{A}_0\mathcal{P}^{-1}+\mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{P}^{-1},$$

由此可见， $\mathcal{A}$ 是算子 $\mathcal{P}\mathcal{A}_0\mathcal{P}^{-1}$ 的一个有界扰动.

5 算子 $\mathcal{A}$ 的 Riesz 基性质和系统的指数稳定性

本节证明谱的完整性及算子 $\mathcal{A}$ 的广义本征向量构成全空间的 Riesz 基从而说明系统的指数稳定性. 首先我们应用半群的扰动定理可以得到下面的结论.

定理 5.1 算子 $\mathcal{A}$ 生成 C_0 群，而且算子 $\mathcal{A}$ 的本征向量张成的空间在 $\mathcal{H}$ 中是稠密的，即谱是完整的．

证 由前面的结论知算子 $\mathcal{A}_0$ 在 $\mathcal{H}$ 上生成 C_0 群，且 $\mathcal{A}=\mathcal{P}\mathcal{A}_0\mathcal{P}^{-1}+\mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{P}^{-1}$, 而 $\mathcal{B}$ 是有界线性算子．由半群的扰动定理，算子 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}$ 上也生成 C_0 群．

下面证明算子 $\mathcal{A}$ 的谱的完整性，即 $\overline{Sp(\mathcal{A})}=\mathcal{H}$, 其中 $Sp(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$ 的本征向量和广义本征向量全体张成的线性子空间．对任意的 $y_0\in\mathcal{H}$, $y_0\perp\overline{Sp(\mathcal{A})}$, 因为 $R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0$ 在 $\mathcal{H}$ 上没有极点，所以 $R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0$ 在整个平面上解析，故是整函数．

由于 $\mathcal{A}$ 生成 C_0 群，则存在一个带形域 $\overline{D}=\{x;a\le x\le b,\lambda=x+it\}$, 且 $R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0$ 在区域 $\overline{D}$ 上是解析的．当 $x>b$ 或 $x<a$ 时，因为预解式是紧的，且 $||R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0||$ 是指数有界的．当 $|\Re\lambda|\to\infty$ 时， $||R^*(\lambda,\mathcal{A})||\to 0$, 故 $||R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0||$ 在 $\Re\lambda\le a$ 及 $\Re\lambda\ge b$ 上是有界的．当然在两条竖直线上， $||R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0||$ 亦有界．由复变函数的 Phragmén – Lindelöf 定理得：$||R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0||$ 在 $\overline{D}$ 上是有界的．因此 $R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0$ 在整个平面 $\mathcal{H}$ 上是有界的，即 $\exists M\ge 0$, 使得 $\| R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0 \|\le M$. 而 $R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0$ 又是整函数，由 Liouville 定理，所以 $R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0$ 是一个常值函数．因为 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\| R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0 \|=0$, 所以 $\| R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0 \|=0$, 即 $R^*(\lambda,\mathcal{A})y_0=0$. 而 $R^*(\lambda,\mathcal{A})\neq 0$, 所以 $y_0=0$, 即 $0\perp\overline{Sp(\mathcal{A})}$. 因此 $\overline{Sp(\mathcal{A})}=\mathcal{H}$, 即算子 $\mathcal{A}$ 的谱是完整的．

为了证明 $\mathcal{A}$ 的广义本征向量构成全空间的 Riesz 基，我们需要下面的结果 [14].

定理 5.2 设 X 是一个可分的 Hilbert 空间， $\mathcal{A}$ 是 C_0 半群 $T(t)$ 的母元，假设算子 $\mathcal{A}$ 满足以下条件

1) $\mathcal{A}$ 的谱可分成两部分 $\sigma(\mathcal{A})=\sigma_1(\mathcal{A})\cup\sigma_2(\mathcal{A})$, 且 $\sigma_2(\mathcal{A})=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是由孤立的有限重本征值组成；

2) 算子 $\mathcal{A}$ 本征值的代数重数一致有界，即 $\sup m_a(\lambda_k)<\infty$ $(k\ge 1)$ 其中 $m_a(\lambda_k)=\dim E(\lambda_k,\mathcal{A})X$ 表示相应于 λ_k 的代数重数；

