系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
27(5) (2007, 10), 676–683

部分信息下股票付息的 Black-Scholes 期权定价公式和一类最优投资问题*

吴 臻
(山东大学数学与系统科学学院， 济南 250100)
王 光 臣
(山东大学数学与系统科学学院， 济南 250100; 山东师范大学数学科学学院， 济南 250014)

摘要 假定金融市场中的投资者仅掌握部分信息，即投资者仅能观测到股票和债券价格，而股票的瞬时回报率和市场的噪声源不能观测．对存款利率和贷款利率不相等的情形，运用凸分析和滤波技术得到了部分信息下股票付红利的 Black-Scholes 期权定价公式．对部分信息下最大化终端财富的问题，获得了最优投资策略．

关键词 非线性滤波，期权定价，倒向随机微分方程，投资组合．

MR(2000) 主题分类号 60H10

1 引言和市场模型

本文中，我们考虑部分信息下的期权定价和最优投资组合问题．

在金融市场上，我们假定仅有两种证券可以连续交易，一种是有风险的资产，称为股票；另一种是无风险的，被称为债券． Merton[1] 和 Duffie[2] 给出了债券市场中的随机模型．他们用布朗运动表示市场中的不确定性因素，并得到了完全信息下的欧式期权定价公式．基于随机分析理论， Karatzas[3] 利用一种统一的方法，系统地研究了消费和投资问题．

事实上，投资者在金融市场中只知道股票和债券价格，并不能获得其它信息．在文 [4,5] 中， Lakner 考虑了部分信息下的最优投资问题．在本文中，我们想在这个框架下研究一类期权定价和最优投资选择问题．

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 是一个完备的概率空间，并用它来描述金融市场中所包含的不确定性．无风险证券 – 债券的价格满足

$$\mathrm{d}B_t = r_t B_t \mathrm{d}t, \tag{1}$$

其中 r_t 是短期存款利率．当 R_t 表示贷款利率时，我们有

$$\mathrm{d}B_t = R_t B_t \mathrm{d}t. \tag{2}$$

* 国家自然科学基金 (10371067), 霍英东青年教师基金，教育部新世纪优秀人才支持计划资助．
收稿日期：2004-12-17.

股票价格满足

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \tag{3}$$

这里 μ_t, σ_t 分别表示股票的瞬时期望回报率和瞬时波动率. 我们假定 μ_t 不能被直接观测到并且满足

$$d\mu_t = a\mu_t dt + b dW_t + c dV_t, \tag{4}$$

其中 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ 和 $\{V_t\}_{t\geq 0}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的两个相互独立的 1- 维标准布朗运动.

假定该股票连续付红利，我们用 $\delta(t, S_t)$ 表示在时刻 t 的红利率.

令

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{W_s, V_s; 0 \leq s \leq t\}, \quad \mathcal{G}_t := \sigma\{S_u; 0 \leq u \leq t\}.$$

假定金融市场中的投资者仅知道股票价格，债券价格及短期利率和贷款利率. 他 / 她也能估计股票的波动率. 然而，不能观测到股票的瞬时期望回报率以及白噪声 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ 和 $\{V_t\}_{t\geq 0}$ 的信息. 所以我们假定 S_t 是 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ 适应的，而 $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ 和 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ 是 $\mathcal{F}_t$ 适应的. 投资者的投资决策将完全依据 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ 的信息.

为了简单起见，我们假定 a, b, c 是常数， r_t, σ_t 是确定性的有界函数， σ_t^{-1} 也有界.

我们用 X_t 表示 t 时刻投资者所拥有的财富， π_t 是投资于股票的资产数. 假定 π_t 是循序可测的，且满足 $\mathrm{E}[\int_0^T \pi_t^2 dt] < \infty$. 我们允许 π_t 取负值，即意味着股票可以卖空. 同理，投资于债券的资产数 $X_t - \pi_t$ 也可以取负值，我们把这解释为以利率 R_t 从银行贷款.

