系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(3) (2009, 3), 367–377

具偏差变元的高阶泛函微分方程的周期解存在性问题*

李 晓 静
(江苏技术师范大学数理学院， 常州 213001; 安徽师范大学数学系， 芜湖 241000)

鲁 世 平
(安徽师范大学数学系， 芜湖 241000)

摘要 利用 Fourier 级数理论，伯努利数理论和重合度理论研究了一类具偏差变元的高阶泛函微分方程 $x^{(m)}(t)+\sum\limits_{i=1}^{m-1}a_ix^{(i)}(t)+f(x(t))+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))=p(t)$ 的周期解问题，得到了周期解存在的充分条件，有意义的是函数 $\beta(t)$ 可变号.

关键词 高阶泛函微分方程，重合度，周期解.

MR(2000) 主题分类号 34B15, 34K13

1 引 言

本文引入记号： $T>0$ 为常数， $Y=\{x|x\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ x(t+T)\equiv x(t)\}$, 其模定义为

$$|x|_0=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|,\quad X=\{x|x\in C^{m-1}(\mathbb{R},\mathbb{R}),x(t+T)\equiv x(t)\},$$

其模定义为 $\|x\|=\max\limits_{0\le i\le m-1}\{|x^{(i)}|_0\}$, 显然， X 和 Y 为 Banach 空间.

近年来，利用重合度理论，研究具有时滞的二阶微分方程周期解存在性问题，已有很多结果 [1−3], 主要为以下几类方程

$$\begin{aligned}&x''(t)+f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)))x'(t)+\beta(t)g(x(t-\tau_1(t)))=p(t),\\&x''(t)+f(t,x_t)x'^n+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))=p(t),\\&x''(t)+f(x(t-\sigma))x'(t-\sigma)+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))=p(t).\end{aligned}$$

* 江苏技术师范学院基金项目 (KYY08033), 安徽省自然科学基金 (050460103) 和安徽省教育厅自然科学基金重点项目 (2005kj031zd) 资助.
收稿日期：2007-02-02, 收到修改稿日期：2007-06-26.

在文献 [1–3] 中关键条件是函数 $\beta(t)$ 要定号，但在函数 $\beta(t)$ 可变号的条件下，具偏差变元的高阶泛函微分方程的周期解存在性问题的研究相对较少．在本文中，允许函数 $\beta(t)$ 可变号的条件下，我们研究泛函微分方程

$$x^{(m)}(t)+\sum_{i=1}^{m-1}a_ix^{(i)}(t)+f(x(t))+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))=p(t), \tag{1.1}$$

的周期解问题，其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数， $\beta(t),\tau(t)$ 和 $p(t)$ 均为 $\mathbb{R}$ 上的连续 T-周期函数， $a_i(i=1,2,\cdots,m-1)$ 为正常数， $m\geq 2$ 为正整数，且满足下列条件

$$(\mathrm{H}):\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0,\quad \int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t\geq 0,\quad f(c)+\beta(t)g(c)\not\equiv p(t),\quad \forall\, c\in\mathbb{R}.$$

由于函数 $\beta(t)$ 可变号，所以估计周期解先验界就有困难，故文 [1–3] 中估计周期解先验界的方法将不再适用．我们利用重合度理论得到了周期解存在的新的结果，特别是估计周期解先验界的方法与文 [1–3] 不同．

研究高阶泛函微分方程的全体周期解的各阶导数的界的估计式时，一般地，如文 [4–7]，利用微分中值定理得到如下估计式

$$|x^{(i)}|_0\leq T^{m-(i+1)}\int_0^T|x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t,\quad i=1,2,\cdots,m-1. \tag{1.2}$$

本文中我们利用 Fourier 级数理论和近世数论中的伯努利数理论研究关系式

$$|x^{(i)}|_0\leq M_i(m)\int_0^T|x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t,\quad i=1,2,\cdots,m-1, \tag{1.3}$$

