系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(6) (2008, 6), 709–717

可测函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理*

霍 永 亮

(重庆文理学院数学与计算机科学系，永川 402160; 西安电子科技大学应用数学系，西安 710071)

刘 三 阳

(西安电子科技大学应用数学系，西安 710071)

摘要 研究了可测函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理及其控制收敛定理，并给出了概率测度弱收敛的若干新的等价条件.

关键词 极限定理，控制收敛定理，弱等度胎紧，一致可积.

MR(2000) 主题分类号 90C30

1 引言及定义

随机规划稳定性 [1−4] 的研究与函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的收敛性有密切的关系，因此对这种积分泛函序列性质的研究是一件很有意义的工作．文献 [5] 在函数序列下半连续且等度有界的情形下，研究了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的下半收敛性，文献 [6] 在多元函数序列等度上有界的情形下，给出了多元函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的上半收敛性．最近，本文作者在多元函数序列无界且半连续的情形下，研究了函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理 [7].

本文将函数序列推广到无界且可测的情形并在较弱的条件下，证明了可测函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理及其控制收敛定理，给出了概率测度弱收敛的若干新的等价条件，本文的结果推广并改进了文献 [5, 7] 中的相应结果.

设 (E,d) 是 m 维 Polish 空间， $\boldsymbol{B}(E)$ 表示 E 中的 Borel 子集全体， $\boldsymbol{P}(E)$ 表示定义在 $\boldsymbol{B}(E)$ 上取值在 [0,1] 上的概率测度全体， $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 为 $\boldsymbol{P}(E)$ 中的概率测度族. $M(E)$ 表示 E 上的可测函数全体， $\boldsymbol{N}$ 表示全体自然数组成的集合． A^c 表示可测集 A 的余集．令 $\{S_n\subset\boldsymbol{B}(E),\ n\in\boldsymbol{N}\}$, 记

$$\limsup_{n\to\infty} S_n := \Big\{x\in E: x=\lim_{k\to\infty} x_{n_k}, x_{n_k}\in S_{n_k},\ \forall k\in\boldsymbol{N}\Big\}. \tag{1}$$

* 国家自然科学基金资助课题 (60574075), 陕西省自然科学基金 (2006A13) 和陕西省教育厅专项基金 (06JK150 号) 资助项目.

收稿日期：2005-12-12.

定义 1.1 设 $\{(f_n,\mu_n): n=0,1,2,\cdots\}$ 为 $M(E)\times \boldsymbol{P}(E)$ 中的子集，若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在可测集 $K_\varepsilon\subset E$ 和常数 $b_\varepsilon>0$, 使得

$$\text{i)}\ \ f_n(x)\geq -b_\varepsilon,\quad \forall x\in K_\varepsilon; \tag{2}$$

$$\text{ii)}\ \int_{E\setminus K_\varepsilon} |\, f_n(x)\,|\, \mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{3}$$

则称概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 为弱下等度胎紧的；若概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{-f_0;-f_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 为弱下等度胎紧的，则称概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 为弱上等度胎紧的;若概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 既弱上等度胎紧又弱下等度胎紧,则称概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 为弱等度胎紧的.

定义 1.2 [8] 设 $\{f_0;f_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 为 $M(E)$ 中的函数族，若对任意的 $x_0\in E$, $x_n\to x_0$, 有

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x_n)\geq f_0(x_0),$$

则称 f_n 下半连续收敛于 f_0；若 $-f_n$ 下半连续收敛于 $-f_0$, 则称 f_n 上半连续收敛于 f_0; 若 f_n 既上半连续又下半连续收敛于 f_0, 则称 f_n 连续收敛于 f_0.

本文有关的基本概念可参见文献 [4, 7–9]. 除特别声明外，本文所述的函数均指可测函数.

2 极限定理

为了完成本节主要定理的证明，我们首先证明下面的定理.