在下一节中，我们考虑部分信息下股票付红利且短期利率 r_t 不同于贷款利率 R_t 的欧式期权定价问题. 运用凸分析的方法，得到了这种情况下的 Black-Scholes 公式. 我们论文中得到的模型比文 [4,5] 更一般，而且首次研究了部分信息下付红利且短期利率不等于贷款利率的期权定价问题. 在这一节，我们还研究了模型中的参数对期权价格的影响，这也被称为参数的灵敏度.

在第 3 节，我们研究了一个最优投资问题. 投资者在掌握部分信息的情况下想最大化终端财富. 利用前两节的模型和滤波技术，我们得到了最优策略. 求解方法是直接显明的，并且得到了显式的最优解.

在本节最后，我们给出一个将在以后两节中用到的引理.

引理 1.1　我们考虑连续的系统变量 $x_t \in R$ 和连续的可观测变量 $Z_t \in R$, 它们满足

$$\begin{cases} dx_t = F(t)x_t dt + G(t) dW_t + C(t) du_t, \\ dZ_t = x_t Z_t dt + D(t) Z_t dW_t, \quad \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

这里 $F(t), G(t), C(t), D(t), D^{-1}(t) \in R$ 均有界， $\{u_t\}_{0\leq t\leq T}$ 和 $\{w_t\}_{0\leq t\leq T}$ 是两个相互独立的 1- 维布朗运动. 如果 $Ex_0^4 < +\infty$, x_0, Z_0 分别独立于 $\{u_t\}_{0\leq t\leq T}$ 和 $\{w_t\}_{0\leq t\leq T}$, 且 x_0 关于 Z_0 的条件分布是高斯的， $\mathcal{Z}_t$ 是由 Z_t 生成的 σ- 代数，则滤波问题的解 $\widehat{x}_t = \mathrm{E}[x_t|\mathcal{Z}_t]$ 满足下列随机微分方程

$$\begin{cases} d\widehat{x}_t = F(t)\widehat{x}_t dt + \dfrac{G(t)D(t) + \Pi_t}{D^2(t)}\Big(\dfrac{dZ_t}{Z_t} - \widehat{x}_t dt\Big), \\ \widehat{x}_0 = \mathrm{E}[x_0], \quad \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

这里 $\Pi_t = \mathrm{E}[(x_t - \widehat{x}_t)^2|\mathcal{Z}_t]$ 满足黎卡提微分方程

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_t = -\dfrac{\Pi_t^2}{D^2(t)} + 2\Big(F(t) - \dfrac{G(t)}{D(t)}\Big)\Pi_t + C^2(t), \\ \Pi_0 = \mathrm{E}[(x_0 - \widehat{x}_0)^2], \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

证明可参见 [6](定理 12.1).

2 部分信息下欧式期权定价问题

在这一节中，我们考虑金融市场中部分信息下股票 S_t 的欧式期权定价问题.

根据方程 (1),(2) 和 (3), 投资者的财富 X_t 满足

$$\mathrm{d}x_t = [r_t X_t + (\mu_t + \delta(t, S_t) - r_t)\pi_t - (R_t - r_t)(X_t - \pi_t)^-]\mathrm{d}t + \sigma_t \pi_t \mathrm{d}W_t, \tag{5}$$

其中 $x^- = \frac{|x|-x}{2}, \forall x \in R$, 并且 $x^+ = \frac{|x|+x}{2}, \forall x \in R$.

令 K 是该股票期权的执行价格， T 是执行日. 由倒向随机微分方程的观点，股票期权的无套利价格满足下列倒向随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = [r_t X_t + (\mu_t + \delta(t, S_t) - r_t)\pi_t - (R_t - r_t)(X_t - \pi_t)^-]\mathrm{d}t + \sigma_t \pi_t \mathrm{d}W_t, \\ X_T = (S_T - K)^+, \quad \forall t \in [0, T], \end{cases} \tag{6}$$

这里 $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ 和 $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ 不可观测，而 $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ 能被观测到. 我们将采用滤波理论利用 $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ 的信息来估计 $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$.

