系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
11(3) (1991), 284—289

缺项级数的径向边界性质

杨 锡 平
(北京气象学院基础科学系,100081)

§1. 引 言

称在单位圆盘D内具有形如

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{n_k},\frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant\lambda>1,\quad k=0,1,\cdots \tag{1}$$

展式的解析函数具有 Hadamard 间断. 这是一类很重要的函数,它常是某些问题的反例.

$\dim E$ 表示集合 $E\subset\mathbb{C}$的 Hausdorff 维数,亦即

$$\dim E=\inf\{\delta: E \text{ 的 } \delta\text{-维 Hausdorff 测度为}0\}$$

这是一个比 Lebesgue 测度更精细的量. 关于它的性质,可参看[12].

对$f(z)$的边界性质,人们有着浓厚的兴趣. 已经知道[10,11]:

(a_k) 有界$\Leftrightarrow f(z)$正规$\Leftrightarrow f(z)$为 Bloch 函数.

此时由 Lehto-Virtanen 定理[9]知,角极限、径向极限和渐近值均相同. 因此提出了一个自然的问题: (a_k)无界时情况会怎样?

对(a_k)无界, Murai[8] 彻底解决了$f(z)$的渐近值问题. 他证明了此时的$f(z)$在∂D的每一点处以∞为渐近值.

关于$f(z)$的径向性质及角极限问题,仅有部分结果. Maclan[7] 和 Hawkes[5] 证明了,若$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|=\infty$,则当$r\to 1-0$时

$$\operatorname{Re} f(r\zeta)\to+\infty,\zeta\in E\subset\partial D, \tag{2}$$

且$\lambda>3$时, $\dim E>0$, $n_{k+1}/n_k\to\infty$ 时 $\dim E=1$.

另外, Csordas, Lohwater 和 Ramsey[3] 得到了,若$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|=\infty$, (a_k)有界, 则(2)成立,其中 $\dim E>0$.

Gnuschke 和 Pommerenke[4] 用类似的方法获得进一步的结果:

定理 A. 对$\lambda>1$,存在仅与λ有关的正数α、β、γ具有如下性质: 若$f(z)$满足

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|=\infty,\frac{|a_k|}{|a_0|+\cdots+|a_k|}\leqslant\alpha,\quad k\geqslant l,$$

1989 年 5 月 3 日收到.

则存在闭集 $E\subset\partial D$, $\dim E\geqslant\beta$, 当 $r_0\leqslant r<1$, $\zeta\in E$ 时,

$$\operatorname{Re} f(r\zeta)\geqslant\gamma M(r),$$

其中 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$

由 Sidon 定理[13]知

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|=\infty\Longleftrightarrow M(r)\to+\infty(r\to1-0).$$

可知定理 A 大大推广了 Csordas 等人的结果.

若 $f(z)$ 无界, 令

$$E_\infty^f=\{\zeta\in\partial D, |f(r\zeta)|\to\infty, r\to1-0\}$$

Anderson 和 Hornblower[3] 提出如下问题: E_∞^f 是否总非空? 这一问题目前尚未解决.

设

$$\tilde{E}_\infty^f=\{\zeta\in\partial D, \operatorname{Re} f(r\zeta)\to+\infty, r\to1-0\},$$

则显然 $\tilde{E}_\infty^f\subset E_\infty^f$. 且对满足定理 A 条件的 $f(z)$ 有 $\dim\tilde{E}_\infty^f>0$, 从而也有 $\dim E_\infty^f>0$. 于是 Gnuschke 和 Pommerenke[4] 提出进一步的问题: 是否总有 $\dim E_\infty^f>0$ 或甚至 $\dim E_\infty^f=1$? 这一问题也没有得到解决.

另一方面, [4]中已有例子说明 $\tilde{E}_\infty^f$ 可能为空集. 有如下结果

定理 B. 存在函数 $f(z)$, $\lambda\geqslant\frac{33}{32}$ 使得对任意 $\zeta\in\partial D$, 有

$$\liminf_{r\to1-0}\operatorname{Re} f(r\zeta)=-\infty,\quad \limsup_{r\to1-0}\operatorname{Re} f(r\zeta)\to+\infty,$$
$$\liminf_{r\to1-0}\operatorname{Im} f(r\zeta)=-\infty,\quad \limsup_{r\to1-0}\operatorname{Im} f(r\zeta)\to+\infty.$$

但这个例子不能说明 E_∞^f 为空集, 因 $f(z)$ 可能盘旋趋于 ∞.

