

向量优化问题有效解的稳定性*

胡 明

(江苏科技大学数理学院, 镇江 212003)

向 淑 文

(贵州大学理学院, 贵阳 550025)

摘要 运用标量化的方法, 通过锥正定真有效解的上半连续性讨论了无限维赋范空间中锥有效解的部分上半连续性, 证明了锥有效解的通有稳定性. 在此基础上, 进一步证明, 在 Baire 纲的意义下, 绝大多数的向量优化问题至少存在一个锥正定真有效解是本质的有效解, 换句话说, 绝大多数的向量优化问题锥有效解是几乎下半连续的.

关键词 向量优化, 锥正定真有效解, 有效解, 上半连续性, 通有稳定性.

MR(2000) 主题分类号 49K10, 90C29

1 引 言

在向量优化问题中, 解的稳定性和良定性的结果具有十分重要的意义, 虽然这一方面的研究结果较之一般的标量优化的结果要少得多, 但是, 近年来仍然涌现了不少的结果 (参见文献 [1–9]).

本质解方法在解的稳定性的研究中有着重要的应用, 包括映射不动点、最优化问题的解及对策问题的 Nash 平衡的稳定性等 (参见文 [7–13]). 在文 [9] 中, Yu 证明了在向量优化问题中的弱有效解集的上半连续性和通有下半连续性. 同时指出, 在 Baire 纲的意义下绝大多数的向量优化问题是本质的 (稳定的). 这也就是说, 他们的弱有效解都是本质的. 我们知道在向量优化问题中有效解并不像人们所期望的那样具有和弱有效解同样好的性质. 例如, 有效解集并不总是上半连续的. 因此, 我们不能按照弱有效解的方法直接导出有效解集的通有稳定性. 事实上, 有效解的有关性质要比弱有效解复杂的多.

另外, 加权及标量化方法已经被广泛地运用于向量优化问题的研究. 在文 [7] 中, 作者曾给出了向量优化问题中加权解的一些稳定性结果. 在本文中, 我们将运用标量化的方法讨论锥有效解的通有稳定性. 虽然, 锥有效解集不一定具有上半连续性, 但我们将通过给出锥正定真有效解的上半连续性, 证明赋范空间中锥有效解的部分上半连续性, 以此为基础, 我们将进一步证明, 在 Baire 纲的意义下, 绝大多数的向量优化问题至少有一个本质锥有效

* 国家自然科学基金 (10561003) 资助课题.

收稿日期: 2006-03-27, 收到修改稿日期: 2007-04-04.

解. 更准确的说, 至少存在一个锥正定真有效解是本质的有效解, 换句话说, 绝大多数的向量优化问题锥有效解是几乎下半连续的.

2 预备知识

在本文中, X 为度量空间的一个非空紧集, $\widehat{C}(X, H)$ 为从 X 到 Banach 空间 H 的所有连续向量值函数的集合. 为了研究问题方便, 我们假定 $\widehat{C}(X, H)$ 使用 H 中通常意义下的范数 $\|\cdot\|$, 并定义 $\widehat{C}(X, H)$ 中的一致收敛范数为

$$\|f - g\| = \max_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|.$$

这样, 关于 X 和 $f \in \widehat{C}(X, H)$ 广义向量优化问题就可以按如下定义写为

$$(VP) \quad \min_{x \in X} f(x).$$

定义 2.1^[2] 设 E 是实拓扑向量空间. E 的一个子集 C 称为一个锥, 是指对于任给的 $c \in C$ 和每一个非负实数 $t \in R$, 都有 $tc \in C$. 锥 C 称为凸的, 是指对于任给的 $c, d \in C$, 集合 $[c, d] = tc + (1-t)d : 0 \leq t \leq 1$ 也在 C 中. 进一步, E 中的凸锥 C 称为尖锥, 是指 $l(C) = C \cap -C = 0$.

定义 2.2^[2] 设 $f \in \widehat{C}(X, H)$, 并在 H 上由闭凸尖锥 C 定义了偏序 \geq . 那么 $x^* \in X$ 称为 f 关于锥 C 的一个有效解, 如果对所有的 y , 若 $f(x^*) - f(y) \in C$, 则必有 $f(y) = f(x^*)$.