其中 $M_i(m)<T^{m-(i+1)}$. 有意义的是关系式 (1.3) 在处理高阶泛函微分方程的全体周期解的各阶导数的界的估计式时比关系式 (1.2) 更为有效．最后通过例子说明本文的结果是新的．

2 主要引理

引理 2.1 设 $x\in C^m(\mathbb{R},\mathbb{R}), m\geqslant 2$, 并且存在常数 $T>0$, 使得 $x(t+T)\equiv x(t)$, 则存在与 x 无关的常数 $M_i(m)>0$, 使得

$$|x^{(i)}|_0\leq M_i(m)\int_0^T|x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t,\quad i=1,2,\cdots,m-1, \tag{2.1}$$

其中当 m 为偶数时，

$$M_i(m)=\begin{cases} M_{2s-1}(m)=T^{m-2s}\sqrt{-\dfrac{B_{2m-4s}}{12(2m-4s)!}},\quad s=1,2,\cdots,\dfrac{m}{2}-1,\\ M_{2s}(m)=\dfrac{(-1)^{\frac{m-2s}{2}+1}T^{m-2s-1}B_{m-2s}}{(m-2s)!},\quad s=1,2,\cdots,\dfrac{m}{2}-1,\\ M_{m-1}(m)=\dfrac{1}{2}.\end{cases} \tag{2.2}$$

当 m 为奇数时,

$$M_i(m)=\begin{cases} M_{2s+1}(m)=\dfrac{(-1)^{\frac{m-2s-1}{2}+1}T^{m-2s-2}B_{m-2s-1}}{(m-2s-1)!}, & s=0,1,\cdots,\dfrac{m+1}{2}-2,\\ M_{2s}(m)=T^{m-2s-1}\sqrt{-\dfrac{B_{2m-4s-2}}{12(2m-4s-2)!}}, & s=1,2,\cdots,\dfrac{m+1}{2}-2,\\ M_{m-1}(m)=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.3}$$

其中诸 $B_{m-2s},B_{2m-4s},B_{m-2s-1},B_{2m-4s-2}$ 是伯努利数，可由如下递推公式求得

$$B_0=1,\quad B_p=\frac{-\sum\limits_{i=0}^{p-1}C_{p+1}^iB_i}{p+1}, \tag{2.4}$$

这里 C_{p+1}^i 是组合数.

证　根据近世数论中的伯努利数理论 [8], 我们有

$$\sum_{k\in Z,k\neq 0}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{(2n)!}, \tag{2.5}$$

其中伯努利数 B_{2n} 由递推公式 (2.4) 求得. 因为 $x^{(m)}(t)$ 为 T- 周期函数，所以 $x^{(m)}(t)$ 的 Fourier 级数为

$$x^{(m)}(t)=\sum_{k\in Z,k\neq 0}\overline{a}_k\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{T}t}, \tag{2.6}$$

其中

$$\overline{a}_k=\frac{1}{T}\int_0^T x^{(m)}(r)\mathrm{e}^{-i\frac{2k\pi}{T}r}\mathrm{d}r, \tag{2.7}$$

于是，我们有

$$x^{(m-j)}(t)=\sum_{k\in Z,k\neq 0}\frac{\overline{a}_k}{(i\frac{2k\pi}{T})^j}\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{T}t},\quad j=1,2,\cdots,m-1. \tag{2.8}$$

当 m 为偶数时 , 由式 (2.5), (2.7), (2.8) 可得

$$\begin{aligned} |x^{(2s)}|_0 &\le \frac{T^{m-2s-1}}{(2\pi)^{m-2s}}\sum_{k\in Z,k\neq 0}\frac{1}{|k|^{m-2s}}\int_0^T|x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r\\ &= \frac{(-1)^{\frac{m-2s}{2}+1}T^{m-2s-1}B_{m-2s}}{(m-2s)!}\int_0^T|x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r\\ &:= M'_{2s}(m)\int_0^T|x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r,\quad s=1,2,\cdots,\frac{m}{2}-1, \end{aligned}$$

