系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
13 (4) (1993), 297—304

带粘性的非齐次二次 2×2 双曲守恒律方程组解的存在性与渐近性

陆云光　朱长江
（中国科学院武汉数学物理研究所，武汉　430071）

一、引　言

本文考虑带粘性的非齐次二次 2×2 双曲守恒律方程组

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}(au^2 + 2buv + v^2)_x + f(u) = \varepsilon u_{xx}, \\ v_t + \dfrac{1}{2}(bu^2 + 2uv)_x + g(v) = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \tag{1.1}$$

具有初值

$$(u,v)(x,0) = (u_0(x), v_0(x)) \tag{1.2}$$

的 Cauchy 问题解的存在性与渐近性.

对于一般的 2×2 二次流守恒律方程组

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}(a_1u^2 + 2b_1uv + c_1v^2)_x = 0, \\ v_t + \dfrac{1}{2}(a_2u^2 + 2b_2uv + c_2v^2)_x = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

的研究是很有意义的. 因为(1.3)式的解可以在一个孤立点的邻域，逼近一个在此孤立点为非严格双曲的一般 2×2 守恒律组的解. Schaeffer, D. G. 与 Shearer, M. 在文[8]中证明了当方程组(1.3)是双曲型时，存在一个非奇异的线性变换将(1.3)式变成标准形式

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}(au^2 + 2buv + v^2)_x = 0, \\ v_t + \dfrac{1}{2}(bu^2 + 2uv)_x = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

对(1.4)式，Isaacson, F., Marchesin, D., Plohr, B. 和 Temple, B. 等首先在文[4, 5]中考虑了当参数分别为 $b=0, 1<a<2$ 或 $b=0, a>2$ 时，(1.4)式的 Riemann 问题. 文[3]就 $b=0, a>2$ 时讨论了激波的相互作用.

有许多文章[9,10]研究了带粘性的 2×2 严格双曲守恒律方程组解的性态，尤其是气体动力学方程组[11-14]和弹性力学方程组[1]. 但是更重要的而且更困难的是非严格双曲型方

1991 年 6 月 22 日收到.

程组. 在我们的问题中，当 $a+1=b^2$ 时，方程组在直线 $bu+v=0$ 上为非严格双曲的. 当 $a+1\neq b^2$ 时，方程组在原点为非严格双曲的. 而且当 $b=0$ 时，第一特征值在 $u\geqslant 0, v=0$ 上线性退化；第二特征值在 $u\leqslant 0, v=0$ 上线性退化. 值得指出的是，文[15]讨论了 $f\equiv g\equiv 0$, $b=0, a>1$ 时方程组(1.1)的 Cauchy 问题解的性态，其中解的先验界是由不变区域得到的. 但当 $a<1$ 时，由于所得的不变区域无界，因此无法用此方法得到整体解的存在性. 另外，Fitzgibbon 在文[16]中就 $b=0, a=-1, f\equiv g\equiv 0$ 得到了(1.1)式、(1.2)式的整体解的存在性. 本文用能量积分的方法，得到了 Cauchy 问题(1.1)式、(1.2)式解的先验 L^∞-估计，进而得到了整体解的存在性，并用能量积分的方法得到了解的渐近性.

二、 整体解的存在性与渐近性

本节考虑 Cauchy 问题(1.1)、(1.2)式整体解的存在性与渐近性. 不失一般性，令 $\varepsilon=1$.

我们对初值 $(u_0(x), v_0(x))$ 及函数 $f(u), g(v)$ 作如下假设：

$$uf+vg\geqslant 0, \tag{2.1}$$

$$f\in C^3, g\in C^3. \tag{2.2}$$

$$f(0)=g(0)=f'(0)=g'(0)=0,\ f'\geqslant 0, g'\geqslant 0. \tag{2.3}$$

$$(u_0(x), v_0(x))\in W^{2,\infty}(R)\cap H^2(R). \tag{2.4}$$

则有如下的结论：

定理 2.1. 若 $(u_0(x), v_0(x))$ 满足(2.4)式，f, g 满足(2.1)—(2.3)式，则 Cauchy 问题(1.1)，(1.2)存在唯一的整体古典解 (u, v) 且满足

