系统科学与数学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
11(4) (1991), 299—305

简单分歧的迭代解

刘 波
(中国科学院成都分院数理室,610015)

§1. 引 言

出于实际的需要,分歧的数值解法一直受到工程界和理论界的注目,从70年代以来,分歧的数值计算[1,4,5,7-9,12,13]已有了很大的发展.由于分歧点的奇异性和非线性性带来的巨大工作量,怎样提高分歧近似解的精度呢?分歧的奇异性使我们不能类似于[10],直接证得其 Galerkin 近似分歧解经过简单迭代就可提高收敛速度. 为此,我们先给出一种有高精度近似分歧解的离散格式, 进而证明离散 Galerkin 分歧解经过一定的迭代(就微分方程而言,通常再解一次非奇异的线性方程)就可获得更快的收敛速度.为方便起见,先给出几个有关的条件.

H_1) 设 X 是一可分 Banach 空间, $A:X\to X$ 为全连续非线性算子. $A\theta=\theta$, A 在 θ 的邻域 U 内 Fréchet 连续可微. $\lambda_0\neq 0$ 是 $A'(\theta)$ 的简单本征值.

H_2) $\{S_n\}$ 是 X 中的一列有限维子空间,使得 $\bigcup\limits_1^\infty S_n$ 在 X 中稠, $P_n:X\to S_n$ 为有界线性投影. P_n 强收敛于单位算子 I.

H_3) A 在 θ 的邻域 U 内 $l(l\geqslant 2)$ 阶 Fréchet 可微,且存在常数 d_0,使 $\|A^{(l)}(x)\|\leqslant d_0$, $\forall x\in U$.

H_4) 存在整数 $\gamma\leqslant l-1$,使 $A''(\theta)=\theta,\cdots,A^{(\gamma)}(\theta)=\theta$, $A^{(\gamma+1)}(\theta)\neq\theta$.

考虑如下单参数算子方程:

$$\lambda x = Ax, \qquad x\in X \tag{1}$$

及离散 Galerkin 方程和离散 Sloan 方程:

$$\lambda x = P_nAx, \qquad x\in X, \tag{2}$$

$$\lambda x = AP_nx, \qquad x\in X. \tag{3}$$

作者在[11]中给出了离散 Galerkin 方程(2)的分歧的存在性及误差估计(也见[4,5]).为对比, §2 给出离散方程(2),(3)的分歧解的局部结构及 Galerkin 近似方程的求解方法. §3 给出离散方程(2)和(3)的误差估计. 在§4中, 我们将给出迭代 Galerkin 近似分歧解的误差估计和对 Урысон 积分方程的应用.

数学特别基金——青年基金资助课题.
1989年6月17日收到.

§2. 分歧解的局部结构

若 H_1) 成立，易知 λ_0 是方程 (1) 的一个分歧点[15]. 基于 Lyapunov-Schmit 方法和隐函数定理[4,5,8,13,15]或不动点理论[1,14],则在一定的条件下可将 λ_0 附近的分歧解构造出来. 由 H_1) 有

$$X = N(\lambda_0 I - A'(\theta)) \oplus Z(\lambda_0 I - A'(\theta)), \tag{4}$$

其中 $N(\lambda_0 I - A'(\theta)) = \{\varphi \in X;\ (\lambda_0 I - A'(\theta)\varphi = \theta\}$, $Z(\lambda_0 I - A'(\theta)) = (\lambda_0 I - A'(\theta))X$ 都是 $A'(\theta)$ 的不变子空间. $E: X \to N(\lambda_0 I - A'(\theta))$, $F: X \to Z(\lambda_0 I - A'(\theta))$ 分别是由(4)确定的直和分解投影. 易知[1,2,6] $E = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - A'(\theta))^{-1} d\lambda$. 其中 Γ 表复平面中只包含 $A'(\theta)$ 的唯一谱点在其内部的任一连续闭曲线. 下恒设 $\varphi_0 \in N(\lambda_0 I - A'(\theta))$ 为规范本征元. 由[3,6]知, n 充分大时,假定 H_2) 成立,则 $P_n A'(\theta)$ 及 $A'(\theta)P_n$ 在 Γ 内存在唯一的本征值 λ_n 及 $\hat{\lambda}_n$,由[12]引理 3 有 $\lambda_n = \hat{\lambda}_n$. 假设 φ_n 及 $\hat{\varphi}_n$ 分别表 $P_n A'(\theta)$ 及 $A'(\theta)P_n$ 对应于本征值 λ_n 的规范本征元. 利用[1,14]中类似的方法可得(部分结果直接引至[11])