记 $S(f)$ 为 f 的所有有效解的集合, f 的所有有效点的全体记为

$$\text{Min}(f) = \{f(x^*) : x^* \in S(f)\}.$$

这样 S 就是从 $\widehat{C}(X, H)$ 到 2^X 的一个集值映射, 我们称之为 $\widehat{C}(X, H)$ 上的锥有效解映射. 向量优化问题的一个很重要的方面就是研究有效解映射 S 的连续性或稳定性.

定义 2.3^[2] 设 $f \in \widehat{C}(X, H)$, 并在 H 上由闭凸尖锥 C 定义了偏序 \geq . 假设锥 C 的内部 $\text{int}C$ 非空, 那么 $\hat{x} \in X$ 称为 f 关于锥 C 的一个弱有效解, 如果不存在 y , 使得 $f(\hat{x}) - f(y) \in \text{int}C$.

设 H 是一个 Banach 空间, 则记 H 上所有有界线性泛函所组成的对偶空间为 H^* , 定义其上的范数为

$$\|p\| = \sup_{z \in X, z \neq 0} \frac{|p(z)|}{\|z\|} = \sup_{z \in X, \|z\|=1} |p(z)|.$$

设 C^* 是 C 的对偶锥, C^{*+} 是 C 的严格对偶锥, 即

$$C^* = \{p \in H^* : p(x) \geq 0, \forall x \in C\}, \quad C^{*+} = \{p \in C^* : p(x) \geq 0, \forall x \in C, \text{ 且 } x \neq 0\}.$$

对任意的 $p \in C^*$, $f(x) \in \widehat{C}(X, H)$, 令

$$F_{(f,p)}(x) = p \circ f(x), \quad \forall x \in X.$$

定义 2.4^[14] 设 $f \in \widehat{C}(X, H)$, 并在 H 上由闭凸尖锥 C 定义了偏序 \geq . 如果

$$F_{(f,p)}(x^*) = \min_{x \in X} F_{(f,p)}(x) = \min_{x \in X} p \circ f(x),$$

那么 $x^* \in X$ 称为 f 关于 $p \in C^{*+}$ 的一个锥正定真有效解.

记 $T(f, p)$ 为 f 关于 $p \in C^{*+}$ 的所有锥正定真有效解的全体, 则 $T(f, p) \neq \emptyset$, 并且 T 是一个从 $\widehat{C}(X, H)$ 到 2^X 的一个集值映射.

定义 2.5^[15] 设 Y 是一个 Hausdorff 拓扑空间, $F : Y \rightarrow 2^X$ 是一个集值映射. 那么

1) 如果对于 X 中的每一个开集 G , $G \supset F(y)$, 存在 y 的一个开邻域 $O(y)$, 使得对于任意的 $y' \in O(y)$, 都有 $G \supset F(y')$, 则称 F 在 $y \in Y$ 处是上半连续的 (u.s.c.);

2) 如果 F 在 Y 上是上半连续的并且对于任给的 $y \in Y$, $F(y)$ 是紧集, 则称 F 是一个上半连续紧 (u.s.c.o.) 映射;

3) 如果对于 X 中的每一个开集 G , $G \cap F(y) \neq \emptyset$, 存在 y 的一个开邻域 $O(y)$, 使得对于任意的 $y' \in O(y)$, 都有 $G \cap F(y') \neq \emptyset$, 则称 F 在 $y \in Y$ 处是下半连续的 (l.s.c.);

4) 如果存在 $x \in F(y)$ 使得对于 x 的每一个开邻域 $N(x)$, 存在 y 的一个开邻域 $O(y)$, 使得对于任意的 $y' \in O(y)$, 都有 $N(x) \cap F(y') \neq \emptyset$, 则称 F 在 $y \in Y$ 处是几乎下半连续的 (a.l.s.c.).

我们给出如下定义.