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{x\in R}(|u(x,t)|+|v(x,t)|)=0. \tag{2.5}$$

本定理的证明由下面一系列引理来完成：

引理 2.2(局部解的存在性引理). 若定理 2.1 的条件满足，则 Cauchy 问题(1.1)，(1.2)在区域 $\Pi=\{(x,t)\,|\,0\leqslant t\leqslant t_1, -\infty<x<+\infty\}$ 上存在唯一的古典解 (u, v)，且满足

$$\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|+\left|\frac{\partial^i v}{\partial x^i}\right|\leqslant \overline{M}(t_1)<+\infty \qquad (i=0,1,2), \tag{2.6}$$

$$\left|t^{1/2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|+\left|t^{1/2}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right|\leqslant \overline{M}(t_1)<+\infty. \tag{2.7}$$

这里 $\overline{M}(t_1)$ 为一仅与 t_1 有关的常数，而 t_1 仅与 $\|u_0\|_\infty$, $\|v_0\|_\infty$ 有关.

证明思路：用标准的方法将求解 Cauchy 问题(1.1)，(1.2)转化成求相应积分方程的解. 用迭代法解此积分方程得一迭代解序列 $\{(u^n, v^n)\}$. 然后仿文[11]可证明 $\left\{\frac{\partial^i u_n}{\partial x^i}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^i v_n}{\partial x^i}\right\}$, $\left\{\frac{\partial v_n}{\partial t}\right\}$ 在 Π 上分别一致收敛于 $\frac{\partial^i u}{\partial x^i}, u_t, \frac{\partial^i v}{\partial x^i}, v_t\ (i=0,1,2)$ 进而 (u, v) 为 Cauchy 问题(1.1)，(1.2)的古典局部解.

至于(2.6)，(2.7)式，对迭代解序列用归纳法易证其成立.

引理 2.3. 引理 2.2 中得到的解 (u, v) 满足

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\partial^i}{\partial x^i}(u,v)=(0,0), \tag{2.8}$$

在$[0,t_1]$上一致成立. 这里 $i=0,1,2$.

证. 设$\{(u_n,v_n)\}$为引理 2.2 中以(u,v)为极限函数的迭代序列. 我们易证对任意的正整数 n. 有

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{\partial^i}{\partial x^i}(u_n,v_n)=(0,0), \tag{2.9}$$

在 $[0,t_1]$上一致成立,这里 $i=0,1,2$.

我们仅就 $i=0$ 的情形给出证明,其余的可以类似证得. 事实上,由(2.4)式,有

$$\lim_{|x|\to+\infty}(u_0(x),v_0(x))=(0,0).$$

即对$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ X>0$,当$|x|\geqslant X$ 时,有$|u_0(x)|<\varepsilon$,$|v_0(x)|<\varepsilon$. 从而当$|x|\geqslant X$ 时,对一切$t\in[0,t_1]$,有

$$|u_1(x_1,t)|=|T(t)u_0|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)u_0(y)dy\right|\leqslant\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t)dy=\varepsilon.$$

因此,$\lim\limits_{|x|\to+\infty}u_1(x,t)=0$ 在$[0,t_1]$上一致成立. 同理可证 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}v_1(x,t)=0$ 在$[0,t_1]$上一致成立.

假设(2.9)对 $n\leqslant m-1$ 时成立. 而$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ X>0$,当$|x|\geqslant X$ 时,对一切 $t\in[0,t_1]$有

$$|u_{m-1}(x,t)|<\varepsilon,\qquad |v_{m-1}(x,t)|<\varepsilon.$$

那么利用 $f(u)$的连续性及 $f(0)=0$,由不等式

$$|u_m(x,t)|\leqslant|T(t)u_0|+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,t-\tau)|f(u_{m-1})|dy$$
$$+\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial G(x-y,t-\tau)}{\partial y}\right|\left(\frac{1}{2}|a||u_{m-1}|^2+|b||u_{m-1}||v_{m-1}|+\frac{1}{2}|v_{m-1}|^2\right)dy$$

立即可得

$$\lim_{|x|\to+\infty}u_m(x,t)=0$$

在$[0,t_1]$上一致成立.

同理可证 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}v_m(x,t)=0$ 在$[0,t_1]$上一致成立.