定理 2.1 若 $\{f_0;f_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 是等度下有界的函数族，且 f_n 下半连续收敛于 f_0. 设 $\{\mu_0;\mu_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 为 $\boldsymbol{P}(E)$ 上的概率测度族，且 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$. 则

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x). \tag{4}$$

证 由于 $\{f_0;f_n,n\in \boldsymbol{N}\}$ 是等度下有界的函数族, 不失一般性, 我们假定函数 $f_n\geq 0$, $n=0,1,2,\cdots$. 对任意给定的正整数 M, N, 令 $f_n^M:=f_n\wedge M$ 且定义可测集

$$G_i^n:=\left\{\ x\in E: f_n(x)>\frac{i}{N}\ \right\},\quad i=0,1,2,\cdots,MN;$$

$$G_i:=\left\{\ x\in E: f_0(x)>\frac{i}{N}\ \right\},\quad i=0,1,2,\cdots,MN.$$

不难验证

$$\frac{1}{N}\left[\sum_{i=0}^{MN}\mu_0(G_i)+1\right]\geq \int_E f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\ \text{ 且 }\ \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{MN}\mu_n(G_i^n)\leq \int_E f_n^M(x)\mu_n(\mathrm{d}x).$$

由于 f_n 下半连续收敛于 f_0, 从而 $\limsup\limits_{n\to\infty}\ (G_i^n)^c\subset (G_i)^c$. 由文献 [5] 定理 3, 对每一 i, 均有 $\liminf\limits_{n\to\infty}\ \mu_n(G_i^n)\geq \mu_0(G_i)$. 因此

$$\int_E f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\leq \frac{1}{N}\left[\sum_{i=0}^{MN}\mu_0(G_i)+1\right]\leq \frac{1}{N}\left[\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{MN}\mu_n(G_i^n)+1\right]$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^M(x)\mu_n(\mathrm{d}x)+\frac{1}{N}. \tag{5}$$

于是 (5) 式两边对 N 取极限，得

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^M(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq\int_E f_0^M(x)\mu_0(\mathrm{d}x).$$

再利用单调收敛定理，两边对 M 取极限，有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq\lim_{M\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^M(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x).$$

注 1 定理 2.1 推广并改进了文献 [5] 的定理 5 及文献 [7] 的推论 2.

定理 2.2 若 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$, 那么

i) 若 f_n 下半连续收敛于 f_0, 且概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,\ n\in\boldsymbol{N}\}$ 为弱下等度胎紧的，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x); \tag{6}$$

ii) 若 f_n 上半连续收敛于 f_0, 且概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,\ n\in\boldsymbol{N}\}$ 为弱上等度胎紧的，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leq\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x); \tag{7}$$

iii) 若 f_n 连续收敛于 f_0, 且概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 为弱等度胎紧的，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x). \tag{8}$$

证 i) 由概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 的弱下等度胎紧性，则对 $\varepsilon>0$, 存在可测集 K_ε 和常数 $b_\varepsilon>0$, 使得 $\forall x\in K_\varepsilon$ 时，有

$$f_n(x)\geq -b_\varepsilon,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

令 $f_n^{-b_\varepsilon}:=f_n\vee -b_\varepsilon$, 则 $|f_n^{-b_\varepsilon}|\leq|f_n|$, 且对一切的 $x\in K_\varepsilon$, $n=0,1,2,\cdots$, 有 $f_n^{-b_\varepsilon}(x)=f_n(x)$. 利用 (2) 式，我们有

$$\begin{aligned}&\Big|\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)-\int_E f_n^{-b_\varepsilon}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\Big|\\ =&\Big|\int_{E\setminus K_\varepsilon}[f_n(x)-f_n^{-b_\varepsilon}(x)]\mu_n(\mathrm{d}x)\Big|\\ <&2\int_{E\setminus K_\varepsilon}|f_n(x)|\mu_n(\mathrm{d}x)<2\varepsilon,\quad n=0,1,2,\cdots.\end{aligned} \tag{9}$$

由 f_n 下半连续收敛于 f_0, 则 $f_n^{-b_\varepsilon}$ 下半连续收敛于 $f_0^{-b_\varepsilon}$ 且 $f_n^{-b_\varepsilon}$ 为等度下有界，又 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$, 由 (4) 式，有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^{-b_\varepsilon}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq\int_E f_0^{-b_\varepsilon}(x)\mu_0(\mathrm{d}x). \tag{10}$$