定义 2.6 对于每一个 $f \in \widehat{C}(X, H)$, $x^* \in S(f)$ (或 $x^* \in T(f, p)$), 如果对于 x^* 在 X 中的每一个开邻域 $N(x^*)$, 都存在 f 在 $\widehat{C}(X, H)$ 中的一个开邻域 $O(f)$, 使得对于任意的 $f' \in O(f)$, 都有 $N(x^*) \cap S(f') \neq \emptyset$ (或 $N(x^*) \cap T(f', p) \neq \emptyset$), 则 x^* 称为 f 的一个本质锥有效解 (或本质锥正定真有效解). 进而, f 称为 E - 本质或者 E - 稳定 (或 PT - 本质或者 PT - 稳定), 是指 f 所有的锥有效解 (或锥正定真有效解) 都是本质的.

注 2.1 最优化问题的解 x^* 称为本质的, 是指每一个充分接近 f 的目标函数都有一个解任意接近 x^* .

定义 2.7 对于每一个 $f \in \widehat{C}(X, H)$, 设 $e(f)$ 是 $S(f)$ 的一个非空闭子集. 如果对任意开集 $U \supset e(f)$, 在 $\widehat{C}(X, H)$ 都存在 f 的一个开邻域 $O(f)$, 使得对任意的 $f' \in O(f)$, 都有 $U \cap S(f') \neq \emptyset$, 那么 $e(f)$ 称为 f 的本质解集.

注 2.2 如果 $e(f) = \{x^*\}$ 是一个单点集, 则 x^* 是 f 的一个本质解.

由定义 2.4, 易知有下面的结果.

引理 2.1 设 $f \in S(f)$, 则

1) f 是 E - 本质的 (或 PT - 本质的), 当且仅当集值映射 $S : \widehat{C}(X, H) \rightarrow 2^X$ (或 $T(\cdot, p) : \widehat{C}(X, H) \rightarrow 2^X$) 在 $\widehat{C}(X, H)$ 上是 l.s.c. 的;

2) 存在有效解 $x^* \in S(f)$ (或 $x^* \in T(\cdot, p)$), 当且仅当集值映射 $S : \widehat{C}(X, H) \rightarrow 2^X$ (或 $T(\cdot, p) : \widehat{C}(X, H) \rightarrow 2^X$) 在 $\widehat{C}(X, H)$ 上是 a.l.s.c. 的.

引理 2.2 (见文 [10] 中定理 2) 设 X 是一个度量空间, Y 是一个 Baire 纲空间, $F : Y \rightarrow 2^X$ 是一个 u.s.c.o. 映射. 则存在 Y 的一个稠密剩余子集 Q' , 使得 F 在 Q' 上是 l.s.c.

3 锥正定真有效解的上半连续性

定义 3.1^[2] 设 K 为 H 上的闭凸尖锥, $B \subset K$ 是凸集. 若 $0 \notin \text{cl}(B)$ 且

$$C = U\{\lambda b | \lambda \geq 0, b \in B\},$$

则称 B 是 K 的一个基. 若基 B 有界, 则称 K 具有有界基.

引理 3.1 $C^{*+} \neq \emptyset$ 当且仅当 K 有基 B . 进一步, 若 B 是弱紧凸集, 则 C^{*+} 和 $\text{int}C^*$ 非空且 $C^{*+} = \text{int}C^*$.

证 由文 [2] 中的命题 2.1 直接推得.

我们在有限维空间中有下面的例子.

例 3.1 在 Euclid 空间 $R^n (n \geq 2)$ 中, 记

$$B = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\},$$

易知, B 是 R^n 中的一个闭凸子集, 则 R^n 空间中的第一象限所形成的闭凸尖锥可以 B 为基生成, 即 $C = \lambda B$.

引理 3.2 对于每一个 $f \in \widehat{C}(X, H)$ 及给定的 $p \in C^{*+}$, 若 $x^* \in T(f, p)$, 则 $x^* \in S(f)$, 即 $T(f, p) \subset S(f)$.

证 用反证法. 假设 $x^* \notin S(f)$, 则存在 $y \in X$, 使得 $f(x^*) - f(y) \in C$, 但 $f(y) \neq f(x^*)$.

