系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
14(4) (1994), 333—336

加权移位算子的拟相似与谱

许 风 卢玉峰

(东北师范大学数学系，长春 130024)

设H是复可分 Hilbert 空间，$L(H)$ 表示H上有界线性算子全体，Z是整数全体，Z^+是非负整数全体，$I=Z$或 Z^+，$\{e\}_{n\in I}$ 是H的正规正交基，$\{\alpha_n\}_{n\in I}$ 是有界数列，K是一个自然数，若 $T\in L(H)$，$Te_n=\alpha_n e_{n+K}$ $(n\in I)$，则称T为加权K次移位算子，如果$I=Z$，则称T为双边加权K次移位．$K=1$时，T为通常的双边加权移位算子；如果$I=Z^+$则T为单边加权K次移位．$K=1$时，T为通常的单边加权移位．我们将上述双边加权K次移位记为 $W_\alpha^{(K)}$，单边加权K次移位记为 $T_\alpha^{(K)}$．

设 H_j $(j=1,2,\cdots,M)$ 都是可分复 Hilbert 空间，$W_{\alpha(j)}^{(K)}$ 是 H_j 上双边加权K次移位，称算子$W=\sum\limits_{j=1}^{M}W_{\alpha(j)}^{(K)}$ 为 $H=\sum\limits_{j=1}^{M}\oplus H_j$ 上M重双边加权K次移位．类似可以定义 $H=\sum\limits_{j=1}^{M}\oplus H_j$ 上M重单边加权K次移位 $T=\sum\limits_{j=1}^{M}T_{\alpha(j)}^{(K)}$．在本文中，总假定加权移位的权序列是有界正实数列．

设 H_1，H_2 是复 Hilbert 空间，$L(H_i,H_j)$ 表示 H_i 到 H_j 的有界线性算子全体 $(i,j=1,2)$，对 $A\in L(H_1)$，$B\in L(H_2)$，如果存在单射且稠值域算子 $X\in L(H_2,H_1)$，$Y\in L(H_1,H_2)$，使得 $AX=XB$，$BY=YA$，则称算子 A,B 拟相似．

设 W_α 是单射双边加权移位，权序列 $\alpha=\{\alpha_n\}_{n\in Z}$，记

$$r_i^+(W_\alpha)=\lim_{n\to\infty}\inf_{K\geq -1}(\alpha_{K+1}\cdots\alpha_{K+n})^{\frac{1}{n}},$$

$$r_i^-(W_\alpha)=\lim_{n\to\infty}\inf_{K\leq 0}(\alpha_{K-1}\cdots\alpha_{K-n})^{\frac{1}{n}},$$

$$r_s^+(W_\alpha)=\lim_{n\to\infty}\sup_{K\geq -1}(\alpha_{K+1}\cdots\alpha_{K+n})^{\frac{1}{n}},$$

$$r_s^-(W_\alpha)=\lim_{n\to\infty}\sup_{K\leq 0}(\alpha_{K-1}\cdots\alpha_{K-n})^{\frac{1}{n}}.$$

对 $T\in L(H)$，$\sigma(T)$，$\sigma_e(T)$ 分别表示T的谱和本质谱，$\sigma_{ap}(T)$表示T的近似点谱，$\sigma_W(T)$ 表示T的 Weyl 谱，即 $\sigma_W(T)=\cap\{\sigma(T+K);K\in B_0(H)\}$，其中 B_0 是紧算子的理想．

近似点谱是相似不变量，但它不是拟相似不变量，这是众所周知的，也容易看出 Weyl 谱是相似不变量，下面举例说明 Weyl 谱不是拟相似不变量．

1991 年 12 日 24 日收到．

例. 由文[1]命题 4.1 知,存在压缩算子 T_0,使 T_0 拟相似一个酉算子 U,且满足 $\sigma(T_0)=\sigma_e(T_0)=\{\lambda:\lambda$ 是复数, $|\lambda|\leqslant 1\}$.