由式 (2.5),(2.7), (2.8) 及柯西不等式可得

$$
\begin{aligned}
|x^{(2s-1)}|_0 &\le \frac{T^{m-2s}}{(2\pi)^{m-2s+1}} \sum_{k\in Z,k\neq 0} \frac{1}{|k|^{m-2s+1}} \int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r \\
&= T^{m-2s}\sqrt{-\frac{B_{2m-4s}}{12(2m-4s)!}} \int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r \\
&:= M'_{2s-1}(m) \int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r, \quad s=1,2,\cdots,\frac{m}{2}-1,
\end{aligned}
$$

其中伯努利数 B_{m-2s}，B_{2m-4s} 由递推公式 (2.4) 求得. 我们易证 $|x^{(m-1)}|_0 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r$. 事实上，我们定义 T- 周期函数 $h(t)$ 在 $[0,T]$ 为

$$
h(t) = \begin{cases} \dfrac{T}{2}-t, & 0<t<T, \\ 0, & t=0,\ T. \end{cases}
$$

则 $h(t)$ 的 Fourier 展开式为

$$
h(t) = \sum_{k\in Z,k\neq 0} \frac{1}{\frac{2k\pi}{T}i} \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{T}t}, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.9}
$$

于是由式 (2.7)–(2.9) 可得

$$
x^{(m-1)}(t) = \frac{1}{T}\sum_{k\in Z,k\neq 0} \frac{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{T}t}}{\frac{2k\pi}{T}i} \int_0^T x^{(m)}(r)\mathrm{e}^{-i\frac{2k\pi}{T}r}\mathrm{d}r = \frac{1}{T}\int_0^T h(t-r)x^{(m)}(r)\mathrm{d}r,
$$

因而

$$
|x^{(m-1)}|_0 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r := M'_{m-1}(m)\int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r.
$$

当 m 为奇数时，类似于 m 为偶数时讨论，我们有

$$
\begin{aligned}
|x^{(2s+1)}|_0 &\leqslant \frac{(-1)^{\frac{m-2s-1}{2}+1}T^{m-2s-2}B_{m-2s-1}}{(m-2s-1)!} \int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r \\
&:= M''_{2s+1}(m)\int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r, \quad s=0,1,\cdots,\frac{m+1}{2}-2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|x^{(2s)}|_0 &\leqslant T^{m-2s-1}\sqrt{-\frac{B_{2m-4s-2}}{12(2m-4s-2)!}} \int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r, \\
&:= M''_{2s}(m)\int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r, \quad s=1,2,\cdots,\frac{m+1}{2}-2,
\end{aligned}
$$

$$
|x^{(m-1)}|_0 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r := M''_{m-1}(m)\int_0^T |x^{(m)}(r)|\mathrm{d}r,
$$

其中伯努利数 $B_{m-2s-1}, B_{2m-4s-2}$ 由递推公式 (2.4) 求得.

由上面讨论可知，不管 m 是奇数还是偶数，都存在与 x 无关的常数 $M_i(m)>0,\ i=1,2,\cdots,m-1$, 使得 (2.1) 式成立，其中，当 m 为偶数时， $M_i(m)=M_i'(m)$, 具体表达式由式 (2.2) 给出，当 m 为奇数时， $M_i(m)=M_i''(m)$, 具体表达式由式 (2.3) 给出.

为了应用 Mawhin 重合度拓展定理证明本文的定理，定义线性映射

$$L:D(L)\subset X\longrightarrow Y,\quad [Lx](t)=x^{(m)}(t),$$

其中 $D(L)=\{x|x\in C^m(\mathbb{R},\mathbb{R}),x(t+T)\equiv x(t)\}$. 易见

$$\mathrm{Ker}(L)=\mathbb{R},\quad \mathrm{Im}(L)=\Big\{x|x\in Y,\int_0^T x(s)\mathrm{d}s=0\Big\},$$

因此 L 是指标为零的 Fredholm 算子. 再定义投影算子

$$P:X\to \mathrm{Ker}(L):x\to Px=x(0),$$

$$Q:Y\to \frac{Y}{\mathrm{Im}(L)}:x\to Qx=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t,$$