令

$$\widehat{\mu}_t = \mathrm{E}[\mu_t|\mathcal{G}_t], \quad P_t = \mathrm{E}[(\mu_t - \widehat{\mu}_t)^2|\mathcal{G}_t],$$

现在定义一个新息过程，其满足

$$\mathrm{d}\overline{W}_t = \frac{1}{\sigma_t}\Big(\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - \widehat{\mu}_t \mathrm{d}t\Big), \tag{7}$$

所以

$$\mathrm{d}S_t = \widehat{\mu}_t S_t \mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}\overline{W}_t, \tag{8}$$

由滤波理论知， $\{\overline{W}_t\}_{t\in[0,T]}$ 是 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, P)$ 上的标准布朗运动. 根据引理 1.1, 我们得到

$$\begin{cases} \mathrm{d}\widehat{\mu}_t = a\widehat{\mu}_t \mathrm{d}t + \dfrac{b\sigma_t + P_t}{\sigma_t^2}\Big(\dfrac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - \widehat{\mu}_t \mathrm{d}t\Big), \\ \widehat{\mu}_0 = \mathrm{E}[\mu_0], \quad \forall t \in [0, T], \end{cases} \tag{9}$$

其中 P_t 满足黎卡提方程

$$\begin{cases} \dot{P}_t = 2aP_t + b^2 + c^2 - \Big(b + \dfrac{P_t}{\sigma_t}\Big)^2, \\ P_0 = \mathrm{E}[(\mu_0 - \widehat{\mu}_0)^2], \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases} \tag{10}$$

当 $\sigma_t = \sigma$ 为常数时，我们可以给出显式解

$$P_t = \frac{\alpha_1 - L\alpha_2 \exp(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\sigma^2}t)}{1 - L\exp(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\sigma^2}t)}, \tag{11}$$

其中

$$\alpha_1 = \Big(a - \frac{b}{\sigma}\Big)\sigma^2 - \sigma\sqrt{\Big(a - \frac{b}{\sigma}\Big)\sigma^2 + c^2},$$

$$\alpha_2 = \Big(a - \frac{b}{\sigma}\Big)\sigma^2 + \sigma\sqrt{\Big(a - \frac{b}{\sigma}\Big)\sigma^2 + c^2},$$

$$L = \frac{P_0 - \alpha_1}{P_0 - \alpha_2}.$$

那么

$$\widehat{\mu}_t = \widehat{\mu}_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-r)}\Big(b + \frac{P_r}{\sigma}\Big)d\overline{W}_r, \tag{12}$$

这里 P_r 由 (11) 式给出．

根据方程 (1),(2),(8) 和自融资策略，我们知道投资者的财富，即股票的期权价格应该满足

$$\begin{cases} dX_t = [r_tX_t + (\widehat{\mu}_t + \delta(t,S_t) - r_t)\pi_t - (R_t - r_t)(X_t - \pi_t)^-]dt + \sigma_t\pi_t d\overline{W}_t, \\ X_T = (S_T - K)^+, \quad \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{13}$$

如果令

$$Z_t := \sigma_t\pi_t, \quad \theta_t := \sigma_t^{-1}(\widehat{\mu}_t + \delta(t,S_t) - r_t),$$

$$b(t,X,Z) := -[r_tX_t + \theta_tZ_t - (R_t - r_t)(X_t - \pi_t)^-],$$

那么我们有

$$\begin{cases} -dX_t = -\Big[r_tX_t + \theta_tZ_t - (R_t - r_t)\Big(X_t - \dfrac{Z_t}{\sigma_t}\Big)^-\Big]dt - Z_t d\overline{W}_t, \\ X_T = (S_T - K)^+, \quad \forall t \in [0,T], \end{cases} \tag{14}$$