定理 1. 设 H_1)—H_3) 成立,则存在 $C_0 > 0$, $N_0 \geq 1$, 使得 $n \geq N_0$ 时, $P_n A'(\theta)$ 和 $A'(\theta)P_n$ 在 Γ 内存在唯一的本征值 λ_n 和以 c 为参数的唯一非平凡的一致连续函数 $\nu(c)$, $\delta(c)$; $\nu_n(c)$, $\delta_n(c)$; $\hat{\nu}_n(c)$, $\hat{\delta}_n(c)$; $|c| \leq C_0$, $\nu(0) = \nu_n(0) = \hat{\nu}_n(0) = \theta$, $\delta(0) = \delta_n(0) = \hat{\delta}_n(0) = 0$ 满足

$$\begin{cases} x(c) = c\varphi_0 + c\nu(c);\ x_n(c) = c\varphi_n + c\nu_n(c); \\ \hat{x}_n(c) = c\hat{\varphi}_n + c\hat{\nu}_n(c). \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} Ax(c) = (\lambda_0 + \delta(c))x(c);\ P_n A x_n(c) = (\lambda_n + \delta_n(c))x_n(c); \\ AP_n\hat{x}_n(c) = (\lambda_n + \hat{\delta}_n(c))\hat{x}_n(c). \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} |\delta(c)| \sim |\delta_n(c)| \sim |\hat{\delta}_n(c)| \sim O(|c|) \\ \|\nu(c)\| \sim \|\nu_n(c)\| \sim \|\hat{\nu}_n(c)\| \sim O(|c|). \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \nu(c) \in Z(\lambda_0 I - A'(\theta));\ \nu_n(c) \in Z(\lambda_n I - P_n A'(\theta)); \\ \nu_n(c) \in Z(\lambda_n I - A'(\theta)P_n). \end{cases} \tag{8}$$

又若条件 H_4) 成立,则(7)中的 $O(|c|)$ 可换为 $O(|c|^\gamma)$.

设 φ_0^*, φ_n^*, $\hat{\varphi}_n^*$ 分别表 φ_0, φ_n, $\hat{\varphi}_n$ 的共轭元，同 E, F 一样，令 E_n, F_n 分别表 X 到 $N(\lambda_n I - P_n A'(\theta))$, X 到 $Z(\lambda_n I - P_n A'(\theta))$ 的直和分解投影. $\hat{E}_n$, $\hat{F}_n$ 分别表 X 到 $N(\lambda_n I - A'(\theta)P_n)$, X 到 $Z(\lambda_n I - A'(\theta)P_n)$ 的直和分解投影, d 恒表与 n, c 无关的常数. 则 $\delta(c)$, $\delta_n(c)$, $\hat{\delta}_n(c)$ 有更精确的表达式(参见[14] p.312). 当 $EA^{(\gamma+1)}(\theta)\cdot\varphi_0^{\gamma+1} \neq \theta$ 时, 类似于 [1] 引理的证明, 不难得到 n 充分大时, $(\lambda_0 + \delta(c))I - A'(x(c))$; $(\lambda_n + \delta_n(c))I - P_n A'(x_n(c))$; $(\lambda_n + \hat{\delta}_n(c))I - A'(\hat{x}_n(c))P_n$ $c \neq 0$ 是可逆的. 从而可由 Newton 迭代法求解. 但为了克服在求解离散 Galerkin 方程 (2) 的分歧解的 Newton 迭代过程中 $(\lambda_n + \delta_n(c))I - P_n A'(x_n(c))$ 的近似奇异性,代替求离散 Galerkin 方程,我们求解如下系统: 求 $(\varphi_n\ \nu_n(c), \delta_n(c)) \in N(\lambda_n I - P_n A'(\theta)) \times Z(\lambda_n I - P_n A'$

