系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
26(3) (2006, 6), 270–276

平面上的零级 Dirichlet 级数*

田 宏 根
(新疆师范大学数学系，乌鲁木齐 830054)
孙 道 椿
(华南师范大学数学系，广州 510631)
郑 承 民
(新疆师范大学数学系，乌鲁木齐 830054)

摘要 应用最大项指标，在较宽的系数条件下，对复平面上的零级数 Dirichlet 级数进行了深入的研究，得到关于它们增长性的两个定理，即文中定理 1 和定理 2.

关键词 Dirichlet 级数，级，下级，零级，最大项指标.

MR(2000) 主题分类号 60F99, 30D99

1 引言与结果

我们知道由系数讨论级数的增长性是一个基本而重要的问题，已有许多重要完美的结果. 但对下级的研究要困难许多. 文 [1,2] 找到了一种较简单的方法，在较宽的系数条件下，研究了系数与下级，级的关系. 对复平面上的零级 Dirichlet 级数还没有见到进一步的研究. 本文应用文 [1,2] 中的方法，深入讨论了复平面上的零级 Dirichlet 级数，得到两个相应于下级，级的结果.

设 Dirichlet 级数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{\lambda_n s}\quad (s=\sigma+it) \tag{1}$$

满足条件 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots\uparrow+\infty$, 及

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=E<\infty, \tag{2}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln(|\,b_n\,|)}{\lambda_n}=-\infty, \tag{3}$$

则级数 (1) 在全平面内收敛， $f(s)$ 表示一整函数. $\forall\sigma\in R$, 我们分别记 $f(s)$ 的最大模与最大项为：

$$M(\sigma)=M(\sigma,f)=\sup\{|\,f(\sigma+it)\,|: t\in R\},$$
$$m(\sigma)=m(\sigma,f)=\max\{|\,b_n\,|\,e^{\lambda_n\sigma}: n\in N^+\}.$$

* 国家自然科学基金 (10471048) 资助课题.

收稿日期： 2004-07-23.

通常当级数 (1) 满足 (2),(3) 且存在极限：

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma}=\rho', \tag{4}$$

$$\underline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma}=\tau', \tag{5}$$

称 ρ',τ' 为 $f(s)$ 在平面内的级和下级，表示 Dirichlet 级数在平面内的增长性．当 ρ'=τ'=0 时，称 (1) 为平面上的零级 Dirichlet 级数．

记 $\nu(\sigma)=\nu(\sigma,f)=\max\{\lambda_n :|\,b_n\,|\,\mathrm{e}^{\lambda_n\sigma}=m(\sigma,f)\}$. 称 $\nu(\sigma)$ 为 $f(s)$ 的最大项指标.

当级数 (1) 满足 (2), (3) 时，在 oxy 直角坐标平面上作点列 $\{A_n\}=\{(\lambda_n,-\ln|\,b_n\,|)\}_{n=1}^{\infty}$, 任取 $\sigma>0$, 过点 $A_n=(\lambda_n,-\ln|\,b_n\,|)$ 作斜率为 σ 的直线

$$L(\sigma): y-(-\ln|\,b_n\,|)=\sigma(x-\lambda_n).$$

$L(\sigma)$ 与 y 轴的交点为 $y=-\lambda_n\sigma-\ln|\,b_n\,|$. 即 $-y=\ln|\,b_n\mathrm{e}^{\lambda_n s}\,|$.