这里 θ_t 经常被称为时刻 t 的风险溢价．

方程 (14) 变成了一个非线性倒向随机微分方程，下面的问题是怎样得到股票 S_t 的期权价格 X_t 的显式解．我们注意到 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ 关于 X 和 Z 是凸的．在 [7] 中， El Karoui, Peng 和 Quenez 介绍了用凸分析的方法处理系数为凸的倒向随机微分方程．他们也给出了一些在金融中的应用，其中包括在期权定价问题中的应用．下面我们运用 [7] 中的技术，给出在我们框架下欧式期权价格的显式解．

容易得到

$$b(t,X_t,Z_t) = \sup\{b^\beta(t,X_t,Z_t) | r_t \le \beta_t \le R_t\}, \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned} b^\beta(t,X_t,Z_t) &= -\beta_tX_t - \Big(\theta_t + \frac{r_t - \beta_t}{\sigma_t}\Big)Z_t \\ &= -\beta_tX_t - \sigma_t^{-1}(\widehat{\mu}_t + \delta(t,S_t) - \beta_t)Z_t. \end{aligned}$$

由倒向随机微分方程比较定理，我们有

$$X_t = ess\sup\{X_t^\beta | r_t \le \beta_t \le R_t\}, \tag{16}$$

这里的 X_t^β 满足方程

$$\begin{cases} -\mathrm{d}X_t^\beta = -[\beta_t X_t^\beta + \sigma_t^{-1}(\widehat{\mu}_t + \delta(t,S_t) - \beta_t)Z_t^\beta]\mathrm{d}t - Z_t^\beta \mathrm{d}\overline{W}_t, \\ \quad X_T^\beta = (S_T - K)^+, \quad \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{17}$$

引入 (17) 的对偶方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_s = -\beta_s Y_s \mathrm{d}s - \sigma_s^{-1}(\widehat{\mu}_s + \delta(t,S_s) - \beta_s)Y_s \mathrm{d}\overline{W}_s, \\ \quad Y_t = 1, \quad \forall s \in [t,T], \end{cases}$$

我们得到

$$\begin{aligned} X_t^\beta = \mathrm{E}\Big[\exp\Big\{\int_t^T \Big(-\beta_s - \frac{(\widehat{\mu}_s + \delta(s,S_s) - \beta_s)^2}{2\sigma_s^2}\Big)\mathrm{d}s \\ - \int_t^T \frac{\widehat{\mu}_s + \delta(s,S_s) - \beta_s}{\sigma_s}\mathrm{d}\overline{W}_s\Big\}(S_T - K)^+ | \mathcal{G}_t\Big]. \end{aligned} \tag{18}$$

根据 $\delta(t,S_t), \beta_t, \sigma_t$ 和 σ_t^{-1} 的有界性假定,易证 $\widehat{\mu}_t$ 是高斯过程,且 $\sup\limits_{0\le t\le T} \mathrm{E}\widehat{\mu}_t < \infty$, $\sup\limits_{0\le t\le T} \mathrm{E}\widehat{\mu}_t^2 < \infty$, $\sup\limits_{0\le t\le T} \mathrm{D}\widehat{\mu}_t < \infty$, 由 [6](第 6.2.3 部分,例 3), 我们有

$$\mathrm{E}\Big[\exp\Big\{-\int_0^T \frac{\widehat{\mu}_t + \delta(t,S_t) - \beta_t}{\sigma_t}\mathrm{d}\overline{W}_t - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(\widehat{\mu}_t + \delta(t,S_t) - \beta_t)^2}{\sigma_t^2}\mathrm{d}t\Big\}\Big] = 1.$$