有了不等式(2.9)以后. 注意到

$$\left.\begin{aligned}\left|\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x^i}\right|&\leqslant\left|\frac{\partial^i u_n(x,t)}{\partial x^i}\right|+\left|\frac{\partial^i u_n(x,t)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x^i}\right|,\\ \left|\frac{\partial^i v(x,t)}{\partial x^i}\right|&\leqslant\left|\frac{\partial^i v_n(x,t)}{\partial x^i}\right|+\left|\frac{\partial^i v_n(x,t)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i v(x,t)}{\partial x^i}\right|,\end{aligned}\right.\qquad i=0,1,2,$$

即可证得(2.8)成立.

引理 2.4. 若(u,v)为引理 2.2 中得到的 Cauchy 问题(1.1),(1.2)的解,则对任意的 $T\in[0,t_1]$,有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2+v^2}{2}\Big|_{t=T}dx+\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2)dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_0^2+v_0^2}{2}dx, \tag{2.10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_x^2+v_x^2}{2}\Big|_{t=T}dx+\frac{1}{5}\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}(u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_{0x}^2+v_{0x}^2}{2}dx$$

$$+5(a^2+b^2+1)(\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2)\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+v_x^2)dx. \tag{2.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_{xx}^2+v_{xx}^2}{2}\Big|_{t=T}dx+\frac{1}{5}\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}(u_{xxx}^2+v_{xxx}^2)dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_{0xx}^2+v_{0xx}^2}{2}dx$$

$$+25(a^2+b^2+1)(\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2)\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}(u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx$$

$$+N\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+u_{xx}^2)dx\right)u_x^2dx+N\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(v_x^2+v_{xx}^2)dx\right)v_x^2dx$$

$$+N\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}(u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx. \tag{2.12}$$

证. 在(1.1)第一式两边乘以 u,第二式两边乘以 v,两者相加,在矩形 $Q=\{(x,t)|-R\leqslant x\leqslant R,0\leqslant t\leqslant T\}$ 上积分,R 为任意一个正数,得到

$$\iint_Q\left[\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)_t+\left(\frac{au^3}{6}+uv^2+bu^2v\right)_x+uf(u)+vg(v)\right]dxdt$$

$$=-\iint_Q(u_x^2+v_x^2)dxdt+\iint_Q(uu_x+vv_x)_xdxdt.$$

故有

$$\int_{-R}^{R}\frac{u^2+v^2}{2}\Big|_{t=T}dx+\int_0^T dt\int_{-R}^{R}(u_x^2+v_x^2)dx$$

$$\leqslant\int_{-R}^{R}\frac{u_0^2+v_0^2}{2}dx+\int_0^T\left(-\frac{au^3}{6}-uv^2-bu^2v+uu_x+vv_x\right)\Big|_{-R}^{R}dt.$$

在上不等式中,由引理 2.2 及(2.8),当取极限 $R\to+\infty$时,有(2.10)成立.

将(1.1)式两边分别对 x 求导,第一式两边乘 u_x,第二式两边乘 v_x,两式相加,并且在 Q 上积分,有

$$\iint_Q\Big[\left(\frac{u_x^2+v_x^2}{2}\right)_t+(auu_x^2+bvu_x^2+2buu_xv_x+2u_xvv_x+uv_x^2)_x$$

$$-auu_xu_{xx}-bu_xu_{xx}v-buu_{xx}v_x-buu_xv_{xx}-vu_{xx}v_x$$

$$-u_xvv_{xx}-uv_xv_{xx}+u_x^2f_u+v_x^2g_v\Big]dxdt$$

$$=\iint_Q[(u_xu_{xx}+v_xv_{xx})_x-(u_{xx}^2+v_{xx}^2)]dxdt.$$

故有

$$\int_{-R}^{R}\frac{u_x^2+v_x^2}{2}\Big|_{t=T}dx+\int_0^T dt\int_{-R}^{R}(u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx\leqslant\int_{-R}^{R}\frac{u_{0x}^2+v_{0x}^2}{2}dx$$

$$+\int_0^T[u_xu_{xx}+v_xv_{xx}-(auu_x^2+bu_x^2v+2buu_xv_x+2u_xvv_x+uv_x^2)]\Big|_{-R}^{R}dt$$

$$+\int_0^T dt\int_{-R}^{R}(auu_xu_{xx}+bu_xu_{xx}v+buu_{xx}v_x+buu_xv_{xx}+u_{xx}vv_x+u_xvv_{xx}+uv_xv_{xx})dx,$$