$\cdot(\theta)) \times R \subset X_n \times X_n \times R$，使

$$\lambda_n \varphi_n = P_n A'(\theta)\varphi_n;\ (\varphi_n \varphi_n^*) = 1, \tag{9}$$

$$\begin{cases} c(\lambda_n + \delta_n(c))\varphi_n - (P_n A(c\varphi_n + c\nu_n(c)), \varphi_n^*)\varphi_n = 0, \\ c(\lambda_n + \delta_n(c))\nu_n(c) - P_n A(c\varphi_n + c\nu_n(c)) + (P_n A(c\varphi_n + c\nu_n(c)), \varphi_n^*)\varphi_n = 0. \end{cases} \tag{10}$$

即先求本征值问题(9)[11]代入(10)再求一非奇异方程组．事实上，此时 Newton 迭代过程为，给定 $(\nu_n^k(c), \delta_n^k(c))$，由(10)第一方程求出 $\delta_n^{k+1}(c)$，由(10)第二方程用 $\nu_n^k(c)$，$\delta_n(c) = \delta_n^k(c)$ 进行 Newton 迭代求出 $\nu_n^{k+1}(c)$．易知方程组 (10) 等价于方程组：置 $x_n(c) = c\varphi_n + c\nu_n(c)$，

$$\begin{cases} E_n((\lambda_n + \delta_n(c))x_n(c) - P_n A(x_n(c))) = \theta, \\ F_n((\lambda_n + \delta_n(c))x_n(c) - P_n A(x_n(c))) = \theta. \end{cases} \tag{11}$$

从而等价于 Galerkin 方程(2)．类似于[4]由(7)不难证得上 Newton 迭代过程是非奇异或非近似奇的(参见[4],[5],也见 § 3 中类似的证明(23)式)．当然，我们也可用其它直接方法求解离散 Galerkin 方程(2),[7,9,12]．

§ 3. 误 差 估 计

定理 2. 假定 H$_1$)—H$_3$) 成立．则存在 $C_0 > 0, N_0 \geqslant 1$,使得 $n \geqslant N_0$ 时,如下估计式对 $0 < |c| \leqslant C_0$ 成立:

$$\|x_n(c) - x(c)\|/\|x(c)\| \leqslant d[\|(I - P_n)\varphi_0\| + \|(I - P_n)\nu(c)\| + \|(I - P_n)A'(\theta)\|], \tag{12}$$

$$|\lambda_n(c) - \lambda(c)| \leqslant d[\|(I - P_n)\varphi_0\| + \|(I - P_n)\nu(c)\| + \|(I - P_n)A'(\theta)\|], \tag{13}$$

$$\|\hat{x}_n(c) - x(c)\|/\|x(c)\| \leqslant d\Lambda(c), \tag{14}$$

$$|\hat{\lambda}_n(c) - \lambda(c)| \leqslant d\Lambda(c), \tag{15}$$

其中 $\lambda(c) = \lambda_0 + \delta(c)$; $\lambda_n(c) = \lambda_n + \delta_n(c)$; $\hat{\lambda}_n(c) = \lambda_n + \hat{\delta}_n(c)$. $\Lambda(c) = \|(I - P_n)\varphi_0\| \cdot [\|A'(\theta)(I - P_n)\| + \|A'(x(c))(I - P_n)\| + \|(I - P_n)\varphi_0\|] + \|(I - P_n) \cdot \nu(c)\| \cdot [\|A'(\theta)(I - P_n)\| + \|A'(x(c))(I - P_n)\| + \|(I - P_n)\nu(c)\|] + \|A'(\theta)(I - P_n)\| \cdot [\|(I - P_n)A'(\theta)\| + \|(I - P_n)A'(x(c))\|] + \|A'(x(c))(I - P_n)\| \cdot \|(I - P_n) \cdot A'(x(c))\|$.