那么运用 Girsanov 定理,我们能引入一个风险中性概率测度 Q, 使得 Q 满足

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \exp\Big\{-\int_0^T \frac{\widehat{\mu}_t + \delta(t,S_t) - \beta_t}{\sigma_t}\mathrm{d}\overline{W}_t - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(\widehat{\mu}_t + \delta(t,S_t) - \beta_t)^2}{\sigma_t^2}\mathrm{d}t\Big\},$$

则

$$\widehat{W}_t = \overline{W}_t + \int_0^t \frac{\widehat{\mu}_s + \delta(s,S_s) - \beta_s}{\sigma_s}\mathrm{d}s$$

为 Q 下的布朗运动,我们有

$$\mathrm{d}S_t = (\beta_t - \delta(t,S_t))S_t\mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}\widehat{W}_t, \tag{19}$$

和

$$\begin{cases} -\mathrm{d}x_t^\beta = -\beta_t X_t^\beta \mathrm{d}t - Z_t \mathrm{d}\widehat{W}_t, \\ \quad X_T^\beta = (S_T - K)^+, \end{cases}$$

从而

$$X_t^\beta = \mathrm{E}_Q\Big[\mathrm{e}^{-\int_t^T \beta_s \mathrm{d}s}(S_T - K)^+ | \mathcal{G}_t\Big], \quad \forall t \in [0,T]. \tag{20}$$

由 (19) 式可以看出,股票生成的红利率降低了股票的价格,股市中的实际情况恰好印证了这一现象的正确性. 在后面我们将严格证明这一点.

现在我们令模型中的所有系数均为常数，且 $\forall t \in [0,T], \delta(t,S_t)=\delta, \beta_t=\beta$ 也为常数时，来推导 X_t^β 的显式解.

若令

$$d_0^\beta(S_t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\Big(\frac{S_t}{K\mathrm{e}^{-(\beta-\delta)(T-t)}}\Big) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t},$$
$$d_1^\beta(S_t) := d_0(S_t) + \sigma\sqrt{T-t},$$

$N(x)$ 表示正态分布变量的累积概率分布函数. 注意到执行域

$$\varepsilon = \{S_T > K\} = \Big\{ -\frac{\widehat{W}_T - \widehat{W}_t}{\sqrt{T-t}} < d_0^\beta(S_t)\Big\},$$

那么

$$\begin{aligned} X_t^\beta &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{-\beta(T-t)} I_\varepsilon S_T | \mathcal{G}_t) - K\mathrm{e}^{-\beta(T-t)} Q(\varepsilon|\mathcal{G}_t) \\ &= \mathrm{e}^{-\delta(T-t)} N(d_1^\beta(S_t)) S_t - K\mathrm{e}^{-\beta(T-t)} N(d_0^\beta(S_t)), \end{aligned} \tag{21}$$

并且

$$\frac{\partial X_t^\beta}{\partial \beta} = K(T-t)\mathrm{e}^{-\beta(T-t)} N(d_0^\beta(S_t)) > 0,$$

从而 X_t^β 关于 β 递增. 根据 (16), 则 t 时刻该股票期权价格为

$$X_t = \mathrm{e}^{-\delta(T-t)} N(d_1^R(S_t)) S_t - K\mathrm{e}^{-R(T-t)} N(d_0^R(S_t)). \tag{22}$$

观察 (22) 式，我们知道为了对冲风险并且复制期权，投资者应该总是从银行贷款来投资股票.

因此，我们有

定理 2.1　当所有参数均为常数时，部分信息情形下欧式期权的价格由 (22) 式给出.

当 $\delta=0$, $R=r$ 时， (22) 式的特殊情况就是经典的 Black-Scholes 公式. 由于公式中没有出现股票收益率，因而结果与完全信息下相同，但推导过程充分考虑了不完全信息因素并运用滤波技术. 当 $R>r$ 时，本文方法简单直接而易于理解和应用.

我们也给出参数对股票期权价格的影响，这被称为参数的灵敏性.