因此取定 $\sigma>0$, $L(\sigma)$ 与 y 轴的交点越低，对应项的对数值就越大．因而过最大项指标 $\nu(\sigma)$ 决定的点 $A_{\nu(\sigma)}=(\nu(\sigma),-\ln|\,b_{\nu(\sigma)}\,|)$, 斜率为 σ 的直线 $L(\sigma)$ 的下方不会有 $\{A_n\}$ 中的点．记 $W(f)$ ={ 最大项指标集合 }, $H(f)$ = { 最大项指标决定的点集 } . 连接 $H(f)$ 中的点，得到一个以最大项指标决定的点为顶点的凸多边形 $Y(f)$, 称其为牛顿多边形． $\forall\sigma>0$, 斜率为 σ 的直线 $L(\sigma)$ 与 $Y(f)$ 相切 (即 $L(\sigma)$ 在 $Y(f)$ 的下方，且与 $Y(f)$ 只有一个交点) 时，所过点的对应项必是最大项． $L(\sigma)$ 与 $Y(f)$ 的一条边重合时， $L(\sigma)$ 上至少有 $\{A_n\}$ 中的两个点，都对应于 σ 的最大项，但只有顶点对应的指标 λ_n 且 n 最大时才为最大项指标.

最大项指标是单调上升左连续的阶梯函数，记 $\nu(\sigma)$ 的间断点为 $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$, 它满足：

$$\sigma_1<\sigma_2<\cdots\uparrow\infty,\ \ \nu(\sigma)=\lambda_{N_k},\ 当\ \sigma\in[\sigma_k,\sigma_{k+1}),$$

$$\sigma_k=\frac{-\ln|\,b_{N_k}\,|-(-\ln|\,b_{N_{k-1}}\,|)}{\lambda_{N_k}-\lambda_{N_{k-1}}}>0,\ \ (k=1,2,\cdots), \tag{6}$$

称 $\{\lambda_{N_k}\}$ 为最大项指标序列，且对应的点 $(\lambda_{N_k},-\ln|\,b_{Nk}\,|)$ 是 $Y(f)$ 的顶点.

将每一个不在 $Y(f)$ 上的点 A_n 垂直下移到 $Y(f)$ 上, 记为 $A_n^c=(\lambda_n,-\ln|\,b_n^c\,|)$, 则 $f^c(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^c\mathrm{e}^{\lambda_n s}$ 与 $f(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\mathrm{e}^{\lambda_n s}$ 有相同的牛顿多边形 $Y(f^c)$= $Y(f)$. 因而 $\forall\sigma, m(\sigma,f^c)=m(\sigma,f)$ 及 $\nu(\sigma,f^c)=\nu(\sigma,f)$.

在以上规定下，本文得到关于平面上零级 Dirichlet 级数的两个结果.

定理 1　级数 (1) 满足 (2), (3), 则有

$$\underline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{\ln\sigma}=\tau\Longleftrightarrow\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln\lambda_{N_k}}{\ln\ln|\,b_{N_{K+1}}\,|^{-1}-\ln\lambda_{N_{k+1}}}=\tau-1.$$

定理 2　级数 (1) 满足 (2),(3), 则有

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{\ln\sigma}=\rho\Longleftrightarrow\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\lambda_n}{\ln\ln|\,b_n\,|^{-1}-\ln\lambda_n}=\rho-1.$$

2 若干引理

引理 1 级数 (1) 在条件 (2), (3) 下, $\forall\varepsilon>0$, 有

$$m(\sigma)\leq M(\sigma)<K(\varepsilon)m(\sigma-E-\varepsilon), \tag{7}$$

其中 $K(\varepsilon)$ 是与 $f(s)$ 及 ε 有关的正常数.

引理 2 级数 (1) 满足 (2), (3), 则有

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln M(\sigma)}{\ln\sigma}=\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}=\begin{cases}\rho\,,\\ \tau\,.\end{cases}$$

关于最大项有

引理 3 在前面叙述的最大项指标及牛顿多边形的规定下, 存在正整数 M, 使当 $k>M$ 时, 有

1) $T_k=\frac{-\ln|b_{N_k}|}{\lambda_{N_k}}>0$, 对 k 严格单调递增;

2) $\frac{-\ln|b_{N_k}|+\ln|b_{N_{k-1}}|}{\lambda_{N_k}-\lambda_{N_{k-1}}}>\frac{-\ln|b_{N_k}|}{\lambda_{N_k}}$.