又 $p \in C^{*+}$, 且 $f(x^*) - f(y) \neq 0$, 则 $p \circ (f(x^*) - f(y)) > 0$, 即 $p \circ f(x^*) > p \circ f(y)$. 这与 $x^* \in T(f, p)$ 矛盾, 故 $x^* \in S(f)$.

定理 3.1 对于给定的 $p \in C^{*+}$, $T(\cdot, p) : \widehat{C}(X, H) \rightarrow 2^X$ 在 $\widehat{C}(X, H)$ 上是一个 u.s.c.o. 映射.

证 我们先来证明 $T(\cdot, p)$ 是紧集.

首先, 易知 $F_{(f,p)}$ 是连续的. 事实上, 由于 $f(x)$ 连续, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$ 及某个 $x_0 \in X$, 都存在某个 $\delta > 0$, 使得对任意的 $x \in X$, $\|x - x_0\| < \delta$, 都有 $\|f(x) - f(x_0)\| < \delta$. 又若 $p \in C^{*+}$, 则存在自然数 M , 使得 $\|p\| < M$. 那么, 我们有

$$\|p \circ f(x) - p \circ f(x_0)\| \leq \|p\| \cdot \|f(x) - f(x_0)\| < \|p\| \cdot \varepsilon.$$

其次, 由于 X 是紧集, 则我们只需证明 $F_{(f,p)}$ 是闭集. 即对 $F_{(f,p)}$ 中的每一个序列 $\{x_n\}, x_n \rightarrow x^*, n = 1, 2, \dots$, 我们都有 $x^* \in F_{(f,p)}$. 事实上, 由于 $F_{(f,p)}$ 的连续性, 对于任给的 $\varepsilon > 0$ 及自然数 N , 当 $n > N$, 总有

$$\|F_{(f,p)}(x_n) - F_{(f,p)}(x^*)\| < \varepsilon,$$

考虑到 $F_{(f,p)}(x_n) = \min_{x \in X} F_{(f,p)}(x)$, 我们有

$$\left\| \min_{x \in X} F_{(f,p)}(x) - F_{(f,p)}(x^*) \right\| < \varepsilon,$$

又由于 ε 的任意性, $\min_{x \in X} F_{(f,p)}(x) = F_{(f,p)}(x^*)$. 这也就是说 $x^* \in F_{(f,p)}$, 即 $F_{(f,p)}$ 是闭集. 因此 $T(\cdot, p)$ 是紧集.

进而, 我们来证明 $T(\cdot, p)$ 是 u.s.c. 的. 假设 $T(\cdot, p)$ 在 $f \in \widehat{C}(X, H)$ 处不上半连续, 则存在开集 $U \subset X, U \supset T(f, p)$, 和序列 $\{f^n\} \in C(X), f^n \rightarrow f$, 使得对每一个自然数 n , 我们都能找到一个 $x_n \in T(f^n, p)$, 满足 $x_n \notin U$. 又由于 X 是紧集及 $\{x_n\} \in X$, 不失一般性我们假设 $x_n \rightarrow x_0$. 这样, 由 $x_n \notin U$ 我们可得到 $x_0 \notin U$ 及 $x_0 \notin T(f, p)$. 那么存在某个 $x' \in X$, 使得

$$F_{(f,p)}(x') - F_{(f,p)}(x_0) < 0.$$

因此, 对于所有的 $x \in X$, 都有

$$\begin{aligned}
F_{(f^n, p)}(x') - F_{(f^n, p)}(x) &= F_{(f^n, p)}(x') - F_{(f, p)}(x') + F_{(f, p)}(x') - F_{(f, p)}(x_0) \\
&\quad + F_{(f, p)}(x_0) - F_{(f, p)}(x) + F_{(f, p)}(x) - F_{(f^n, p)}(x) \\
&= p \circ (f^n(x') - f(x')) + F_{(f, p)}(x') - F_{(f, p)}(x_0) \\
&\quad + F_{(f, p)}(x_0) - F_{(f, p)}(x) + p \circ (f(x) - f^n(x)) \\
&\leq \|p\| \cdot \|f^n(x') - f(x')\| + F_{(f, p)}(x') - F_{(f, p)}(x_0) \\
&\quad + F_{(f, p)}(x_0) - F_{(f, p)}(x) + \|p\| \cdot \|f(x) - f^n(x)\| \\
&\leq 2\|p\| \cdot \|f^n - f\| + F_{(f, p)}(x') - F_{(f, p)}(x_0) \\
&\quad + F_{(f, p)}(x_0) - F_{(f, p)}(x).
\end{aligned}$$