证．(12),(13) 两式即为 [11] 中定理 2．为证 (14),(15) 两式，令 $Tx = Ax - A'\cdot(\theta)x$; $\hat{T}_n x = AP_n x - A'(\theta)P_n x; \forall x \in X$．由 (4) 及 (6) 有 $Tx(c) - \delta(c)x(c) = (\lambda_0 I - A'(\theta))x(c)$, $\hat{T}_n \hat{x}_n(c) - \hat{\delta}_n(c)\hat{x}_n(c) = (\lambda_n I - A'(\theta)P_n)\hat{x}_n(c)$，用 $E, \hat{E}_n$ 分别作用上等式两端有

$$c\delta(c)\varphi_0 = ETx(c); \quad c\hat{\delta}_n(c)\hat{\varphi}_n = \hat{E}_n \hat{T}_n \hat{x}_n(c). \tag{16}$$

由 $(\delta(c) - \hat{\delta}_n(c))\hat{\varphi}_n = \delta(c)(\hat{\varphi}_n - \varphi_0) + \delta(c)\varphi_0 - \hat{\delta}_n(c)\hat{\varphi}_n$,两边取范并由(16)式得．$c \neq 0$ 时，

$$|\delta(c) - \hat{\delta}_n(c)| \leqslant |\delta(c)| \cdot \|\hat{\varphi}_n - \varphi_0\| + \|\delta(c)\varphi_0 - \hat{\delta}_n(c)\hat{\varphi}_n\|$$

$$\leqslant |\delta(c)|\cdot\|\hat{\varphi}_n-\varphi_0\|+\frac{1}{|c|}\|ETx(c)-\hat{E}_n\hat{T}_n\hat{x}_n(c)\|$$

$$\leqslant d\{|c|\cdot\|\hat{\varphi}_n-\varphi_0\|+\frac{1}{|c|}\|(E-\hat{E}_n)Tx(c)\|+\|Tx(c)-TP_nx(c)\|+\|\hat{x}_n(c)-x(c)\|^2+\|\hat{x}_n(c)-x(c)\|. \tag{17}$$

上式中利用了 $\|E_n\|$, $\|P_n\|$, $\|\hat{T}'_n(x(c)+\eta(\hat{x}_n(c)-x(c)))\|, 0\leqslant\eta\leqslant 1$ 的一致有界性，它由 H_2)和 H_3)及共鸣定理保证与 E 的表达式类似，有 $\hat{E}_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-A'(\theta)P_n)^{-1}d\lambda$; n 充分大，由[2]引理有

$$\|(E-E_n)Tx(c)\|\leqslant d\cdot\max_{\lambda\in\Gamma}\|[(\lambda I-A'(\theta))^{-1}-(\lambda I-A'(\theta)P_n)^{-1}]Tx(c)\|$$
$$\leqslant d|c|\cdot\|A'(\theta((I-P_n)\|\cdot[\|(I-P_n)\varphi_0\|+\|(I-P_n)\nu(c)\|+\|(I-P_n)A'(\theta)\|]. \tag{18}$$

由[2]的定理 4 知，可选定理 1 中 $\hat{\varphi}_n$ 满足

$$\|\hat{\varphi}_n-\varphi_0\|\leqslant d\cdot\|A'(\theta)(I-P_n)\varphi_0\|\leqslant d\cdot\|A'(\theta)(I-P_n)\|\cdot\|(I-P_n)\varphi_0\|. \tag{19}$$

由 T 的定义和 H_3) 有

$$\|Tx(c)-TP_nx(c)\|\leqslant d|c|\cdot\{[\|A'(\theta)(I-P_n)\|+\|A'(x(c))(I-P_n)\|]\cdot[\|(I-P_n)\varphi_0\|+\|(I-P_n)\nu(c)\|]+|c|\cdot[\|(I-P_n)\varphi_0\|^2+\|(I-P_n)\nu(c)\|^2]\}. \tag{20}$$

根据[3]中定理 1 有

$$|\lambda_n-\lambda_0|\leqslant d\cdot\|A'(\theta)(I-P_n)\varphi_0\|\leqslant d\cdot\|A'(\theta)(I-P_n)\|\cdot\|(I-P_n)\varphi_0\|.$$