引理 1, 引理 2 的证明见文 [3], 引理 3 的证明见文 [2].

引理 4 在前述最大项与最大项指标的规定下, 有

1) $\forall\sigma\in R$, 有 $\ln m(\sigma)=\ln m(\sigma_1)+\int_{\sigma_1}^{\sigma}\nu(\sigma)d\sigma$.

2) $\overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}-1=\rho-1=\overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\nu(\sigma)}{\ln\sigma},(\rho>1)$.

3) $\underline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}-1=\tau-1=\underline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\nu(\sigma)}{\ln\sigma},(\tau>1)$.

证 1) 在每个区间 $I_k:=[\sigma_k,\sigma_{k+1})$ 上对 $m(\sigma)=\mid b_{\nu(\sigma)}\mid \mathrm{e}^{\nu(\sigma)\sigma}$ 两边关于 σ 求导, 由于在 I_k 上 $\nu(\sigma)=\lambda_{N_k}$, 于是有

$$m'(\sigma)=\nu(\sigma)\mid b_{\nu(\sigma)}\mid \mathrm{e}^{\nu(\sigma)\sigma}=\nu(\sigma)m(\sigma),$$

从而

$$\ln m(\sigma_{k+1})-\ln m(\sigma_k)=\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}\frac{m'(\sigma)}{m(\sigma)}\mathrm{d}\sigma=\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}\nu(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

$$\begin{aligned}\ln m(\sigma)-\ln m(\sigma_1)&=\ln m(\sigma)-\ln m(\sigma_k)+\sum_{j=1}^{k-1}(\ln m(\sigma_{j+1})-\ln m(\sigma_j))\\&=\int_{\sigma_k}^{\sigma}\nu(\sigma)\mathrm{d}\sigma+\sum_{j=1}^{k-1}\int_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}}\nu(\sigma)\mathrm{d}\sigma=\int_{\sigma_1}^{\sigma}\nu(\sigma)\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

2) 设 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\nu(\sigma)}{\ln\sigma}=\rho-1$, 则 $\forall\varepsilon\in(0,\rho-1)$, 当 σ 充分大时,

$$\nu(\sigma)<\sigma^{\rho-1+\varepsilon},$$

从而

$$\begin{aligned}\ln m(\sigma)-\ln m(\sigma_1)&=\int_{\sigma_1}^{\sigma}\nu(\sigma)\mathrm{d}\sigma\leq\int_{\sigma_1}^{\sigma}\sigma^{\rho-1+\varepsilon}\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{\rho+\varepsilon}(\sigma^{\rho+\varepsilon}-\sigma_1^{\rho+\varepsilon})\leq\frac{1}{\rho+\varepsilon}\sigma^{\rho+\varepsilon},\end{aligned}$$

于是 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}\le\rho+\varepsilon$. 由 ε 的任意性，得到 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}\le\rho$. 另一方面由 $\nu(\sigma)$ 的单调性可得

$$\sigma\nu(\sigma)<\int_{\sigma}^{2\sigma}\nu(\sigma)\mathrm{d}\sigma=\ln m(2\sigma)-\ln m(\sigma)\le\ln m(2\sigma).$$

取对数 $\ln\sigma+\ln\nu(\sigma)\le\ln\ln m(2\sigma)$, 同除以 $\ln\sigma$, 得

$$1+\frac{\ln\nu(\sigma)}{\ln\sigma}\le\frac{\ln\ln m(2\sigma)}{\ln(2\sigma)-\ln 2}.$$

从而有

$$1+\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\nu(\sigma)}{\ln\sigma}\le\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}.$$

2) 得证.