3) 存在一条竖直线 $\Re\lambda=\alpha$ 可将算子 $\mathcal{A}$ 的谱分离开来，即

$$\sup\{\Re\lambda|\lambda\in\sigma_1(\mathcal{A})\}\le\alpha\le\inf\{\Re\lambda|\lambda\in\sigma_2(\mathcal{A})\},$$

且集 $\sigma_2(\mathcal{A})$ 具有可分离性，即

$$\inf|\lambda_n-\lambda_m|>0\ (n\neq m).$$

那么下面的结论成立

i) 存在半群 $T(t)$- 的不变闭子空间 X_1 和 X_2 具有性质

$$\sigma(\mathcal{A}|_{X_1})=\sigma_1(\mathcal{A}),\quad \sigma(\mathcal{A}|_{X_2})=\sigma_2(\mathcal{A}),$$

在子空间 X_2 上，子空间列 $\{E(\lambda_k,\mathcal{A})X_2\}_{k=1}^{\infty}$ 形成 X_2 的一个子空间 Riesz 基，此外还有

$$X=\overline{X_1\oplus X_2};$$

ii) 如果本征投影是一致有界的，即 $\sup||E(\lambda_k,\mathcal{A})||<\infty$ $(k\ge 1)$, 那么有

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset X_1\oplus X_2\subset X;$$

iii) 空间 X 有直和分解

$$X=X_1\oplus X_2$$

的充要条件是本征投影的部分和列一致有界，即 $\sup\left\|\sum_{k=1}^{n} E(\lambda_k,\mathcal{A})\right\| < \infty\ (n\geq 1)$.

定理 5.3 算子 $\mathcal{A}$ 如定义，假定 $\eta_1\neq\mu m_1$，$\eta_2\neq m_2$, 那么存在 $\mathcal{A}$ 的一列广义本征向量，它们构成全空间 $\mathcal{H}$ 的一个 Riesz 基. 从而系统是指数稳定的.

证 对于本文研究的系统，下面来验证满足定理 5.2 中的条件 1) – 3)

1) 算子 $\mathcal{A}$ 的谱由两部分组成

$$\sigma(\mathcal{A})=\sigma_1(\mathcal{A})\cup\sigma_2(\mathcal{A}),\quad \sigma_1(\mathcal{A})=\{-\infty\},\quad \sigma_2(\mathcal{A})=\{\widetilde{\lambda_{1,n}}|n\in Z\}\cup\{\widetilde{\lambda_{2,n}}|n\in Z\},$$

即 $\sigma_2(\mathcal{A})$ 由孤立的有限重的本征值组成；

2) 当 $|\lambda|$ 充分大时， $D(\lambda)=D_1(\lambda)+O(\lambda^{-1})$ 有简单零点，即除前面有限个外，系统的本征值是简单的. 所以算子 $\mathcal{A}$ 的本征值是有限重的；

3) 因为 $\sigma_1(\mathcal{A})=\{-\infty\}$, $\sigma_2(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{A})$, 且 $\eta_1\neq\mu m_1,\eta_2\neq m_2$, 则必存在常数 α 使得

$$-\infty=\sup\{\Re\lambda|\lambda\in\sigma_1(\mathcal{A})\}\leq\alpha\leq\inf\{\Re\lambda|\lambda\in\sigma_2(\mathcal{A})\}.$$

由所求得的 $\mathcal{A}$ 的谱可知： $\mathcal{A}$ 的谱是相互分离的，即

$$\inf|\lambda_n-\lambda_m|>0,\quad n\neq m.$$

利用定理 5.2 得结论：在子空间 X_2 上，子空间列 $\{E(\lambda_k,\mathcal{A})X_2;k\in Z\}$ 构成 X_2 的一个 Riesz 基.

又由 $\mathcal{A}$ 的谱的完整性， $X_1=\{0\}$, $\overline{X_2}=X$, 从而 $\{E(\lambda_k,\mathcal{A})X_2;k\in Z\}$ 构成全空间 $\mathcal{H}$ 的一个 Riesz 基. 因此系统 (2.4) 满足谱确定增长条件.