由不等式 $ab\leqslant 5a^2+\frac{1}{5}b^2$,有

$$\int_{-R}^{R}\frac{u_x^2+v_x^2}{2}\Big|_{t=T}dx+\frac{1}{5}\int_0^T dt\int_{-R}^{R}(u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx\leqslant\int_{-R}^{R}\frac{u_{0x}^2+v_{0x}^2}{2}dx$$

$$+\int_0^T[u_xu_{xx}+v_xv_{xx}-(auu_x^2+bu_x^2v+2buu_xv_x+2u_xvv_x+uv_x^2)]\Big|_{-R}^{R}dt$$
$$+5(a^2+b^2+1)(\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2)\int_0^T dt\int_{-R}^{R}(u_x^2+v_x^2)dx.$$

在上不等式中，两边取极限 $R\to+\infty$ 有(2.11)成立.

在(1.1)式两边对 x 两次求导，再将第一式乘以 u_{xx}；第二式乘以 v_{xx}，两式相加，并在 Q 上积分，有

$$\iint_Q\Big[\Big(\frac{u_{xx}^2+v_{xx}^2}{2}\Big)_t+(3auu_{xx}^2+6buu_{xx}v_{xx}+3bu_{xx}^2v+6u_{xx}vv_{xx}+3uv_{xx}^2)_x$$
$$-5auu_{xx}u_{xxx}-5buu_{xxx}v_{xx}-5buu_{xx}v_{xxx}-5bu_{xx}u_{xxx}v-5u_{xxx}vv_{xx}$$
$$-5u_{xx}vv_{xxx}-5uv_{xx}v_{xxx}+u_{xx}^2f_u+f_{uu}u_x^2u_{xx}+v_{xx}^2g_v+g_{vv}v_x^2v_{xx}\Big]dxdt$$
$$=\iint_Q[(u_{xx}u_{xxx}+v_{xx}v_{xxx})_x-(u_{xxx}^2+v_{xxx}^2)]dxdt.$$

故有

$$\int_{-R}^{R}\frac{u_{xx}^2+v_{xx}^2}{2}\Big|_{t=T}dx+\int_0^T dt\int_{-R}^{R}(u_{xxx}^2+v_{xxx}^2)dx\leqslant\int_{-R}^{R}\frac{u_{0xx}^2+v_{0xx}^2}{2}dx$$
$$+\int_0^T(u_{xx}u_{xxx}+v_{xx}v_{xxx}-3auu_{xx}^2-6buu_{xx}v_{xx}-3bu_{xx}^2v-6u_{xx}vv_{xx}-3uv_{xx}^2)\Big|_{-R}^{R}dt$$
$$+5\int_0^T dt\int_{-R}^{R}(auu_{xx}u_{xxx}+buu_{xxx}v_{xx}+buu_{xx}v_{xxx}+bu_{xx}u_{xxx}v$$
$$+u_{xxx}vv_{xx}+u_{xx}vv_{xxx}+uv_{xx}v_{xxx})dx$$
$$-\int_0^T dt\int_{-R}^{R}(f_{uu}u_x^2u_{xx}+g_{vv}v_x^2v_{xx})dx.$$

由不等式

$$\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^4+v_x^4)dx\leqslant\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+u_{xx}^2)dx\Big)u_x^2dx$$
$$+\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}(v_x^2+v_{xx}^2)dx\Big)v_x^2dx,$$

我们可以得到

$$\Big|\iint_Q(f_{uu}u_x^2u_{xx}+g_{vv}v_x^2v_{xx})dxdt\Big|\leqslant N\iint_Q(u_{xx}^2+v_{xx}^2)dxdt+N\iint_Q(u_x^4+v_x^4)dxdt$$
$$\leqslant N\iint_Q(u_{xx}^2+v_{xx}^2)dxdt+N\int_0^t dt\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2+u_{xx}^2)dx\Big)u_x^2dx$$
$$+N\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}(v_x^2+v_{xx}^2)dx\Big)v_x^2dx,$$