显然， P,Q 为连续算子， $\mathrm{Im}(P)=\mathrm{Ker}(L)$, $\mathrm{Ker}(Q)=\mathrm{Im}(L)$. 令 $L_P=L|_{D(L)\cap\mathrm{Ker}(P)}:D(L)\cap\mathrm{Ker}(P)\to\mathrm{Im}(L)$, 则 $L_P^{-1}:\mathrm{Im}(L)\to D(L)\cap\mathrm{Ker}(P)$,

$$[L_P^{-1}y](t)=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i!}x^{(i)}(0)t^i+\frac{1}{(m-1)!}\int_0^t(t-s)^{m-1}y(s)\mathrm{d}s, \tag{2.10}$$

其中 $x^{(i)}(0)\ \ (i=1,2,\cdots,m-1)$ 由 $\overline{A}\ \overline{X}=\overline{D}$ 确定，这里

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\ c_1&1&0&\cdots&0&0\\ c_2&c_1&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ c_{m-3}&c_{m-4}&c_{m-5}&\cdots&1&0\\ c_{m-2}&c_{m-3}&c_{m-4}&\cdots&c_1&1\end{pmatrix},$$

$\overline{X}=(x^{(m-1)}(0),x^{(m-2)}(0),\cdots,x''(0),x'(0))^{\mathrm{T}},\overline{D}=(d_1,d_2,\cdots,d_{m-2},d_{m-1})^{\mathrm{T}},\ d_i=-\frac{1}{i!T}\int_0^T(T-s)^iy(s)\mathrm{d}s,\ i=1,2,\cdots,m-1,\ c_j=\frac{T^j}{(j+1)!},\ j=1,2,\cdots,m-2.$

引理 2.2(Mawhin 重合度拓展定理)[9]　设 X,Y 是 Banach 空间， $L:D(L)\subset X\to Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子， $\Omega\subset X$ 是有界开集，且 $N:\overline{\Omega}\to Y$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L- 紧的，如果

1) $Lx\neq\lambda Nx,\forall x\in\partial\Omega\cap D(L),\forall\lambda\in(0,1)$;

2) $QNx\neq 0,\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}(L)$;

3) $\deg\{QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}(L),0\}\neq 0$,

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\overline{\Omega}$ 中至少存在一个解.

3　主要结果

定理 3.1　设条件 (H) 成立且 $m=2k-1,k\in Z^+$, 如果存在常数 $A>0,M>0$, 满足

1) 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 有 $|f(x)| \geq |x|$ 且 $|g(x)| \leq M$;

2) 当 $|x| > A, t \in \mathbb{R}$ 时， $xf(x) > 0$ 且 $xg(x) > 0$;

3) $1 - \sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{2(k-i)-1} T^2 M_{k-i}^2(k) > 0$;

4) $1 - \sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{2(k-i)-1} T^2 M_{2k-i-1}^2(m) > 0$,

则方程 (1.1) 至少存在一个 T- 周期解.

证　先讨论方程

$$x^{(m)}(t) + \lambda \sum_{i=1}^{m-1} a_i x^{(i)}(t) + \lambda f(x(t)) + \lambda \beta(t) g(x(t-\tau(t))) = \lambda p(t), \quad \lambda \in (0,1) \tag{3.1}$$

的周期解先验界.

设 $x(t) \in X$ 为方程 (3.1) 的任一周期解，将 $x(t)$ 代入方程 (3.1) 并对其两端在区间 $[0,T]$ 上积分，经整理易得

$$\int_0^T f(x(t))\mathrm{d}t + \int_0^T \beta(t) g(x(t-\tau(t)))\mathrm{d}t = 0.$$

由积分中值定理可得存在 $\xi \in [0,T]$ 使得 $f(x(\xi)) + \beta(\xi) g(x(\xi - \tau(\xi))) = 0$. 由题设条件 1) 可知 $|x(\xi)| \leq |f(x(\xi))| = |\beta(\xi)||g(x(\xi-\tau(\xi)))| \leq |\beta|_0 M$. 从而任意 $t \in [0,T]$ 有 $x(t) = x(\xi) + \int_\xi^t x'(s)\mathrm{d}s$, 所以

$$|x|_0 \leq |\beta|_0 M + \int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