由前面所得结论可知，算子 $\mathcal{A}$ 的谱 $\sigma(\mathcal{A})$ 有两条渐近线，即

$$\Re\lambda=\frac{1}{2m_1\ell}\ln\left|\frac{\eta_1-\mu m_1}{\eta_1+\mu m_1}\right|,\quad \Re\lambda=-\frac{\gamma}{2\alpha m_2^2}+\frac{1}{2m_2\ell}\ln\left|\frac{m_2-\eta_2}{m_2+\eta_2}\right|.$$

又虚轴上没有 $\mathcal{A}$ 的谱点，因此我们可得系统是指数稳定的.

参 考 文 献

[1] Cowin S C and Nunziato J W. Linear elastic materials with voids. *J. Elasticity*, 1983, **13**: 125–147.

[2] Nunziato W and Cowin S C. A nonlinear theory of elastic matericals with voids. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1979, **72**: 175–201.

[3] Cowin S C. The viscoelastic behavior of linear elastic matericals with viods. *J. Elasticity*, 1985, **15**: 185–191.

[4] Ciarletta M and Iesan D. Non-Classical Elastic Solids. New York: Pitman Research Notes in Mathematics Series 293, 1993.

[5] Quintanilla R. Slow dacay for one-dimensional Porous dissipation elasticity. *Appl. Math. Letters*, 2003, **16** : 487–491.

[6] Xu G Q and Feng D X. Riesz basis property of a Timoshenko beam with boundary feedback and application. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2002 , **67**: 357–370.

[7] Xu G Q and Yung S P. Stabilization of Timoshenko beam by means of pointwise controls. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2003, **9**: 579–600 (electronic).

[8] Xu G Q, Feng D X and Yung S P. Riesz basis property of the generalized eigenvector system of a Timoshenko beam. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2004, **21**: 65–83.

[9] Shubov M A. Asymptotic and spectral analysis of the spatially nonhomogeneous Timoshenko beam model. *Math. Nachr.*, 2002, **241**: 125–162.

[10] Vu QuocPhong, Wang Junmin, Xu Genqi and Yung Siu-Pang. Spectral analysis and system of fundamental solutions for Timoshenko beams. *Applied Mathematics Letter*, 2005, **18**(2): 127–134.

[11] Mennicken R and Möller M. Non-self-adjoint Boundary Eigenvalue Probelm. (Ed. Jan Van Mill), Mathematics Studies 192, Elsevier Science B. V., 2003.

[12] Pazy A. Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer, 1983.

[13] Yu I, Lyubich and Phóng V Q. Asymptotic stability of linear differential equations in banach spaces. *Studia Math.*, 1988, **88**: 34–37.

[14] Xu G Q and Yung S P. The expansion of a semigroup and a Riesz basis criterion. *Journal of Differentail Equations*, 2005, **210**: 1–24.

EXPONENTIAL STABILITY OF A SYSTEM OF LINEAR TIMOSHENKO TYPE WITH BOUNDARY CONTROLS

DU Yan XU Genqi

(*Department of Mathematics, Tianjin University, Tianjin* 300072)

Abstract In the present paper the stabilization problem of porous elastic solids is considered. The kinetic behavior of porous solids is governed by equations of linear Timoshenko type which is generally asymptotically stable but not exponentially stable. For the exponential stability, boundary velocity feedback controls are applied with one end clamped and the other free. Firstly, it is shown that the operator determined by the system is dissipative and generates a C_0 semigroup. Hence the well-posed-ness of the system follows from the semigroup theory of bounded linear operators. Secondly, the asymptotic behavior of eigenvalues of $\mathcal{A}$ is obtained under certain condition. Moreover by using an auxiliary operator $\mathcal{A}_0$, and by means of spectral properties of $\mathcal{A}_0$, it is proven that there is a sequence of generalized eigenvectors of $\mathcal{A}$ which forms a Riesz basis for Hilbert state space. Finally, the exponential stability of the closed loop system is given by use of the Riesz basis property and spectral distribution of $\mathcal{A}$.

Key words Linear Timoshenko type system, boundary feedback control, Riesz basis, exponential stability.