于是结合 (9) 式，有

$$\begin{aligned}
&\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) - \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x) \\
&= \Big[\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) - \int_E f_n(x)^{-b_\varepsilon}\mu_n(\mathrm{d}x)\Big] + \Big[\int_E f_n(x)^{-b_\varepsilon}\mu_n(\mathrm{d}x) - \int_E f_0(x)^{-b_\varepsilon}\mu_0(\mathrm{d}x)\Big] \\
&\quad + \Big[\int_E f_0(x)^{-b_\varepsilon}\mu_0(\mathrm{d}x) - \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)\Big] \\
&\geq \int_E f_n(x)^{-b_\varepsilon}\mu_n(\mathrm{d}x) - \int_E f_0^{-b_\varepsilon}(x)\mu_0(\mathrm{d}x) - 2\varepsilon. \qquad (11)
\end{aligned}$$

(11) 式两边先对 n 取下极限，再令 $\varepsilon \to 0$, 并利用 (10) 式，有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geq \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x).$$

ii) 若 f_n 上半连续收敛于 f_0, 且概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0; f_n,\ n\in \boldsymbol{N}\}$ 为弱上等度胎紧的，则 $-f_n$ 下半连续收敛于 $-f_0$ 且概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{-f_0;-f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 为弱下等度胎紧的. 由定理 2.2 中 i), 有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = -\liminf_{n\to\infty}\int_E -f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geq \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x).$$

iii) 易知满足定理 2.2 中 iii) 的条件一定满足定理 2.2 中 i), ii) 的条件，比较 (6) 式与 (7) 式可得 (8) 式.

注 2 定理 2.2 推广并改进了文献 [7] 的定理 1.

定义 2.3 设 $\{(f_n,\mu_n): n = 0,1,2,\cdots\}$ 为 $M(E)\times \boldsymbol{P}(E)$ 中的子集，若

$$\lim_{R\to+\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x: f_n(x)\leq -R\}} f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = 0, \qquad (12)$$

则称 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 为下一致可积；若 $\{-f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 为下一致可积，则称 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 为上一致可积；若 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 既上一致可积又下一致可积，则称 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 为一致可积.

定理 2.4 若 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$, 且 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在，那么

i) 若 f_n 下半连续收敛于 f_0, 且 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 为下一致可积，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \geq \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x); \qquad (13)$$

ii) 若 f_n 上半连续收敛于 f_0, 且 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 为上一致可积，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x) \leq \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x); \qquad (14)$$

iii) 若 f_n 连续收敛于 f_0, 且 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 一致可积，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x). \tag{15}$$

证　i) 令 $H_n=\{x: f_n>-R\}, H_0=\{x: f_0>-R\}, f_n^{-R}:=f_n\vee(-R), n=0,1,2\cdots$, 由 f_n 下半连续收敛于 f_0, 则有 $\limsup\limits_{n\to\infty} H_n^c\subset H_0^c$, 而 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$, 由文献 [5] 定理 3, 有

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(H_n)\geq\mu_0(H_0). \tag{16}$$

另一方面， f_n^{-R} 下半连续收敛于 f_0^{-R}. 由 (4) 式，有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n^{-R}(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq\int_E f_0^{-R}(x)\mu_0(\mathrm{d}x). \tag{17}$$

利用 (16) 和 (17), 类似于文献 [7] 定理 2 的证明可得

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)I_{\{x:f_n(x)\leq -R\}}\mu_n(\mathrm{d}x)+\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x). \tag{18}$$

注意到 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 的下一致可积性，利用 (12) 式， (18) 式两边对 R 取极限，有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x).$$

ii) 由 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 的上一致可积性知， $\{-f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 为下一致可积，仿照定理 2.2 ii) 的证明易得.

iii) 易知满足定理 2.4 iii) 的条件一定满足定理 2.4 i), ii) 的条件，并直接从 (13) 式与 (14) 式可得 (15) 式.