以及不等式 $ab\leqslant25a^2+\frac{1}{25}b^2$，我们有

$$\int_{-R}^{R}\frac{u_{xx}^2+v_{xx}^2}{2}\Big|_{t=T}dx+\frac{1}{5}\int_0^T dt\int_{-R}^{R}(u_{xxx}^2+v_{xxx}^2)dx\leqslant\int_{-R}^{R}\frac{u_{0xx}^2+v_{0xx}^2}{2}dx$$
$$+\int_0^T(u_{xx}u_{xxx}+v_{xx}v_{xxx}-3auu_{xx}^2-6buu_{xx}v_{xx}-3bu_{xx}^2v-6u_{xx}vv_{xx}-3uv_{xx}^2)\Big|_{-R}^{R}dt$$

$$+25(a^2+b^2+1)(\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2)\int_0^T dt\int_{-R}^R(u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx$$

$$+N\int_0^T dt\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty(u_x^2+u_{xx}^2)dx\right)u_x^2dx+N\int_0^T dt\int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty(v_x^2+v_{xx}^2)dx\right)v_x^2dx$$

$$+N\int_0^T dt\int_{-R}^R(u_{xx}^2+v_{xx}^2)dx.$$

在上不等式中，取极限令 $R\to+\infty$，而可得到(2.12)式。

由(2.10)，(2.11)式我们可得到 Cauchy 问题(1.1)，(1.2)的解的一个先验估计，即

引理 2.5. 若(u,v)为 Cauchy 问题(1.1)，(1.2)的解，则有

$$\|u\|_\infty+\|v\|_\infty\leqslant c(u_0,v_0)<+\infty, \tag{2.13}$$

其中，$c(u_0,v_0)$是仅与初值 u_0,v_0 有关的常数.

证.

$$u^2+v^2=2\int_{-\infty}^x uu_xdx+2\int_{-\infty}^x vv_xdx$$

$$\leqslant 2\left(\int_{-\infty}^\infty u^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^\infty u_x^2dx\right)^{1/2}+2\left(\int_{-\infty}^\infty v^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^\infty v_x^2dx\right)^{1/2}$$

$$\leqslant c_1(u_0,v_0)\left(\int_{-\infty}^\infty(u_x^2+v_x^2)dx\right)^{1/2}\qquad(\text{由 }2.10\text{ 式}),$$

又由(2.10)及(2.11)式，有

$$\left(\int_{-\infty}^\infty(u_x^2+v_x^2)dx\right)^{1/2}\leqslant[c_2(u_0,v_0)+c(a,b)(\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2)c_1(u_0,v_0)]^{1/2}.$$

其中

$$c_1(u_0,v_0)=\int_{-\infty}^\infty\frac{u_0^2+v_0^2}{2}dx,$$

$$c_2(u_0,v_0)=\int_{-\infty}^\infty\frac{u_{0x}^2+v_{0x}^2}{2}dx,$$

$$c(a,b)=5(a^2+2b^2+2).$$

令 $y=\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2$. 有 $y^2\leqslant(c_2(u_0,v_0)+c(a,b)c_1(u_0,v_0)y)c_1^2(u_0,v_0)$. 因此，$y\leqslant\frac{1}{2}c(a,b)c_1^2(u_0,v_0)+\frac{1}{2}\sqrt{c^2(a,b)c_1(u_0,v_0)+4c_1^2(u_0,v_0)c_2(u_0,v_0)}$，从而(2.13)式成立.

由引理 2.2 及 2.5，定理 2.1 的前半部分获证. 下面我们证渐近性结果(2.5)式，首先我们给出

引理 2.6. 对连续可微函数 $f(t)\geqslant0$，若

$$\int_0^\infty f(s)ds<+\infty,\qquad\int_0^\infty|f'(s)|ds<+\infty.$$

则

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=0,$$

由(2.10)式有

$$\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty(u_x^2+v_x^2)dx\right)dt\leqslant c_1(u_0,v_0).$$

同样地，由方程组(1.1)，用分部积分及 Cauchy 不等式以及估计式(2.10)—(2.12)式，有

$$\int_0^{\infty}\left(\left|\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx\right|+\left|\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}v_x^2dx\right|\right)dt\leqslant c_3(u_0,v_0).$$