由于 $f^n \rightarrow f$ 并且 $F_{(f, p)}$ 在 x_0 点连续, 故 $\|f_i^n - f_i\| \rightarrow 0$ 且当 x 充分接近 x_0 时, $F_{(f, p)}(x) - F_{(f, p)}(x_0)$ 任意接近 0. 因此, 存在 x_0 的某个开邻域 $O(x_0)$ 及自然数 n_1 , 使得对所有的 $x \in O(x_0)$ 及自然数 $n \geq n_1$, 都有

$$F_{(f^n, p)}(x') - F_{(f^n, p)}(x),$$

进而, 由于 $x^n \rightarrow x_0$, 存在自然数 $n_2 \geq n_1$ 使得 $x_{n_2} \in O(x_0)$, 则

$$F_{(f^{n_2}, p)}(x') < F_{(f^{n_2}, p)}(x_{n_2}),$$

因此 $x_{n_2} \notin T(f^{n_2}, p)$, 这与假设中对所有的自然数 n , 都有 $x_n \in T(f^n, p)$ 矛盾. 因此, $T(\cdot, p)$ 在 $f \in \widehat{C}(X, H)$ 处上半连续. 从而, $T(\cdot, p) : \widehat{C}(X, H) \rightarrow 2^X$ 在 $\widehat{C}(X, H)$ 上是一个 u.s.c.o. 映射.

4 锥有效解的通有稳定性

我们指出并不是所有的锥有效解映射都是上半连续的, 同时并不是所有的锥有效解映射都是下半连续的. 下面举例说明.

例 4.1 设 $X = [0, 1] \times [0, 1]$, 并记 $C_2(X)$ 为从 X 到 R^2 的所有连续函数的集合, $C = R_+^2$. 定义函数 $f, f_n : X \rightarrow R^2$ 如下

$$f(x, y) = (x, y),$$

$$f_n(x, y) = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)x - \frac{1}{n}y, y \right), \quad \forall (x, y) \in X.$$

则 f, f_n 都是凸函数, 并且当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $f^n \rightarrow f$. 在这样情形下, 我们有

$$\text{Min}(f) = \{(0, 0)\}, \quad S(f) = \{(0, 0)\},$$

$$\text{Min}(f_n) = \left\{ \left(-\frac{1}{n}y, y \right) : y \in [0, 1] \right\}, \quad S(f_n) = \{(0, y) : y \in [0, 1]\},$$

易知 S 在 f 不上半连续 (如图 1,2).