从而由(17)—(20)有

$$|\hat{\lambda}_n(c)-\lambda(c)|\leqslant d\cdot\Big\{\|(I-P_n)\varphi_0\|\cdot[\|A'(\theta)(I-P_n)\|+\|A'(x(c))(I-P_n)\|+\|(I-P_n)\varphi_0\|]+(I-P_n)\gamma(c)\|\cdot[\|A'(\theta)(I-P_n)\|+\|A'(x(c))(I-P_n)\|+\|(I-P_n)\nu(c)\|]+\|A'(\theta)(I-P_n)\|\cdot\|(I-P_n)A'(\theta)\|+\frac{1}{|c|}\|\hat{x}_n(c)-x(c)\|^2+\|\hat{x}_n(c)-x(c)\|\Big\}. \tag{21}$$

现在转到 $\hat{x}_n(c)-x(c)$ 的估计．由恒等式

$$F(\lambda(c)I-A'(x(c)))F(\hat{x}_n(c)-x(c))=(\lambda(c)-\hat{\lambda}_n(c))F\hat{x}_n(c)+FAP_n\hat{x}_n(c)-FAx(c)-FA'(x(c))F(\hat{x}_n(c)-x(c))$$
$$=(\lambda(c)-\hat{\lambda}_n(c))F\hat{x}_n(c)+FA'(x(c))(I-P_n)\hat{x}_n(c)+FA'(x(c))E(\hat{x}_n(c)-x(c))+R_{2,n}(\hat{x}_n(c),x(c)). \tag{22}$$

其中$\|R_{2,n}(\hat{x}_n(c),x(c))\|\leqslant d[\|(I-P_n)x(c)\|^2+\|\hat{x}_n(c)-x(c)\|^2]$．又因为 $F(\lambda(c)I-A'(x(c)))F=F(\lambda_0I-A'(\theta))F+\delta(c)F+F(A'(x(c))-A'(\theta))F$，由(5)(7)两式和泰勒展式知，存在$C_0>0$，当$|c|\leqslant C_0$时，$F(\lambda(c)I-A'(x(c)))F$ 的广义逆存在[15]，且

$$\sup_{|c|\leqslant C_0}\|[F(\lambda(c)I-A'(x(c))F]^{-1}\|\leqslant d. \tag{23}$$

与(18)类似，有

$$\begin{aligned}\|E\hat{x}_n(c) - Ex(c)\| &\leqslant \|(E - \hat{E}_n)\hat{x}_n(c)\| + \|\hat{E}_n\hat{x}_n(c) - Fx(c)\| \\ &\leqslant d\|A'(\theta)(I - P_n)\| \cdot [\|(I - P_n)\hat{x}_n(c)\| \\ &\quad + |c| \cdot \|(I - P_n)A'(\theta)\| + |c| \cdot \|(I - P_n)\varphi_0\|]. \end{aligned} \tag{24}$$

结合(22)—(24)有

$$\begin{aligned}\|\hat{x}_n(c) - x(c)\| &\leqslant \|E\hat{x}_n(c) - Ex(c)\| + \|F(\hat{x}_n(c) - x(c))\| \\ &\leqslant d \cdot \{|\hat{\lambda}_n(c) - \lambda(c)| \cdot \|\hat{x}_n(c)\| + \|A'(x(c))(I - P_n)\| \\ &\quad \cdot \|(I - P_n)\hat{x}_n(c)\| + \|(I - P_n)x(c)\|^2 \\ &\quad + \|\hat{x}_n(c) - x(c)\|^2 + \|A'(\theta)(I - P_n)\| \\ &\quad \cdot [\|(I - P_n)\hat{x}_n(c)\| + |c| \cdot \|(I - P_n)A'(\theta)\| \\ &\quad + |c| \cdot \|(I - P_n)\varphi_0\|]\}. \end{aligned} \tag{25}$$

由[1]定理 2 有 $\sup\limits_{|c|\leqslant C_0} \|\hat{x}_n(c)-x(c)\|/\|x(c)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，注意到 $\|(I - P_n)\hat{x}_n(c)\| \leqslant d[\|(I - P_n)\cdot x(c)\| + |c| \cdot \|(I - P_n)A'(x(c))\| + |c| \cdot |\hat{\lambda}_n(c) - \lambda(c)|]$ 和 c 很小时，由(5) 有 $\|x(c)\| \geqslant \frac{|c|}{2}$，合并(21)和(25)两式即得(14)，(15)。