于是由引理 2.6 有

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx=0,\qquad \lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}v_x^2dx=0.$$

此外，由(2.10)式又有

$$\int_{-\infty}^{\infty}u^2dx\leqslant 2c_1(u_0,v_0),\ \int_{-\infty}^{\infty}v^2dx\leqslant 2c_1(u_0,v_0)$$

因此，

$$u^2(x,t)=\int_{-\infty}^{x}(u^2)_xdx\leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}u^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx\right)^{1/2}\to 0\qquad (t\to+\infty),$$

关于 x 一致成立. 同理　$v^2(x,t)\to 0$　　$(t\to+\infty)$，关于 x 一致成立. 因此

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{x\in R}(|u(x,t)|+|v(x,t)|)=0.$$

参　考　文　献

[1] Lu, Yunguang, Existence and asymptotic behavior of solutions to inhomogeneons equations of elasticity with little viscosity, *Nonlinear, Anal. TMA.*, 3:16(1991), 199—207.

[2] Chueh, K. N. C. C. Conley and L. J. A. Smoller, Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations, *Indiana Univ. Math. J.*, **26**:2(1977), 373—391.

[3] Lu, Yunguang and Wang, Jinghua, The interactions of elementary waves of nonstrictly hyperbolic system, *J. Math. Analysis Appl.*, **1**:166(1992), 136—169.

[4] Isaacson, E., Marchsin, D., Plohr, B. and Tenple, B., The classification of solutions of quadratic Riemann Problem (I) Joint MRC, PUC/RJ Report.

[5] Isaacson, E., Temple, B., ibid (I) MRC Report, Univ. of Wisconsin 1985.

[6] Protter, M. and H. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations. Prentice Hall: Engle Wood Cliffs, NJ, 1963.

[7] Smoller, J., Shock Waves and Reaction-diffusion Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] Schaeffer, D. G. and Shearer, M., The classification of 2×2 systems of nonstrictly hyperbolic comservation laws with application to oil recovery, with appendix by D. Marchesin, P. J. Paes-Leme, D. G. Schaeffer and M. Shearer, Preprint, Duke. Univ.

[9] Liu, T. P., Admissible solutions of hyperbolic conservation laws, *Mer. AMS*, **323**(1985), 1—103.

[10] Zhou, ping Xin, *Journal of Differential Equations*, **73**:(1988), 45—77.

[11] Ding, Xiaxi and Wang, Jinghua, Global solutions for a semilinear parabolic system, *Acta. Math. Scientia.*, 3(1983), 397—414.

[12] Lu, Yunguang, *Chin. Sci. Bull.* **35**(1990), 785—786.

[13] Lu, Yunguang, *Chin. Sci. Bull.* **34**(1989), 7—11.

[14] Lu, Yunguang and Xie, Guiliang, *Acta Math. Scientia*, 8(1988), 185—198.

[15] Lu, Yunguang and Zhao, Huijiang, Existence and asymptotic behavior of solutions to 2×2 hyperbolic quadratic conservation laws with small viscosity. *Nonlinear Analysis, TMA*, **16**(1991), 169—180.

[16] Fitzgibbon, W. E., Global existence for a particular convection diffusion system, *Nonlinear Analysis, TMA*, **10** (1986), 1077—1081.

EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO INHOMOGENEOUS 2×2 HYPERBOLIC QUADRATIC CONSERVATION LAWS WITH SMALL VISCOSITY

LU YUN-GUANG ZHU CHANG-JIANG

(*Institute of Mathematical Physics, Academia Sinica, Wuhan* 430071)

ABSTRACT

By the energy method, we obtain the existence and asymptotic behavior of solutions to inhomogeneous 2×2 hyperbolic quadratic conservation laws with viscosity

$$\begin{cases} u_t + \dfrac{1}{2}(au^2 + 2buv + v^2)_x + f(u) = \varepsilon u_{xx}, \\ v_t + \dfrac{1}{2}(bu^2 + 2uv)_x + g(v) = \varepsilon v_{xx}, \end{cases}$$

with initial data

$$(u,v)(x,0) = (u_0(x), u_0(x)),$$

where a, b and $\varepsilon > 0$ are constants.