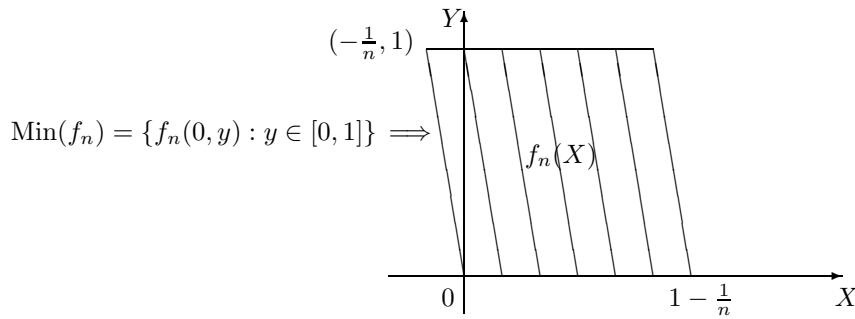


图 1

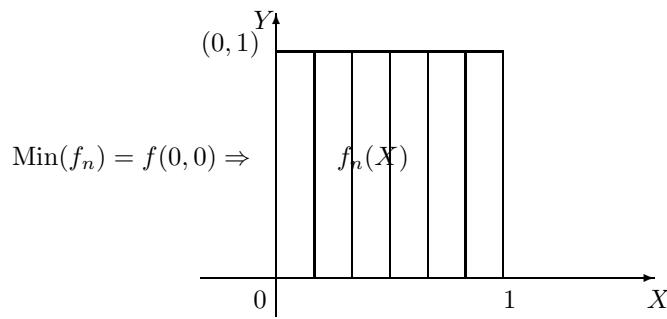


图 2

例 4.2 我们来考虑标量优化的一种特殊情形. 设 $X = [0, 1]$, 并记 $C_1(X)$ 为从 X 到 R 的所有连续函数的集合. 定义函数 $f, f_n : X \rightarrow R$ 如下

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 1, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right); \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \\ 4x - 3, & x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} -4x + 1, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right); \\ \frac{1}{n}x - \frac{1}{4n}, & x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{12n-1}{16n-4}\right); \\ 4x - 3, & x \in \left[\frac{12n-1}{16n-4}, 1\right]. \end{cases}$$

则 f, f_n 都是凸函数, 并且当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $f_n \rightarrow f$. 在这样情形下, 我们有

$$\text{Min}(f) = \{0\}, \quad S(f) = \left[\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right],$$

$$\text{Min}(f_n) = \{0\}, \quad S(f_n) = \left\{\frac{1}{4}\right\};$$

易知 S 在 f 不是下半连续的. 事实上, 在锥有效解集 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 中 $x = \frac{1}{4}$ 是唯一的本质解.

由定义 2.4 和定理 3.1, 我们有下面的结论.

定理 4.1 设 $S : \widehat{C}(X, H) \rightarrow 2^X$ 是锥有效解映射. 则

1) 存在一个 u.s.c.o. 映射 $S_0 : \widehat{C}(X, H) \rightarrow 2^X$, 使得对每一个 $f \in \widehat{C}(X, H)$ 都有 $S_0(f) \subset S(f)$. 此时, 我们说 S 具有部分上半连续性;

2) 对每一个 $f \in \widehat{C}(X, H)$ 及给定的 $p \in C^{*+}$, 锥正定真有效解的集合 $T(f, p)$ 是 f 的本质锥有效解集.

证 1) 对于给定的 $p \in C^{*+}$, 设 $S_0(f) = T(f, p)$, 任给 $f \in \widehat{C}(X, H)$. 注意到 $T(\cdot, p)$ 是 $\widehat{C}(X, H)$ 的 u.s.c.o. 映射, 则结论 1) 是引理 3.2 和定理 3.1 的直接结果.

2) 由引理 3.2 和定理 3.1 知, $T(\cdot, p)$ 是 $\widehat{C}(X, H)$ 的 u.s.c.o. 映射, 且对所有的 $f \in \widehat{C}(X, H)$ 都有 $T(f, p) \subset S(f)$. 则对于任意开集 $U \supset T(f, p)$, 存在 f 的某个开邻域 $O(f)$ 使得对所有的 $f' \in O(f)$ 都有 $U \supset T(f', p)$. 考虑到 $T(f', p) \subset S(f')$, 我们有 $(U \cap S(f')) \supset (U \cap T(f', p)) \neq \emptyset$. 因此 $T(f, p) \subset S(f)$ 是 f 的本质锥有效解集.

下面关于本质解的结果直接来自引理 2.1, 引理 2.2, 定理 3.1 及定理 4.1.

引理 4.1 对于给定的 $p \in C^{*+}$, 存在 $\widehat{C}(X, H)$ 中的一个稠密剩余子集 Q , 使得 $T(\cdot, p)$ 对每一个 $f \in Q$ 都是下半连续的.

证 由引理 2.2 可直接推得.

定理 4.2 存在 $\widehat{C}(X, H)$ 中的一个稠密剩余子集 Q , 使得对于每一个 $f \in Q$, 都至少存在一个 $x \in S(f)$ 使得 x 是本质锥有效解. 这也就是说, 在每一个 $f \in Q$ 上, S 都是几乎下半连续的 (a.l.s.c.).