3　控制收敛定理

定理 3.1　若 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$, 且存在关于概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 弱等度胎紧的函数 $g(x)$, 使得 $\mid f_n(x)\mid\leq g(x),\ n=0,1,2,\cdots$, 那么

i) 若 f_n 下半连续收敛于 f_0, 则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x);$$

ii) 若 f_n 上半连续收敛于 f_0, 则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leq\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x);$$

iii) 若 f_n 连续收敛于 f_0, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x).$$

证 由定理 2.2 知，只需证明概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 为弱等度胎紧的即可. 因为概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 关于 $g(x)$ 为弱等度胎紧的，则由定义 1.1 知，对任意的 $\varepsilon>0$, 存在可测集 $K_\varepsilon\subset E$ 和常数 $b_\varepsilon>0$, 使得

$$\mid g(x)\mid\le b_\varepsilon,\quad \forall x\in K_\varepsilon;$$

且

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon}\mid g(x)\mid\mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

又由于 $\mid f_n(x)\mid\le g(x)$, $n=0,1,2,\cdots$, 则对上述的 $\varepsilon>0$ 和可测集 $K_\varepsilon\subset E$ 和常数 $b_\varepsilon>0$, 我们有

$$\mid f_n(x)\mid\le\mid g(x)\mid\le b_\varepsilon,\quad \forall x\in K_\varepsilon; \tag{19}$$

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon}\mid f_n(x)\mid\mu_n(\mathrm{d}x)\le\int_{E\setminus K_\varepsilon}\mid g(x)\mid\mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{20}$$

由 (19) 式和 (20) 式知，概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 关于函数族 $\{f_0;f_n,\ n\in\boldsymbol{N}\}$ 为弱等度胎紧的.

推论 3.2 若 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$, 且存在关于概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 胎紧的连续函数 $g(x)$, 使得 $\mid f_n(x)\mid\le g(x)$, $n=0,1,2,\cdots$, 那么

i) 若 f_n 下半连续收敛于 f_0, 则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\ge\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x);$$

ii) 若 f_n 上半连续收敛于 f_0, 则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\le\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x);$$

iii) 若 f_n 连续收敛于 f_0, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x).$$

证 由定理 3.1 知，只需证明概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 关于函数 $g(x)$ 为弱等度胎紧的. 由于概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 关于 $g(x)$ 为胎紧的，则由文献 [4] 定义 1 知，对任意的 $\varepsilon>0$, 存在紧集 $K_\varepsilon\subset E$, 使得

$$\int_{E\setminus K_\varepsilon}\mid g(x)\mid\mu_n(\mathrm{d}x)<\varepsilon,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{21}$$

又由于 $g(x)$ 连续，则对上述的 $\varepsilon>0$ 和紧集 $K_\varepsilon\subset E$, 令 $b_\varepsilon=:\max\limits_{x\in K_\varepsilon}|g(x)|$, 我们有

$$|g(x)|\le b_\varepsilon,\quad \forall\, x\in K_\varepsilon; \tag{22}$$

由 (21) 式与 (22) 式，概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n,n\in\boldsymbol{N}\}$ 关于函数 $g(x)$ 为弱等度胎紧的.

定理 3.3 若 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$, 且 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在，那么

i)　若 f_n 下半连续收敛于 f_0, 且存在关于概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 下一致可积的函数 $g(x)$, 使得 $f_n(x)\geq g(x),\ n=0,1,2,\cdots$, 则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x); \tag{23}$$

ii)　若 f_n 上半连续收敛于 f_0, 且存在关于概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 上一致可积的函数 $g(x)$, 使得 $f_n(x)\leq g(x),\ n=0,1,2,\cdots$, 则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\leq \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x); \tag{24}$$

iii)　若 f_n 连续收敛于 f_0, 且存在关于概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 一致可积的函数 $g(x)$, 使得 $\mid f_n(x)\mid\leq g(x),\ n=0,1,2,\cdots$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)= \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x). \tag{25}$$

证　i)　由定理 2.4 知，只需证明概率测度族 $\{\mu_0;\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于函数 $g(x)$ 为下一致可积性. 由 $g(x)$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 下一致可积性及 $f_n(x)\geq g(x)$, $n=1,2,\cdots$, 因此我们有

$$\begin{aligned}0&\geq \lim_{R\to+\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:\ f_n(x)\leq -R\}} f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\&\geq \lim_{R\to+\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:\ f_n(x)\leq -R\}} g(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\\&\geq \lim_{R\to+\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:\ g(x)\leq -R\}} g(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=0.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{R\to+\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\{x:\ f_n(x)\leq -R\}} f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=0.$$

ii)　由 $g(x)$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 的上一致可积性知，$-g(x)$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 为下一致可积，仿照定理 2.2 中 ii) 的证明易得.

iii)　易知满足定理 3.3 中 iii) 的条件一定满足定理 3.3 中 i) 和定理 3.3 中 ii) 的条件，并直接由 (23) 式与 (24) 式得出 (25) 式.