3) 设 $\underline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\nu(\sigma)}{\ln\sigma}=\tau-1$, 则 $\forall\varepsilon\in(0,\tau-1)$, 当 σ 充分大时， 有 $\nu(\sigma)>\sigma^{\tau-1-\varepsilon}$. 于是，

$$\ln m(\sigma)-\ln m(\sigma_1)=\int_{\sigma_1}^{\sigma}\nu(\sigma)\mathrm{d}\sigma>\int_{\sigma_1}^{\sigma}\sigma^{\tau-1-\varepsilon}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\tau-\varepsilon}(\sigma^{\tau-\varepsilon}-\sigma_1^{\tau-\varepsilon}).$$

即有

$$\ln m(\sigma)>\frac{1}{\tau-\varepsilon}\sigma^{\tau-\varepsilon}\Big[1-\Big(\frac{\sigma_1}{\sigma}\Big)^{\tau-\varepsilon}\Big],$$

从而

$$\underline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}\ge\tau-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，得到

$$\underline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}\ge\tau.$$

另一方面，由 $\nu(\sigma)$ 的单调性得

$$\ln m(2\sigma)-\ln m(\sigma)=\int_{\sigma}^{2\sigma}\nu(\sigma)\mathrm{d}\sigma\le\sigma\nu(2\sigma),$$

$$\ln m(2\sigma)\Big(1-\frac{\ln m(\sigma)}{\ln m(2\sigma)}\Big)\le\sigma\nu(2\sigma),$$

取对数

$$\ln\ln m(2\sigma)+\ln\Big(1-\frac{\ln m(\sigma)}{\ln m(2\sigma)}\Big)\le\ln\sigma+\ln\nu(2\sigma).$$

同除以 $\ln\sigma$, 得

$$\frac{\ln\ln m(2\sigma)}{\ln(2\sigma)-\ln 2}+\frac{\ln\ln\big(1-\frac{\ln m(\sigma)}{\ln m(2\sigma)}\big)}{\ln\sigma}\le 1+\frac{\ln\nu(2\sigma)}{\ln(2\sigma)-\ln 2}.$$

从而有

$$\underline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}\le 1+\underline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\nu(\sigma)}{\ln\sigma}.$$

至此引理 4 得证.

3 定理的证明

定理 1 的证明 由引理 2, 即只需证明

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}=\tau\Longleftrightarrow\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_{N_k}}{\ln\ln|\,b_{N_{k+1}}\,|^{-1}-\ln\lambda_{N_{k+1}}}=\tau-1.$$

先证明

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_{N_k}}{\ln\ln|\,b_{N_{k+1}}\,|^{-1}-\ln\lambda_{N_{k+1}}}=\tau-1\Longrightarrow\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}\geq\tau.$$

由条件，$\forall\varepsilon\in(0,\tau-1)$，$k$ 充分大时，$\frac{\ln\lambda_{N_k}}{\ln\ln|b_{N_{k+1}}|^{-1}-\ln\lambda_{N_{k+1}}}\geq\tau-1-\varepsilon$，即

$$\ln|\,b_{N_{k+1}}\,|\geq-\lambda_{N_{k+1}}\lambda_{N_k}^{\frac{1}{\tau-1-\varepsilon}}.$$

于是 $\forall\sigma$,

$$\ln m(\sigma)\geq\ln|\,b_{N_{k+1}}\,|\mathrm{e}^{\lambda_{N_{k+1}}\sigma}\geq\lambda_{N_{k+1}}(\sigma-\lambda_{N_k}^{\frac{1}{\tau-1-\varepsilon}}).$$

取 $\sigma_k=2\lambda_{N_k}^{\frac{1}{\tau-1-\varepsilon}}$, 当 σ 充分大时，存在 k 使得 $\sigma\in[\sigma_k,\sigma_{k+1})$，

$$\begin{aligned}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}&\geq\frac{\ln\lambda_{N_{k+1}}+\ln\sigma+\ln\left(1-\frac{\lambda_{N_k}^{\frac{1}{\tau-1-\varepsilon}}}{\sigma}\right)}{\ln\sigma}\\&\geq\frac{\ln\lambda_{N_{k+1}}+\ln\left(1-\frac{\lambda_{N_k}^{\frac{1}{\tau-1-\varepsilon}}}{\sigma}\right)}{\ln\sigma_{k+1}}+1\\&=\frac{\ln\lambda_{N_{k+1}}+\ln\frac{1}{2}}{\ln2+\frac{1}{\tau-1-\varepsilon}\ln\lambda_{N_{k+1}}}+1.\end{aligned}$$