推论 1. 除定理 2 的假定外，设 X 是自反 Banach 空间，$P_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} I$ (强)，特别地，X 是 Hilbert 空间，P_n 自共轭，则离散 Sloan 方程的分歧解比离散 Galerkin 方程的分歧解有更快的收敛速度。

证。 $\|A'(\theta)(I - P_n)\| = \|(I - P_n^*)A'(\theta)^*\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，$\|A'(x(c))(I - P_n)\| = \|(I - P_n^*)A'(x(c))^*\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$，由定理 2 即得结论。

通常有 $\|(I - P_n)A'(\theta)\| = O(\|(I - P_n)\varphi_0\| = \|A'(\theta)(I - P_n)\|$，$\|A'(x(c))\cdot(I - P_n)\| = O(\|(I - P_n)x(c)\|) = \|(I - P_n)A'(x(c))\|$[10]。

§ 4. 加速法及应用

从§3得知，离散 Sloan 分歧解比离散 Galerkin 分歧解有更高的精度。怎样得到离散 Sloan 分歧解 $\hat{x}_n(c)$ 呢？

引理 1. 设 (λ, x_n)，$(\lambda, \hat{x}_n)$，$\lambda \neq 0$ 分别是方程(2)与(3)的解，则 $\left(\lambda, \frac{1}{\lambda} Ax_n\right)$，$(\lambda, P_n\hat{x}_n)$分别是方程(3)与(2)的解。

只须注意到方程(2)等价于 $\lambda x = P_nAP_nx$，直接代入验证即得引理 1.

引理 2. 假定定理 2 的条件成立。则存在 $C_0 > 0$，$N_0 \geqslant 1$. 当 $n \geqslant N_0$ 时，$(\hat{\lambda}_n(c), \hat{x}_n(c))$ 与 $\left(\lambda_n(c), \frac{1}{\lambda_n(c)} Ax_n(c)\right)$，$|c| \leqslant C_0$ 重合，$(\lambda_n(c), x_n(c))$ 与 $(\hat{\lambda}_n(c), P_n\hat{x}_n(c))$，$|c| \leqslant C_0$ 重合。

证。 n 充分大时，由定理 2 和(5)式知，$\frac{1}{\lambda_n(c)} Ax_n(c)$，$P_n\hat{x}_n(c)$，$c \neq 0$ 是非零的。事实上，对大多数问题是显而易见。由定理 1 及引理 1 知结论成立。

定理 3. 记 $S=\{(\lambda(c), x(c));\ |c|\leqslant C_0,\ (\lambda(c), x(c))$ 如定理 1 中是方程 1 从 $(\lambda_0\ \theta)$ 分歧出来的非平凡分枝$\}$. $d'[(\lambda,x);S]=\inf\limits_{(\lambda',y)\in S}[\|x-y\|^2+|\lambda'-\lambda|^2]^{1/2}$,则由定理 2 和引理 2 有

$$\sup_{|c|\leqslant C_0} d'\left[\left(\lambda_n(c), \frac{1}{\lambda_n(c)} Ax_n(c)\right);S\right]\leqslant d\cdot\sup_{|c|\leqslant C_0}\Lambda(c), \tag{26}$$

其中 $\Lambda(c)$ 与定理 2 中一致.

从定理 3 可以看出,当我们得到离散 Galerkin 方程的分歧解后,经过迭代 $\tilde{x}_n(c)=\frac{1}{\lambda_n(c)}Ax_n(c)$,就可得到同离散 Sloan 分歧解一样精度的近似分歧解. 虽然 $\|\tilde{x}_n(c)\|$ 很小;c 靠近 0,但此迭代相当于再解一非奇异的线性方程. 当然,我们要求此线性方程的近似数值解较 Galerkin 解有更高的精度,比如用剩余较正、外推等方法来解. 比起用 $x_n(c)$ 作初值的 Newton 迭代 $\tilde{x}_n(c)=x_n(c)-[\lambda(c)I-A'(x_n(c))]^{-1}x_n(c)$ 的计算量要少得多. 而且不难看出上 Newton 迭代相当于解一近似奇异问题.