4　概率测度弱收敛的若干新的等价条件

定理 4.1　在 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的

i)　$\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$;

ii) 若 f_n 下半连续收敛于 f_0, 且函数族 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 下一致可积，则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\geq \int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x);$$

iii) 若 f_n 上半连续收敛于 f_0, 且函数族 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 上一致可积，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\le\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x);$$

iv) 若 f_n 连续收敛于 f_0, 且函数族 $\{f_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 一致可积，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x).$$

证 i)$\Rightarrow$ ii) iii) iv). 由定理 2.4 显然.

ii) iii) iv)$\Rightarrow$ i). 仿照文献 [7] 定理 3 的证明易得.

定理 4.2 在 $\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x)$ 存在的条件下，下列陈述是等价的

i) $\mu_n\xrightarrow{w}\mu_0$;

ii) 若 f_n 下半连续收敛于 f_0, 且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 下一致可积的 $g(x)$, 使得 $f_n(x)\ge g(x)$, $n=1,2,\cdots$, 则有

$$\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\ge\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x);$$

iii) 若 f_n 上半连续收敛于 f_0, 且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 上一致可积的 $g(x)$, 使得 $f_n(x)\le g(x)$, $n=1,2,\cdots$, 则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)\le\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x);$$

iv) 若 f_n 连续收敛于 f_0, 且存在关于概率测度族 $\{\mu_n, n\in \boldsymbol{N}\}$ 一致可积的 $g(x)$, 使得 $\mid f_n(x)\mid\le g(x)$, $n=1,2,\cdots$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\int_E f_0(x)\mu_0(\mathrm{d}x).$$

证 i)$\Rightarrow$ ii) iii) iv). 由定理 3.3 显然.

ii) iii) iv)$\Rightarrow$ i). 完全类似于文献 [7] 定理 3 的证明.

参 考 文 献

[1] Robinson S M and Wets R J B. Stability in two-stage stochastic programming. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1987, **25**(6): 1409–1416.

[2] Birge J R and Wets R J B. Designing approximation schemes for stochastic optimization problems, in particular for stochastic programs with recourse. *Mathematical Programming Study*, 1986, **27**(1): 54–102.

[3] Dupacova J and Wets R J B. Asymptotic behavior of statistical estimators and of optimal solutions of optimization problems. *The Annals of Statistics*, 1988, **16**(2): 1517–1549.

[4] Zervos M. On the epiconvergence of stochastic optimization problems. *Mathematics of Operations Research*, 1999, **24**(2): 495–508.
[5] Lucchetti R, Salinetti G and Wets R J B. Uniform convergence of probability measures: Topological criteria. *Journal of Multivariate Analysis*, 1994, **51**(2): 252–264.
[6] Salinetti G. Consistency of statistical estimators: The epigraphical view. S. Uryasev and P. M. Pardalos. Stochastic Optimization: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001: 365–383.
[7] 霍永亮, 刘三阳. 函数序列关于弱收敛概率测度序列积分的极限定理. 兰州大学学报，2005, **41**(6): 125–129.
[8] Artstein Z and Wets R J B. Stability results for stochastic programs and sensor, allowing for discontiuous objective functions. *SIAM Journal on Optimization*, 1994, **4**(3): 537–550.
[9] 严加安. 测度论讲义. 北京：科学出版社， 1998.

LIMIT THEOREMS FOR THE INTEGRATION OF MEASURABLE FUNCTION SEQUENCE WITH RESPECT TO WEAK CONVERGENCE PROBABILITY MEASURE SEQUENCE

HUO Yongliang

(*Department of Mathematics and Computer Science, Chongqing University of Arts and Sciences, Yongchuan Chongqing* 402160*; Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an* 710071)

LIU Sanyang

(*Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an* 710071)

Abstract Limit theorems and dominated convergence theorems for the integration of measurable function sequence with respect to weak convergence probability measure sequence are studied and some new equivalent conditions of weak convergence of probability measure are obtained.

Key words Limit theorem, dominated convergence theorems, weak equi-tight, uniformly integrable.