令 $P_n(T)=\{\lambda\in\sigma(T), T-\lambda$ 是半 Fredholm 算子,且 $\operatorname{ind}(T-\lambda)=n\}$,其中 ind 表示算子的指标,即 $\operatorname{ind}T=\dim\ker T-\dim\ker T^*$,则由文[2],

$$\sigma_W(T)=\sigma_e(T)\cup\bigcup_{n\neq 0}P_n(T).$$

显然 $0\in\sigma_e(T_0)\subset\sigma_W(T_0)$,但$U$为酉算子,故 $\ker U=\ker U^*=\{0\}$,从而 $0\bar{\in}\sigma_W(U)$.

下面讨论在什么条件下拟相似的算子 Weyl 谱相等.

定理 1. $T,S\in L(H)$,T和S拟相似, $\sigma_e(T)=\sigma_e(S)$,则 $\sigma_W(T)=\sigma_W(S)$.

证. 因 $\sigma_W(T)=\sigma_e(T)\cup\bigcup\limits_{n\neq 0}P_n(T)$,$\sigma_W(S)=\sigma_e(S)\cup\bigcup\limits_{n\neq 0}P_n(S)$,由对称性,只须证 $\sigma_W(T)\subset\sigma_W(S)$. 对 $\lambda\in\sigma_W(T)$, 若有 $\lambda\in\sigma_e(T)$,则由条件知 $\lambda\in\sigma_W(S)$;若 $\lambda\bar{\in}\sigma_e(T)$,则$T-\lambda$是 Fredholm 算子且存在自然数 $n\neq 0$,使得 $\operatorname{ind}(T-\lambda)=n$,由$T$和$S$拟相似易知 $\operatorname{ind}(S-\lambda)=\operatorname{ind}(T-\lambda)=n\neq 0$,又 $\lambda\bar{\in}\sigma_e(T)=\sigma_e(S)$, 故 $\lambda\in P_n(S)$, 从而 $\sigma_W(T)\subset\sigma_W(S)$.

设 $\sigma_{re}(T)$, $\sigma_{le}(T)$ 分别表示算子T的右本质谱与左本质谱.

定理 2. $T,S\in L(H)$,T 和S拟相似, $\sigma_{re}(T)\cap\sigma_{le}(T)=\sigma_{re}(S)\cap\sigma_{le}(S)$,则 $\sigma_W(T)=\sigma_W(S)$.

证. 因 $\sigma_W(T)=\sigma_e(T)\cup\bigcup\limits_{n\neq 0}P_n(T)$,$\sigma_W(S)=\sigma_e(S)\cup\bigcup\limits_{n\neq 0}P_n(S)$,由对称性,只须证 $\sigma_W(T)\subset\sigma_W(S)$. 对 $\lambda\in\sigma_W(T)$,假定 $\lambda\in\sigma_e(T)$,若 $\lambda\in\sigma_{re}(T)\cap\sigma_{le}(T)$, 则由定理条件易知有 $\lambda\in\sigma_W(S)$;若 $\lambda\bar{\in}\sigma_{re}(T)\cap\sigma_{le}(T)$,则$T-\lambda$是半 Fredholm 算子,且 $\operatorname{ind}(T-\lambda)=n\neq 0$, 由$T$和$S$拟相似及$S-\lambda$也是半 Fredholm 算子知 $\lambda\in\sigma_W(S)$; 如果有 $\lambda\bar{\in}\sigma_e(T)$,则有 $\lambda\bar{\in}\sigma_{re}(T)\cap\sigma_{le}(T)$,$T-\lambda$是 Fredholm 算子,且 $\operatorname{ind}(T-\lambda)=n\neq 0$,从而$S-\lambda$是半 Fredholm 算子,且 $\operatorname{ind}(S-\lambda)=n\neq 0$, 故 $\lambda\in\sigma_W(S)$, 从而总有 $\lambda\in\sigma_W(S)$. 故 $\sigma_W(T)\subset\sigma_W(S)$.