另一方面，将方程 (3.1) 两边同乘以 $x'(t)$, 然后从 0 到 T 积分可得

$$\begin{aligned}&(-1)^{k-1} \int_0^T |x^{(k)}(t)|^2\mathrm{d}t + \lambda \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i-1} a_{2(k-i)-1} \int_0^T |x^{(k-i)}(t)|^2\mathrm{d}t \\ &+\lambda \int_0^T \beta(t) g(x(t-\tau(t))) x'(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_0^T p(t) x'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由引理 2.1 可知存在与 λ, x 无关的常数 $M_i(k) > 0$ 使得

$$|x^{(i)}|_0 \leq M_i(k) \int_0^T |x^{(k)}(t)|\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

其中，当 $i = k$ 时， $M_i(k) = \frac{1}{T}$, 当 $i < k$ 时， $M_i(k)$ 由引理 2.1 所定义，由式 (3.2), (3.3) 及 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} a_{2(k-i)-1} T^2 M_{k-i}^2(k)\right) \int_0^T |x^{(k)}(t)|^2\mathrm{d}t \\ &\leq (|\beta|_0 M + |p|_0) M_1(k) T^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^T |x^{(k)}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

根据题设条件 3) 可知存在与 λ, x 无关的常数 $K_0>0$ 使得

$$\int_0^T |x^{(k)}(t)|^2\mathrm{d}t<K_0, \tag{3.4}$$

由式 (3.2), (3.3), (3.4) 可知存在与 λ, x 无关的常数 ω_0,ω_1 使得 $|x|_0<\omega_0$, $|x'|_0<\omega_1$. 现在我们估计 $|x^{(i)}|_0(i=2,3,\cdots,m-1)$, 由引理 2.1 可知存在与 λ , x 无关的常数 $M_i(m)>0$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$ 使得

$$|x^{(i)}|_0\le M_i(m)\int_0^T|x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

将方程 (3.1) 两边同乘以 $x^{(m)}(t)$, 然后从 0 到 T 积分，应用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\Big(1-\sum_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)-1}T^2M^2_{2k-i-1}(m)\Big)\int_0^T|x^{(m)}(t)|^2\mathrm{d}t\\ \le{}&(f_{\omega_0}+|\beta|_0M+|p|_0)\sqrt{T}\Big(\int_0^T|x^{(m)}(t)|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中 $f_{\omega_0}=\max\limits_{|x|\le\omega_0}|f(x)|$, 根据题设条件 4) 可知存在与 λ, x 无关的常数 $M_0>0$ 使得

$$\textstyle\int_0^T|x^{(m)}(t)|^2\mathrm{d}t<M_0. \tag{3.6}$$

由式 (3.5)–(3.6) 可知存在与 λ, x 无关的常数 $\omega_i>0$ $(i=2,3,\cdots,m-1)$ 使得

$$|x^{(i)}|_0\le M_i(m)\int_0^T|x^{(m)}(t)|\mathrm{d}t<M_i(m)\sqrt{TM_0}:=\omega_i,\quad i=2,3,\cdots,m-1.$$

令 $\omega=\max\{\omega_0+1,\omega_1+1,\cdots,\omega_{m-1}+1,A+1\}$ 则 $\omega>A$, 且

$$|x^{(i)}|_0<\omega,\quad i=0,1,2,\cdots,m-1.$$

取 $\varOmega=\{x\in X||x^{(i)}|_0<\omega,\ i=0,1,2,\cdots,m-1\}$, 则 $\varOmega$ 是 X 中的有界开集, 且 $\mathrm{Ker}(L)\cap\varOmega\ne\varnothing$.