故有 $\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}\geq\tau-\varepsilon$. 由 ε 的任意性，得

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}\geq\tau.\tag{8}$$

再证明 $\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}=\tau\Rightarrow\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_{N_k}}{\ln\ln|b_{N_{k+1}}|^{-1}-\ln\lambda_{N_{k+1}}}\geq\tau-1$.

由引理 4 知，若 $\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}=\tau$, 则有 $\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\nu(\sigma)}{\ln\sigma}=\tau-1$. 设 $\{\lambda_{N_k}\}=\{\nu(\sigma),\sigma>0\}$ 为最大项指标集合，它们随 k 单调上升. 且有

$$\sigma_k=\frac{-\ln|\,b_{N_k}\,|+\ln|\,b_{N_{k-1}}\,|}{\lambda_{N_k}-\lambda_{N_{k-1}}}>0,\ \ (k=1,2,\cdots).$$

对任意充分大的 $\sigma>0$, 存在 k 使得 $\sigma\in[\sigma_{k-1},\sigma_k)$, 此时，$\nu(\sigma)=\lambda_{N_{k-1}}$, 故有

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\nu(\sigma)}{\ln\sigma}=\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_{N_{k-1}}}{\ln\sigma_k}=\tau-1.$$

因此， $\forall\varepsilon\in(0,\tau-1)$, 存在正整数 p, 使当 $\sigma_k\geq\sigma_p$ 时，有

$$\lambda_{N_{k-1}}\geq\sigma_k^{\tau-1-\varepsilon}=\Big(\frac{-\ln|\,b_{N_k}\,|-\ln|\,b_{N_{k-1}}\,|}{\lambda_{N_k}-\lambda_{N_{k-1}}}\Big)^{\tau-1-\varepsilon}.$$

由引理 3 得 $\frac{-\ln|b_{N_k}|}{\lambda_{N_k}}\leq\lambda_{N_{k-1}}^{\frac{1}{\tau-1-\varepsilon}}$. 于是 $\ln\ln|\,b_{N_k}\,|^{-1}-\ln\lambda_{N_k}\leq\frac{1}{\tau-1-\varepsilon}\ln\lambda_{N_{k-1}}$. 所以

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_{N_{k-1}}}{\ln\ln|\,b_{N_k}\,|^{-1}-\ln\lambda_{N_k}}\geq\tau-1-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，得

$$\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_{N_{k-1}}}{\ln\ln|\,b_{N_k}\,|^{-1}-\ln\lambda_{N_k}}\geq\tau-1.$$

结合 (8) 式，完成定理 1 的证明.

定理 2 的证明　由引理 2, 只需证明

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}=\rho\Longleftrightarrow\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\ln\ln|\,b_n\,|^{-1}-\ln\lambda_n}=\rho-1.$$

先证

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}=\rho,(1<\rho<\infty)\Longrightarrow\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\ln\ln|\,b_n\,|^{-1}-\ln\lambda_n}\leq\rho-1.$$

由条件， $\forall\varepsilon>0,\sigma>0$ 充分大时， $\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}<\rho+\varepsilon$, 故有

$$\ln|\,b_n\,|\,\mathrm{e}^{\lambda_n\sigma}\leq\ln m(\sigma)<\sigma^{\rho+\varepsilon},\quad\ln|\,b_n\,|\leq\sigma^{\rho+\varepsilon}-\lambda_n\sigma.$$

取充分大的 n, 设 $\sigma=(\frac{\lambda_n}{\rho+\varepsilon})^{\frac{1}{\rho-1+\varepsilon}}$, 则有

$$\ln|\,b_n\,|\leq-\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho-1+\varepsilon}}\Big[\Big(\frac{1}{\rho+\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{\rho-1+\varepsilon}}-\Big(\frac{1}{\rho+\varepsilon}\Big)^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho-1+\varepsilon}}\Big]=-\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho-1+\varepsilon}}c\ ,\quad(c>0).$$