命题 2.2　对于上面所讨论的欧式期权定价问题，股票价格 S, 瞬时波动率 σ 和贷款利率 R 越高，股票 S 的欧式期权价格越高；执行价格 K 和红利率 δ 越高，股票的欧式期权价格越低. 即在上述所有的假定下，该股票的期权价格 X_t 分别随 S_0, σ 或 R 的增大而增大，分别随 K, δ 的增大而减小.

证　在 (22) 式中令 $t=0$, 我们能验证

$$\frac{\partial X_0}{\partial S_0} = \mathrm{e}^{-\delta T} N(d_1^R(S_0)) > 0, \quad \frac{\partial X_0}{\partial \sigma} = \mathrm{e}^{-\delta T} S_0 \sqrt{T} N(d_1^R(S_0)) > 0,$$
$$\frac{\partial X_0}{\partial R} = TK\mathrm{e}^{-RT} S_0 N(d_0^R(S_0)) > 0, \quad \frac{\partial X_0}{\partial \delta} = -T\mathrm{e}^{-\delta T} S_0 N(d_1^R(S_0)) < 0,$$
$$\frac{\partial X_0}{\partial K} = -\mathrm{e}^{-RT} S_0 N(d_0^R(S_0)) < 0.$$

因此，容易得到结论.

3 最优投资组合问题

在这节里，我们运用第 1 节的模型考虑一个部分信息下的最优投资组合问题. 假定一个小投资者的初始财富为 x, 在有限时间区间 [0,T] 上，他 / 她能连续地交易两种证券：股票 S_t 和债券 B_t. 这里我们假定对任意的 $t\in[0,T]$, $r_t=R_t$, 股票所产生的红利率为 $\delta(t,S_t)$.

我们首先给出

定义 3.1 对于一个给定的 $x\geq 0$, 一个策略 π 被称为容许的，若财富过程 $X_t^{x,\pi}\geq 0$ 且 $\mathrm{E}[\int_0^T\pi_t^2\mathrm{d}t]<\infty,\quad \forall t\in[0,T]$. 容许策略 π 的集合记为 $\mathcal{A}(x)$.

这里，我们仅考虑一个简单的最优投资问题，即投资者想寻找 $\{\pi_t\}_{0\leq t\leq T}\in\mathcal{A}(x)$, 使得终端财富最大. 换句话说，

$$V(0,x)=\max_{\{\pi_t\}_{0\leq t\leq T}\in\mathcal{A}(x)}\mathrm{E}\log X_T^{x,\pi}. \tag{23}$$

求解的方法是根据股票价格的信息，运用滤波技术给出股票瞬时回报率 μ_t 的最优估计，然后运用完备信息下的经典技术得到最优解.

根据第 2 节中结果易知，

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t^{x,\pi}=[r_tX_t^{x,\pi}+(\widehat{\mu}_t+\delta(t,S_t)-r_t)\pi_t]\mathrm{d}t+\sigma_t\pi_t\mathrm{d}\overline{W}_t,\\ \mathrm{d}S_t=\widehat{\mu}_tS_t\mathrm{d}t+\sigma_tS_t\mathrm{d}\overline{W}_t,\\ \mathrm{d}\widehat{\mu}_t=a\widehat{\mu}_t\mathrm{d}t+\dfrac{b\sigma_t+P_t}{\sigma_t}\mathrm{d}\overline{W}_t,\quad \forall t\in[0,T],\end{cases} \tag{24}$$

这里 $\{\overline{W}_t\}_{0\leq t\leq T},\{\widehat{\mu}_t\}_{0\leq t\leq T}$ 均可观测. 所以我们能对 $\log X_T^{x,\pi}$ 用 Itô 公式，那么