由定理 A 可以知道, 在这个例子中, 存在 $P_0>0$, 使得

$$\frac{|a_{k_j}|}{|a_0|+\cdots+|a_{k_j}|}>P_0\quad(k_j\text{ 是某个子列}).$$

故在这种条件下要使 $\dim\tilde{E}_\infty^f>0$ (从而 $\dim E_\infty^f>0$) 需要附加某种条件.

本文在一定条件下讨论了定理 A 在反方向上的类似问题, 得到进一步的结果.

§2. 两 个 引 理

本节所述的两个引理实际上是两个经典的结果. 它们在许多领域都有不同的重要应用.

引理 1[6]. 对 $\lambda>1$, 存在仅与 λ 有关的正数 δ 及 γ 具有如下性质: 若

$$g(z)=\sum_{k=j}^{j'}a_kz^{n_k},\quad n_{k+1}/n_k\geqslant\lambda$$

则每段弧 $J\subset\partial D$, $|J|\geqslant\frac{\delta}{n_j}$ ($|J|$表示 J 的长度) 必含有子弧 J', $|J'|\geqslant\frac{2\gamma}{n_{j'}}$, 使得当 $\zeta\in J'$,

$$\operatorname{Re} g(\zeta) \geqslant r \sum_{k=j}^{j'} |a_k|.$$

引理 2[2]. 对 $\nu = 1,2,\cdots$,设

$$E_\nu = \bigcup_{j_1,\cdots,j_\nu=1,2} I_{j_1,\cdots,j_\nu}$$

其中 $I_{j_1,\cdots,j_\nu}(j_1,\cdots,j_\nu = 1,2)$ 是 ∂D 上互不相交的弧,使得对 $j = 1,2$,

$$I_{j_1},\cdots,j_\nu j \subset I_{j_1,\cdots,j_\nu}, |I_{j_1,\cdots,j_\nu j}| \geqslant q|I_{j_1,\cdots,j_\nu}|,$$

$$\operatorname{dist}(I_{j_1,\cdots,j_\nu 1}, I_{j_1,\cdots,j_\nu 2}) \geqslant c|I_{j_1,\cdots,j_\nu}|,$$

其中 q 和 c 是满足 $0 < q < 1, 0 < c$ 的常数. 则

$$\dim\left(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} E_\nu\right) \geqslant \frac{\log 2}{\log \frac{1}{q}}.$$

§3. 主要定理及其证明

定理. 设 $f(z)$ 具有(1)的形式,则存在仅与 λ 有关的正数 $P, 0 < P < 1$ 及 M,具有如下性质: 若

$$\frac{|a_k|}{|a_0| + \cdots + |a_k|} \geqslant P, \quad k \geqslant l, \tag{3}$$

且存在序列 $j_1, j_2, \cdots, j_k, \cdots$, 使得

$$\frac{n_{j_{k+1}}}{n_{j_k}} \geqslant \lambda^M, \quad k = 1,2,\cdots, \tag{4}$$

则 $\dim \tilde{E}^f_\infty = 1$,从而 $\dim E^f_\infty = 1$.

由上述定理立即得到

推论. 若

$$\frac{|a_k|}{|a_0| + \cdots + |a_k|} \to 1, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \to \infty, \quad k \to \infty,$$

则 $\dim \tilde{E}^f_\infty = 1$.

函数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2^k} z^{2^{2^k}},$$

显然满足推论的条件.

由定理 B 知,(3)不足以保证 $\dim \tilde{E}^f_\infty = 1$,但由定理,我们有理由提出如下猜测:

猜测: 若 $f(z)$ 满足(3),则 $\dim E^f_\infty = 1$.

若上述猜测成立的话, Anderson 和 Hornblower 提出的问题就比较清楚了.

定理的证明. 设

$$s_k = \sum_{j=0}^{k} |a_j|,$$

M充分大，使得
$$\frac{2\gamma}{\delta}\cdot\lambda^M\geqslant 3,$$
其中γ、δ是由引理1确定的常数，它们仅依赖于λ. 然后取$0<P<1$，使得对某个充分小的正数δ_0（仅依赖于λ）有
$$\gamma P\frac{1}{1-P}e^{-\lambda^{2M}}-1\geqslant\delta_0$$
可知M，P仅依赖于λ.