证 对于给定的 $p \in C^{*+}$, 由引理 4.1, 存在 $\widehat{C}(X, H)$ 中的一个稠密剩余子集 Q , 使得 $T(\cdot, p)$ 在每一个 $f \in Q$ 都是下半连续的. 对每一个 $f \in Q$, 设 $x \in T(f, p) \subset S(f)$. 由于 $T(\cdot, p)$ 在 $f \in Q$ 下半连续, 故对于 x 的每一个开邻域 $N(x)$, 都存在 f 的一个开邻域 $O(f)$, 使得对所有的 $f' \in O(f)$ 都有 $N(x) \cap T(f', p) \neq \emptyset$. 为了证明 x 是一个本质锥有效解, 只需证 $N(x) \cap S(f') \neq \emptyset$. 这是显然的, 因为 $T(f', p) \subset S(f')$ 且 $N(x) \cap T(f', p) \neq \emptyset$.

定理 4.2 表明在 Baire 纲意义下, 绝大多数的向量优化问题都至少存在一个本质锥有效解.

参 考 文 献

- [1] Huang X X. Stability in vector-valued and set-valued optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2000, **52**: 185–193.
- [2] Luc D T. Theory of Vector Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1989, Berlin: Springer-Verlag, 319.
- [3] Lucchetti R E and Miglierina E. Stability for convex vector optimization problems, *Optimization*, 2004, **53**: 517–528.
- [4] Miglierina E and Molho E. Scalarization and stability in vector optimization. *J. Optimization Theory and Applications*, 2002, **114**: 657–670.

- [5] Miglierina E and Molho E. Convergence of the minimal sets in convex vector optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 2005, **15**: 513–526.
- [6] Miglierina E, Molho E and Rocca M. Well-posedness and scalarization in vector optimization. *J. Optimization Theory and Applications*, 2005, **126**: 391–409.
- [7] Xiang S W and Xiang S H. Generic stability on weight factor in multiobjective optimization problems. *Pan American Mathematics Journal*, 1997, **7**: 79–84.
- [8] Xiang S W and Zhou Y H. On essential sets and essential components of efficient solutions for vector optimization problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **315**: 317–326.
- [9] Yu J. Essential weak efficient solution in multiobjective optimization problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, **166**: 230–235.
- [10] Fort M K Jr. Points of continuity of semicontinuous functions. *Publ. Math., Debrecen*, 1951, **2**: 100–102.
- [11] Kenderov P S. Most of the optimization problems have unique solution. Proceedings Oberwolfach Conference on Parametric Optimization (Brosowski B and Deutsch Eds F.), 1984: 203–216. Birkhäuser. Basel.
- [12] Kohlberg E and Mertens J F. On the strategic stability of equilibria. *Econometrica*, 1986, **54**: 1003–1073.
- [13] Yu J and Xiang S W. On essential component of the set of nash equilibrium points. *Nonlinear Analysis*, 1999, TMA, **38**: 259–264.
- [14] Dauer J P and Gallagher R J. Positive proper efficient points and related cone results in vector optimization theory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1990, **28**: 158–172.
- [15] 李雷, 吴从忻. 集值分析. 北京: 科学出版社, 2003.

THE STABILITY OF THE EFFICIENT SOLUTIONS FOR OPTIMIZATION PROBLEMS

HU Ming

*(School of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology,
Zhenjiang 212003)*

XIANG Shuwen

(School of Science, Guizhou University, Guiyang 550025)

Abstract In terms of the method of scalar assignment, the partly upper semicontinuity of cone efficient solution in infinite dimensional normed spaces is investigated by using the upper semicontinuity of cone positive proper efficient solution, and the generic stability of cone efficient solution is proved. Then, in the sense of Baire catalogue, it is shown that for almost all optimization problems, there exists at least one cone positive proper efficient solution that is essential efficient solution. That is to say, for almost all optimization problems, a cone efficient solution is a.l.s.c..

Key words Vector optimization, cone positive proper efficient solution, efficient solution, upper semicontinuity, generic stability.