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\log X_T^{x,\pi}&=\log x+\mathrm{E}\int_0^T r_t\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\mathrm{E}\int_0^T\frac{\sigma_t^2\pi_t^2}{(X_t^{x,\pi})^2}\mathrm{d}t+\mathrm{E}\int_0^T\frac{\widehat{\mu}_t+\delta(t,S_t)-r_t}{X_t^{x,\pi}}\pi_t\mathrm{d}t\\ &=\log x+\mathrm{E}\int_0^T r_t\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\mathrm{E}\int_0^T\frac{\sigma_t^2}{(X_t^{x,\pi})^2}\Big(\pi_t-\frac{\widehat{\mu}_t+\delta(t,S_t)-r_t}{\sigma_t}X_t^{x,\pi}\Big)^2\mathrm{d}t\\ &\quad+\frac{1}{2}\mathrm{E}\int_0^T\frac{(\widehat{\mu}_t+\delta(t,S_t)-r_t)^2}{\sigma_t^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

从而有

命题 3.2 在部分信息情形下，若投资者想如方程 (23) 那样最大化终端财富，则最优策略是

$$\pi_t=\frac{\widehat{\mu}_t+\delta(t,S_t)-r_t}{\sigma_t^2}X_t^{x,\pi}, \tag{25}$$

这是财富 $X_t^{x,\pi}$ 的反馈形式. 最优值函数是

$$V(0,\widehat{\mu}_0,x)=\log x+\mathrm{E}\bigg[\int_0^T r_t\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T\frac{(\widehat{\mu}_t+\delta(t,S_t)-r_t)^2}{\sigma_t^2}\mathrm{d}t\bigg]. \tag{26}$$

部分信息下的最优投资问题有很多，我们仅给出一个简单例子以说明想法. 主要思想是根据已知信息，运用滤波技术给出不可观测变量的估计，把部分信息问题变成经典的完备信息问题. 在将来的论文中，我们将研究更多的情形.

4　结束语

本文利用倒向随机微分方程和滤波技术，给出了部分信息下付红利的 Black-Scholes 期权定价公式，并研究了一类最优投资问题，针对特殊的目标函数得到了最优投资策略的显式解．若对模型中的各参数实际采样，运用统计学方法，能估计各参数值．因此，我们的期权定价公式和最优投资策略对投资者的实际操作能产生一定的指导作用．

参 考 文 献

[1] Merton R. Continuous-Time Finance. Oxford: Blackwell Publishers, 1990.

[2] Duffie D. Security Markets, Stochastic Models. Boston: Academic Press, 1988.

[3] Karatzas I. Optimization problems in the theory of continuous trading. *SIAM. J. Control and Optimization*, 1987, **27**(5): 1221–1259.

[4] Lakner P. Utility maximization with partial information. *Stochastic Process Appl.*, 1995, **56**(2): 247–273.

[5] Lakner P. Optimal trading strategy for an invester: the case of partial information. *Stochastic Process Appl.*, 1998, **76**: 77–97.

[6] Liptser R S, Shiryayev A N. Statistics of Random Process. New York: Springer-Verlag, 1977.

[7] El Karoui N, Peng S and Quenez M C. Backward stochastic differential equations in finance. *Mathematical Finance*, 1997, **7**(1): 1–71.

A BLACK-SCHOLES FORMULA FOR OPTION PRICING WITH DIVIDENDS AND OPTIMAL INVESTMENT PROBLEMS UNDER PARTICAL INFORMATION

Wu Zhen

(*School of Mathmatics and System Sciences, Shandong University, Jinan* 250100)

Wang Guangchen

(*School of Mathmatics and System Sciences, Shandong University, Jinan* 250100;

School of Mathematical Sciences, Shandong Normal University, Jinan 250014)

Abstract　Using the convex analysis and filtering technique, a Black-Scholes formula for option pricing with dividends under partial information is obtained, where the borrowing rate R is not equal to the interest rate r. The optimal investment strategy for maximizing terminal wealth problem under partial information is also obtained in this paper.

Key words　Nonlinear filtering, option pricing, backward stochastic differential equations, investment portfolio.