定义非线性算子 $N:\overline{\varOmega}\to Y$

$$x\to[Nx](t)=-\Big[\sum_{i=1}^{m-1}a_ix^{(i)}(t)+f(x(t))+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))\Big]+p(t),$$

则 N 连续，且由式 (2.10) 可知 N 在 $\overline{\varOmega}$ 上是 L- 紧的.

由上边的讨论及 $\varOmega$ 的构造可知，$\forall\lambda\in(0,1),\forall x\in\mathrm{Dom}(L)\cap\partial\varOmega$, 有 $Lx\ne\lambda Nx$, 从而引理 2.2 的条件 1) 满足.

对任意的 $x\in\mathrm{Ker}(L)\bigcap\partial\varOmega$ 时，x 为常数且 $|x|=\omega>A$, 故

$$QNx=-\frac{1}{T}\int_0^Tf(x(t))\mathrm{d}t-\frac{1}{T}\int_0^T\beta(t)g(x(t-\tau(t)))\mathrm{d}t\ne0.$$

从而引理 2.2 条件 2) 成立.

作变换

$$H(x,\mu)=-\mu x+(1-\mu)QNx,\quad (x,\mu)\in\overline{\Omega}\times[0,1],$$

$\forall x\in \mathrm{Ker}(L)\bigcap\partial\Omega$ 及 $\mu\in[0,1]$ 有

$$xH(x,\mu)=-\mu x^2-(1-\mu)\left[\frac{1}{T}\int_0^T xf(x)\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_0^T\beta(t)xg(x)\mathrm{d}t\right]<0,$$

故 $H(x,\mu)\neq 0$, 即 $H(x,\mu)$ 为同伦，所以由同伦性质可得

$$\deg\{QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}=\deg\{H(x,0),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}=\deg\{H(x,1),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0.$$

从而引理 2.2 条件 3) 成立.

综上可知， Mawhin 引理的条件全部满足，故方程 (1.1) 在定理 3.1 的条件下至少存在一个 T- 周期解.

推论 3.1 设条件 (H) 成立且 $m=2k-1,k\in Z^+$, 如果存在常数 $A>0,M>0$, 满足

1) 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 有 $|f(x)|\geq|x|$ 且 $|g(x)|\leq M$;

2) 当 $|x|>A,t\in\mathbb{R}$ 时， $xf(x)<0$ 且 $xg(x)<0$;

3) $1-\sum\limits_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)-1}T^2M^2_{k-i}(k)>0$;

4) $1-\sum\limits_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)-1}T^2M^2_{2k-i-1}(m)>0$,

则方程 (1.1) 至少存在一个 T- 周期解.

定理 3.2 设条件 (H) 成立且 $m=2k,k\in Z^+$, 且 $k-1$ 为偶数，如果存在常数 $A>0,M>0$, 满足

1) 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 有 $|f(x)|\geq|x|$ 且 $|g(x)|\leq M$;

2) 当 $|x|>A,t\in\mathbb{R}$ 时， $xf(x)<0$ 且 $xg(x)<0$;

3) 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 有 $f'(x)<0$;

4) $1-\sum\limits_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)}T^2M^2_{k-i+1}(k+1)>0$;

5) $1-\sum\limits_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)}T^2M^2_{2k-i}(m)>0$,

则方程 (1.1) 至少存在一个 T- 周期解.

证 将方程 (3.1) 两边同乘以 $x''(t)$, 然后从 0 到 T 积分可得

$$\begin{aligned}&(-1)^{k-1}\int_0^T|x^{(k+1)}(t)|^2\mathrm{d}t+\lambda\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-i-1}a_{2(k-i)}\int_0^T|x^{(k-i+1)}(t)|^2\mathrm{d}t\\&-\lambda\int_0^T f'(x(t))|x'(t)|^2\mathrm{d}t+\lambda\int_0^T\beta(t)g(x(t-\tau(t)))x''(t)\mathrm{d}t=\lambda\int_0^T p(t)x''(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由 $k-1$ 为偶数及题设条件 3) 可知