考察单参数 Урысон 非线性积分方程

$$\lambda u(x)=\int_\Omega K(x,y,u(y))dy, \tag{27}$$

$\Omega\subset R^2$ 为有界光滑闭域, 若 $u(x)\in L^2(\Omega), K(x,y,u)\in C^2(\Omega\times\Omega\times R), K_{uxx}(x,y,0)\in L^2(\Omega\times\Omega)$, $K_{uxx}(y,x,u(x))\in L^2(\Omega\times\Omega)$, $K_{uux}(y,x,u(x))\in L^{2+\varepsilon}$, $K_{uuu}(y,x,u(x))\in L^{2+\varepsilon}, \varepsilon>0$, $K_u(x,y,0)\geqslant 0$,且存在 $\tau>0$, 使 $\mathrm{mes}\{(x,y),\ K_u(x,y,0)\leqslant\tau\}=0$, $K(x,y,0)=0$. 定义算子 Au: $L^2\to L^2$ 为(27)式右端,易知 $\lambda_0=\gamma(A'(\theta))-A'(\theta)$ 的谱半径是方程(27)的一个简单分歧点[12,15]. 让 φ_0 是对应于 λ_0 的本征元,$\|\varphi_0\|_{L^2}=1$,易知 $EA''(\theta)\varphi_0^2\neq\theta$,即 $\iint_{\Omega\times\Omega}K_{uu}(x,y,0)\varphi_0^2(y)\varphi_0(x)dydx\neq 0$ 时,参数 c (如前面一样)可由参数 λ 表出[1,14,15], 为了分析方便,我们仍选 c 作参数. 记 $\|\cdot\|_j=\|\cdot\|_{H^j(\Omega)}$. 取 S_h 为一次协调元空间,(27)的有限元方程为

$$\lambda\int_\Omega u_h\phi dx=\iint_{\Omega\times\Omega}K(x,y,u_h(y))\phi(x)dydx,\quad\forall\ \phi\in S_h. \tag{28}$$

令 $(\lambda(c), u(c))$ 是方程(27)从 (λ_0,θ) 分歧出来的非平凡分枝, $(\lambda_h(c),u_h(c))$是方程(28)从 (λ_h,θ) 分歧出来的非平凡分枝 (h 充分小). 则有

定理 4. 在上面的假定下,则存在 $C_0>0$,当 $h\ll 1, 0<|c|\leqslant C_0$ 时有

$$[\|u_h(c)-u(c)\|_{L^p}/\|u(c)\|_{L^p}]+|\lambda_h(c)-\lambda(c)|\leqslant d\cdot h^2,\quad 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{29}$$

若令 $\hat{u}_h(c)=\frac{1}{\lambda_h(c)}\int_\Omega K(x,y,u_h(c,y))dy, W=\{u(c);|c|\leqslant C_0\}, T=\{\lambda(c);|c|\leqslant C_0\}$,则

$$\sup_{|c|\leqslant C_0}\inf_{\substack{u\in W\\ \lambda\in T}}[\|\hat{u}_h(c)-u(c)\|_j+|\lambda_h(c)-\lambda|]\leqslant d\cdot h^{4-j},\quad j=0,1,2, \tag{30}$$

$$\sup_{|c|\leqslant C_0}\inf_{u\in W}\|\hat{u}_h(c)-u\|_{L^\infty}\leqslant d\cdot h^3. \tag{31}$$

证. 取 $P_h: L^2\to S_h$ 为 L^2 正交投影. 注意到 A: $L^2\to W^{2,2}$ [10]. 易知 $A'(\theta)$: $L^2\to W^{2,2}(\Omega)$, 取 $X=L^2(\Omega)$,1 . 显然, 方程 (27),(28) 分别等价于 $\lambda u=Au$, $\lambda u_h=P_hAu_h$, 且 P_h 是 L^p: $1\leqslant p\leqslant\infty$ 稳定的. 与 [10] 证明类似, 不难得