推论 1. 设 W_α,W_β 均为单射双边加权移位算子,如果 W_α 和 W_β 拟相似,则$\sigma_W(W_\alpha)=\sigma_W(W_\beta)$.

证. 由文[3]定理 3 和上面定理 1 立即可得.

推论 2. 设 T_α, T_β 均为单射单边加权移位算子,如果 T_α 和 T_β 拟相似,则

$$\sigma_W(T_\alpha)=\sigma_W(T_\beta).$$

证. 由文[4]知 T_α 和 T_β 相似,故 $\sigma_W(T_\alpha)=\sigma_W(T_\beta)$.

下面讨论拟相似的加权移位算子的近似点谱等价性.

引理 1[5]**.** T是单射双边加权移位算子,如果 $r_1^-(T)<r_1^+(T)$,则

$$\sigma_{ap}(T)=\{r_i^-(T)\leqslant|z|\leqslant r_1^-(T)\}\cup\{r_i^+(T)\leqslant|z|\leqslant r_1^+(T)\},$$

否则

$$\sigma_{ap}(T)=\sigma(T)=\{\min(r_i^-(T),r_i^+(T))\leqslant|z|\leqslant\max(r_1^-(T),r_1^+(T))\}.$$

定理 3. T_α,T_β 为单射单边加权移位算子, T_α 和 T_β 拟相似,则

$$\sigma_{ap}(T_\alpha)=\sigma_{ap}(T_\beta).$$

证. 由文[4]知 T_α 和 T_β 相似，故 $\sigma_{ap}(T_\alpha)=\sigma_{ap}(T_\beta)$.

定理 4. W_α, W_β 是单射双边加权移位算子，如果有 W_α 和 W_β 拟相似，则

$$\sigma_{ap}(W_\alpha)=\sigma_{ap}(W_\beta).$$

证. 由引理 1 及文[3]定理 3 的证明即知有 $\sigma_{ap}(W_\alpha)=\sigma_{ap}(W_\beta)$.

定理 5. W_α, W_β 是控制边加权移位算子，如果 W_α 和 W_β 拟相似，则

$$\sigma_{ap}(W_\alpha)=\sigma_{ap}(W_\beta)$$

（称算子 T 为控制算子是指存在 $M_\lambda\geqslant 0$，使得对任意 $x\in H$，有 $\|(T-\lambda)^*x\|\leqslant M_\lambda\|(T-\lambda)x\|$）.

证. 由于 W_α 和 W_β 拟相似，故存在单射且稠值域算子 X，Y 使得 $XW_\alpha=W_\beta X$，$W_\alpha Y=YW_\beta$，于是 $\dim\ker W_\alpha=\dim\ker W_\beta$，因此 W_α 和 W_β 都是单射或都是非单射，由定理 4，我们只须考虑 W_α 和 W_β 都是非单射情形. 不失一般性可以假定 $\ker W_\alpha=\ker W_\beta$，由于 W_α 和 W_β 都是控制算子，故 $\ker W_\alpha\subseteq\ker W_\alpha^*$，$\ker W_\beta\subseteq\ker W_\beta^*$，因此 $(\ker W_\alpha)^\perp$ 是 W_α 和 W_β 的约化子空间. W_α, W_β, X 和 Y 关于 $H=(\ker W_\alpha)^\perp\oplus(\ker W_\alpha)$ 的矩阵表示分别为

$$\begin{bmatrix}W_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}W_2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}X_1 & 0\\ X_2 & X_3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}Y_1 & 0\\ Y_2 & Y_3\end{bmatrix}.$$

其中 $W_1=W_\alpha|(\ker W_\alpha)^\perp$，$W_2=W_\beta|(\ker W_\beta)^\perp=W_\beta|(\ker W_\alpha)^\perp$. 易知 X_1, Y_1 在 $(\mathrm{Ker} W_\alpha)^\perp$ 上是单射且有稠值域，由 $XW_\alpha=W_\beta X, W_\alpha Y=YW_\beta$ 得到 $X_1W_1=W_2X_1, W_1Y_1=Y_1W_2$，因此 W_1 和 W_2 拟相似. 又 W_α，W_β 是非单射双边加权移位，故 W_1，W_2 是单射单边加权移位. 由文[4]知 W_1, W_2 相似，从而 W_α 和 W_β 相似，故 $\sigma_{ap}(W_\alpha)=\sigma_{ap}(W_\beta)$.