$$\begin{aligned}0&<\int_0^T|x^{(k+1)}(t)|^2\mathrm{d}t\\&\leq\sum_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)}\int_0^T|x^{(k-i+1)}(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\beta(t)g(x(t-\tau(t)))x''(t)\mathrm{d}t+\int_0^T p(t)x''(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\int_0^T |x^{(k+1)}(t)|^2\mathrm{d}t\\ \le&\sum_{i=1}^{k-1} a_{2(k-i)}\int_0^T |x^{(k-i+1)}(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T |\beta(t)||g(x(t-\tau(t)))||x''(t)|\mathrm{d}t+\int_0^T |p(t)||x''(t)|\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由引理 2.1 可知存在与 λ, x 无关的常数 $M_i(k+1)>0$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 使得

$$|x^{(i)}|_0\le M_i(k+1)\int_0^T |x^{(k+1)}(t)|\mathrm{d}t. \tag{3.7}$$

由式 (3.2), (3.7) 及 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\left(1-\sum_{i=1}^{k-1} a_{2(k-i)}T^2M_{k-i+1}^2(k+1)\right)\int_0^T |x^{(k+1)}(t)|^2\mathrm{d}t\\ \le&(|\beta|_0M+|p|_0)M_2(k+1)T^{\frac{3}{2}}\left(\int_0^T |x^{(k+1)}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

根据题设条件 3) 可知存在与 λ, x 无关的常数 $K_0>0$ 使得

$$\int_0^T |x^{(k+1)}(t)|^2\mathrm{d}t<K_0,$$

其余部分类似于定理 3.1 的证明.

类似于定理 3.1, 3.2 的证明可证下面的定理.

定理 3.3　设条件 (H) 成立且 $m=2k, k\in Z^+$, 且 $k-1$ 为奇数，如果存在常数 $A>0, M>0$, 满足

1) 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 有 $|f(x)|\ge|x|$ 且 $|g(x)|\le M$;

2) 当 $|x|>A, t\in\mathbb{R}$ 时，$xf(x)>0$ 且 $xg(x)>0$;

3) 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 有 $f'(x)>0$;

4) $1-\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{2(k-i)}T^2M_{k-i+1}^2(k+1)>0$;

5) $1-\sum\limits_{i=1}^{k-1} a_{2(k-i)}T^2M_{2k-i}^2(m)>0$,

则方程 (1.1) 至少存在一个 T- 周期解.

3　例　子

作为应用，现举例如下.

例 1　考虑方程

$$x^{(5)}(t)+\frac{1}{\pi^3}x'(t)+2x+\left(\sin t+\frac{1}{2}\right)\mathrm{arctg}x(t-\sin t)=\cos t. \tag{4.1}$$

相应于方程 (1.1), 易见 $m=5, f(x)=2x, g(x)=\operatorname{arctg}x$, $\beta(t)=\sin t+\frac{1}{2}$, 我们可取 $A=1$, $M=2$, 显然定理 3.1 中的条件 1) 和 2) 满足且 $k=3$, $M_1(k)=\frac{\pi}{6}$, $M_3(m)=\frac{\pi}{6}$, 即

$$1-\sum_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)-1}T^2M_{k-i}^2(k)=\frac{9-\pi}{9}>0,$$

$$1-\sum_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)-1}T^2M_{2k-i-1}^2(m)=\frac{9-\pi}{9}>0,$$

故由定理 3.1 知方程 (4.1) 存在 2π 周期解.

注 1　在该例中, 若用关系式 (1.2) 来计算 $M_1(k), M_3(m)$, 则不能判断方程 (4.1) 存在 2π 周期解. 事实上

$$1-\sum_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)-1}T^2M_{k-i}^2(k)=1-16\pi<0,$$

$$1-\sum_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)-1}T^2M_{2k-i-1}^2(m)=1-16\pi<0,$$

即不满足定理 3.1 的条件.