到 $\|A'(\theta)(I-P_h)\|$，$\|(I-P_h)A'(\theta)\|$，$\|A'(u(c))(I-P_h)\|$，$\|(I-P_h)A'(u_*(c))\| \leqslant d\cdot h^2$。由定理 2 和定理 3 知（29）和（30）对 $j=0$ 成立。而 $\|\hat{u}_h(c)-u(c_1)\|_2=\left\|\frac{1}{\lambda_h(c)}Au_h(c)-\frac{1}{\lambda(c_1)}Au(c_1)\right\|_2 \leqslant d\cdot[|\lambda_h(c)-\lambda(c_1)|+\|u_h(c)-u(c_1)\|_0]$ 及不等式 $\|\hat{u}_h(c)-u(c_1)\|_{L^\infty}+\|\hat{u}_h(c)-u(c_1)\|_1 \leqslant d\cdot\|\hat{u}_h(c)-u(c_1)\|_0^{1/2}\cdot\|\hat{u}_h(c)-u(c_1)\|_2^{1/2}$。（见[10]，p. 221 结论 1 及证明）。将上两不等两边先对 c_1 取下确界，再对 c 取上确界知，(30)对 $j=1,2$，和(31)成立。

注． 定理 4 的结论对 Nekrasov 方程 $\lambda u(x)=\sin\left(\int_0^\pi L(x,y)\left[u(y)\Big/\left(1+3\int_0^y u\cdot(x)dx\right)dy\right)\right.$；$L(x,y)=\frac{1}{\pi}\ln\left[\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\Big/\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]$ 也同样成立．比较[1,3]用数值积分得到的近似分歧解，我们的结论要好得多。

本文曾得到林群、吕涛研究员的热情指导，在此特表谢意。

参 考 文 献

[1] Atkinson, K. E., The numerical solution of a bifurcation problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(1977).

[2] Atkinson, K. E., The numerical solution of the eigenvalue problem for compact integral operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 29(1976).

[3] Atkinson, K. E., Convergence rates for approximate eigenvalues of conpact operators, *SIAM J. Numer. Anal.*, 12(1975).

[4] Brezzi, F., Rappaz, J. and Raviat, P. A., Finite dimensional approximation of nonlinear problem: Part III: Simple bifarction points, *Numer. Math.*, 38(1982).

[5] Descloux, J., Numerical approximation in bifurcation theory. Report at BTNA conference, Xian, 1988.

[6] Chatelin, F., Spectral approximation of linear operators, Academic Pross, 1983.

[7] Griewank, A. and Riddien, G. W., The approximation of general turning points by projection methods with superconvergence to the critical parameter, *Numer. Math.*, 48(1986).

[8] Keller, H. B., Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems: in P. H. Rahinvwitz (ed): Application of Bifurcation Theory, New York, 1977.

[9] Keller, H. B., Numerical method in bifurcation problems. Report at Summer School, Univ. of Jilin, China, 1987.

[10] 林群，算子方程近似解的一些问题，数学学报，**22**(1979)。

[11] 吕涛，迭代 Galerkin 方法简介，1980年厦门全国有限元会议报告。

[12] Mittelman, H. D., Weber, H., A bibliography in numerical method for bifurcation problem, Report. Dept. Math. Dortumal Univ., 1981.

[13] Rappaz, J., Numerical analysis of bifurcation problems for partial differential equations. *Mech. Phys.* (1983).

[14] Stakgold, I., Branching of solution of nonlinear equations, SIAM Rev., 13(1979).

[15] 张恭庆，非线性泛函分析，第五届暑假研究生班资料，吉林大学，1987。

ITERATIVE SOLUTION OF SIMPLE BIFURCATION

Liu Bo

(*Institute of Mathematics Sciences, Chendu Branch, Academia Sinica, Chendu* 610015)

ABSTRACT

It is proved that approprate simple iteration of Galerkin's bifurcation solution of one-parameter operator equation $\lambda x=Ax$, $A\theta=\theta$ yields faster convergence rate. When the results are applied to approximate solution of bifurcation of one-parameter nonlinear integral equation, higher order error estimates of $H^k(\Omega)$, $0\leqslant k\leqslant 2$, and L^∞ are obtained.