所以

$$\ln|\,b_n\,|^{-1}\geq\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho-1+\varepsilon}}c.$$

$$\ln\ln|\,b_n\,|^{-1}\geq\frac{\rho+\varepsilon}{\rho-1+\varepsilon}\ln\lambda_n+\ln c,$$

从而有

$$\frac{\ln\lambda_n+\ln c}{\ln\ln|\,b_n\,|^{-1}-\ln\lambda_n}\leq\rho-1+\varepsilon,$$

即

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\ln\ln|\,b_n\,|^{-1}-\ln\lambda_n}\leq\rho-1+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\ln\ln|\,b_n\,|^{-1}-\ln\lambda_n}\leq\rho-1.\tag{9}$$

再证明 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln\lambda_n}{\ln\ln|b_n|^{-1}-\ln\lambda_n}<\rho-1$ 不可能成立.

反证. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\ln\lambda_n}{\ln\ln|b_n|^{-1}-\ln\lambda_n}<\rho-1$, 则存在 $\varepsilon_1\in(0,\rho-1)$, 当 n 充分大时, 有

$$\frac{\ln\lambda_n}{\ln\ln|\,b_n\,|^{-1}-\ln\lambda_n}\le\rho-1+\varepsilon_1,$$

即 $\ln|\,b_n\,|\le-\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon_1}{\rho-1+\varepsilon_1}}$. $\forall\sigma\in R$, $\ln|\,b_n\,|\mathrm{e}^{\lambda_n\sigma}\le-\lambda_n^{\frac{\rho+\varepsilon_1}{\rho-1+\varepsilon_1}}+\lambda_n\sigma$. 取充分大的 n 和 σ, 使得

$$\lambda_n=\Big(\frac{\rho-1+\varepsilon_1}{\rho+\varepsilon_1}\sigma\Big)^{\rho-1+\varepsilon_1}.$$

则有 $\ln|\,b_n\,|\mathrm{e}^{\lambda_n\sigma}\le\sigma^{\rho+\varepsilon_1}(\frac{\rho-1+\varepsilon_1}{\rho+\varepsilon_1})^{\rho+\varepsilon_1}(\frac{\rho+\varepsilon_1}{\rho-1+\varepsilon_1}-1)=\sigma^{\rho+\varepsilon_1}c$, $(c>0)$. 于是 $\ln m(\sigma)\le c\sigma^{\rho+\varepsilon_1}$, 从而

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\ln\ln m(\sigma)}{\ln\sigma}\le\rho+\varepsilon_1<\rho.$$

导出矛盾. 结合 (9) 式, 完成定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] 孙道椿. 半平面上 Dirichlet 级数的增长级. 数学物理学报, 2002, **22A**(4): 557–563.
[2] 孙道椿. 无限级 Dirichlet 级数的下级. 华南师范大学学报 (自然科学版), 2003, **1**: 1–8.
[3] 佘家荣. 狄里克莱级数与随机狄里克莱级数. 北京: 科学出版社, 1997.

ZERO ORDER DIRICHLET SERIES ON THE PLANE

Tian Honggen

(*Department of Mathematics, Xinjiang Normal University, Wulumuqi* 830054)

Sun Daochun

(*Department of Mathematics, Huanan Normal University, Guangzhou* 510631)

Zheng Chengmin

(*Department of Mathematics, Xinjiang Normal University, Wulumuqi* 830054)

Abstract In this paper, the zero order Dirichlet series on the complex plane is thoroughly studied using index of the maxium term and relatively loose coefficient conditions. And concerning the growth of the zero order Dirichlet series two theorems (namely Theorem 1 and Theorem 2) are obtained.

Key words Dirichlet series, order, low order, zero order, index of the maxium term.