定理 6. $T=\sum\limits_{j=1}^{M}W_{\alpha(j)}^{(K)}$，$S=\sum\limits_{j=1}^{M}W_{\beta(j)}^{(K)}$ 都是 $H=\sum\limits_{j=1}^{M}\oplus H_j$ 上 M 重单射双边加权 K 次移位，如果 T, S 拟相似，则 $\sigma_{ap}(T)=\sigma_{ap}(S)$.

证. 设 $\{e_n^{(j)}\}_{n\in Z}$ 是 H_j $(j=1,2,\cdots,M)$ 的正规正交基，$W_{\alpha(j)}^{(K)}$ 是 H_j 上具有权列 $\alpha(j)=\{\alpha_n^{(j)}\}_{n\in Z}$ 的单射双边加权 K 次移位算子，记 H_{ji} 为 $\{e_{Kn+i-1}^{(j)}\}$ $(i=1,2,\cdots,K)$ 张成的闭线性子空间，$W_{\alpha(j)i}$ 是 H_{ji} 上具有权列 $\alpha(j)i=\{\alpha_{Kn+i-1}^{(j)}\}_{n\in Z}$ 的单射双边加权移位算子，则 $W_{\alpha(j)}^{(K)}$ 酉等价 K 重单射双边加权移位 $\sum\limits_{i=1}^{K}W_{\alpha(j)i}$，于是 T 酉等价 $\sum\limits_{j=1}^{M}\sum\limits_{i=1}^{K}W_{\alpha(j)i}$，同理 S 酉等价 MK 重单射双边加权移位 $\sum\limits_{j=1}^{M}\sum\limits_{i=1}^{K}W_{\beta(j)i}$. 从而

$$\sigma_{ap}(T)=\bigcup_{j=1}^{M}\bigcup_{i=1}^{K}\sigma_{ap}(W_{\alpha(j)i}),\ \sigma_{ap}(S)=\bigcup_{j=1}^{M}\bigcup_{i=1}^{K}\sigma_{ap}(W_{\beta(j)i}).$$

由定理 4 及文[6]中定理 4 知 $\sigma_{ap}(S)=\sigma_{ap}(T)$.

参　考　文　献

[1] Foias, C. Pearcy, and D. Voiculesu, The Staircase representation of biquasitriangular operators, *Michigan Math. J.*, **22**(1975), 343—352.

[2] Conway, J-B., A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985.

[3] 严子谦，N 重加权 M 次移位算子的拟相似，数学研究与评论，**3**: 11(1991)，365—371.

[4] Alan Leslie Lambert, Strictly cyclic operator algebras, Dissertation, University of Michigan, *Ann Arbor, Mich.*, 1970.
[5] Shields, A. L., Math. surveys, *Amer. Math. Soc.* Providence, R. I., **13**: (1974), 49—128.
[6] 孟庠，N重加权移位算子的拟相似和谱，数学年刊 (A), **9**:2(1988), 110—118.

QUASI-SIMILARITY OF WEIGHTED SHIFTS OPERATORS AND SPECTRUM

Xu Feng Lu Yu-Feng
(*Department of Mathematics, Northeast Normal University, Changchun* 130024)

ABSTRACT

In this paper we point out that quasisimilar operators need not to preserve the Weyl spectrum and we show that quasisimilar injective bilateral weighted shifts of multiplicity M and degree K have equal approximate point spect rum