例 2　考虑方程

$$x^{(6)}(t)+\frac{1}{\pi^3}x^{(4)}(t)+x^{(3)}(t)-2x-\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}x(t-\sin t)=\sin t. \tag{4.2}$$

相应于方程 (1.1), 易见 $m=6, f(x)=-2x$, $g(x)=-\operatorname{arctg}x$, $\beta(t)=\cos t+\frac{1}{2}$, 我们可取 $A=1$, $M=2$, 显然定理 3.2 中的条件 1), 2) 和 3) 满足且 $k=3$, $k-1=2$, $k+1=4$, $M_3(k+1)=\frac{1}{2}$, $M_5(m)=\frac{1}{2}$, 即

$$1-\sum_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)}T^2M_{k-i+1}^2(k+1)=\frac{\pi-1}{\pi}>0,$$

$$1-\sum_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)}T^2M_{2k-i}^2(m)=\frac{\pi-1}{\pi}>0,$$

故由定理 3.2 知方程 (4.2) 存在 2π 周期解.

注 2　在该例中, 若用关系式 (1.2) 来计算 $M_3(k+1), M_5(m)$, 则不能判断方程 (4.2) 存在 2π 周期解. 事实上

$$1-\sum_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)}T^2M_{k-i+1}^2(k+1)=\frac{\pi-4}{\pi}<0,$$

$$1-\sum_{i=1}^{k-1}a_{2(k-i)}T^2M_{2k-i}^2(m)=\frac{\pi-4}{\pi}<0,$$

即不满足定理 3.2 的条件.

上述两个例子中，函数 $\beta(t)$ 可变号，故本文的结果是新的，从上述两个例子中还可以看出关系式 (1.3) 在处理高阶泛函微分方程的各阶导数的界的估计式时比关系式 (1.2) 更为有效．

参　考　文　献

[1] 鲁世平，葛渭高．一类二阶具偏差变元的微分方程周期解．数学学报， 2002, **45**(4): 811–818.

[2] 任景莉，葛渭高．一类二阶泛函微分方程周期解存在性问题．数学学报， 2004, **47**(3): 569–578.

[3] 李永昆．具偏差变元的 Liénard 型方程的周期解．数学研究与评论， 1998, **18**(4): 565–570.

[4] 王根强，燕居让．多变时滞 n 阶非线性中立型泛函微分方程周期解存在性．数学物理学报， 2006, **26A**(2): 306–313.

[5] 王根强, 燕居让. 多变时滞 n 阶非线性非自治微分方程周期解存在性. 数学物理学报, 2003, **23A**(4): 431–435.

[6] 燕居让．高阶非线性脉冲泛函微分方程周期解的存在性．山西大学学报， 2003, **26**(1): 1–4.

[7] 陈仕洲．具偏差变元高阶 Liénard 方程周期解存在性．纯粹数学与应用数学， 2006, **22**(1): 108–110.

[8] Kenneth Michael. 现代数论经典引论．北京：世界图书出版公司， 2003.

[9] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Lecture Notes in Math, Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[10] Lu Shiping, Ge Weigao. Some new results on the existence of periodic solutions to a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. *Nonlinear Analysis*, 2004, **56**: 501–514.

[11] 鲁世平，葛渭高．一类具偏差变元 Rayleigh 方程周期解的存在性．数学进展， 2005, **34**(4): 425–432.

[12] Hale J K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer, 1977.

[13] 鲁世平，葛渭高．中立型对数种群模型的正周期解存在性．系统科学与数学， 2005, **25**(4): 490–497.

[14] 刘斌，庾建设．具 p-Laplacian 算子型周期边值问题解的存在性．系统科学与数学， 2003, **23**(1): 76–85.

The EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS FOR A KIND OF HIGH-ORDER FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

LI Xiaojing

(*College of Mathematics and Physics, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou* 213001; *Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu Anhui* 241000)

LU Shiping

(*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu Anhui* 241000)

Abstract　In this paper, by using the theory of Fourier series, Bernoulli number theory and continuation theorem of coincidence degree theory, we study a kind of high-order functional differential equations with a deviating argument is considered. Some new results on the existence of periodic solutions are obtained.

Key words　High-order functional differential equation, coincidence degree, periodic solution.