我们先证明几个估计式：

首先若(3)成立，则
$$|a_{k+j}|\geqslant P\left(\frac{1}{1-P}\right)^{j}t_k\quad(k\geqslant l,j=0,1,\cdots).\tag{5}$$
由于
$$\begin{aligned}t_{k+j}&=t_{k+j-1}+|a_{k+j}|\\&\geqslant t_{k+j-1}+Pt_{k+j},\end{aligned}$$
故
$$\frac{t_{k+j}}{t_{k+j-1}}\geqslant\frac{1}{1-P}.$$
从而
$$\frac{|a_{k+j}|}{t_k}\geqslant\frac{Pt_{k+j}}{t_k}=P\frac{t_{k+j}}{t_{k+j-1}}\cdot\frac{t_{k+j-1}}{t_{k+j-2}}\cdots\frac{t_{k+1}}{t_k}\geqslant P\left(\frac{1}{1-P}\right)^j.$$
其次在条件(4)下，
$$\frac{2\gamma}{n_{i_k}}\geqslant\frac{3\delta}{n_{i_{k+1}}}\ (k=1,2,\cdots).\tag{6}$$
这是由于
$$\begin{aligned}\frac{2\gamma}{n_{i_k}}&=\frac{3\delta}{n_{i_{k+1}}}\cdot\frac{2\gamma}{3\delta}\cdot\frac{n_{i_{k+1}}}{n_{i_k}}\\&\geqslant\frac{3\delta}{n_{i_{k+1}}}\cdot\frac{2\gamma}{3\delta}\cdot\lambda^M\geqslant\frac{3\delta}{n_{i_{k+1}}}.\end{aligned}$$
最后若$n_{k+1}/n_k\leqslant\lambda^{2M}$，且
$$\mathrm{Re}\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k(r\zeta)^{n_k}\geqslant\gamma\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|r^{n_k},\tag{7}$$
则$r>1-\dfrac{1}{n_N+1}$时，则
$$\mathrm{Re}f(r\zeta)\geqslant\delta_0t_N.\tag{8}$$
由于
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,f(r\zeta)&=\mathrm{Re}\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k(r\zeta)^{n_k}+\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{N}a_k(r\zeta)^{n_k}\\&\geqslant\gamma\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|r^{n_k}-t_N\geqslant\gamma|a_{N+1}|r^{n_{N+1}}-t_N\geqslant\gamma\frac{P}{1-P}t_Nr^{n_{N+1}}-t_N;\end{aligned}$$
另一方面
$$r^{n_{N+1}}\geqslant\left[\left(1-\frac{1}{n_N+1}\right)^{n_N}\right]^{\frac{n_{N+1}}{n_N}}\geqslant e^{-\frac{n_{N+1}}{n_N}}\geqslant e^{-\lambda^{2M}}.$$
从而
$$\mathrm{Re}\,f(r\zeta)\geqslant\left(\gamma\frac{P}{1-P}e^{-\lambda^{2M}}-1\right)t_N\geqslant\delta_0t_N.$$

下述证明基于 § 2 中的两个引理及以上三个估计式

取 $N = j_m \geqslant l$. 必要的话加入适当的项 $a_k z^{n_k}, a_k = 0$,可以假定

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant \lambda^{2M}.$$

由引理 1, 对 $I_0 \subset \partial D, |I_0| \geqslant \frac{\delta}{n_{j_m+1}}$, 存在子弧 $\tilde{I}_0, |\tilde{I}_0| \geqslant \frac{2r}{n_{j_{m+1}}}$, 当 $\zeta \in \tilde{I}_0$ 时,

$$\mathrm{Re} \sum_{k=j_m+1}^{j_{m+1}} a_k r^{n_k} \zeta^{n_k} \geqslant \gamma \sum_{k=j_m+1}^{j_{m+1}} |a_k| r^{n_k}$$

由(6)知
$$|\tilde{I}_0| \geqslant \frac{3\delta}{n_{j_{m+1}}+1},$$

于是可把 $\tilde{I}_0$ 分成三等分,两边的弧分别记为 I_1, I_2. 则

$$|I_1| = |I_2| \geqslant \frac{\delta}{n_{j_{m+1}}+1}.$$

对每个 I_1, I_2 再次运用引理 1 可知,

对 $\zeta \in I_{j_1 j_2}(j_1, j_2 = 1, 2)$ 有

$$\mathrm{Re} \sum_{k=j_{m+1}+1}^{j_{m+2}} a_k r^{n_k} \zeta^{n_k} \geqslant \gamma \sum_{k=j_{m+1}+1}^{j_{m+2}} |a_k| r^{n_k},$$

其中 $I_{j_1 j_2}$ 是 I_1, I_2 的子弧,且

$$|I_{j_1 j_2}| \geqslant \frac{2\gamma}{n j_{m+2}} \quad (j_1, j_2 = 1, 2),$$

重复上述过程,一般地可找到 $I_{j_1 j_2} \cdots j_{\tilde{k}}(\tilde{k} = 1, 2, \cdots; j_1, j_2, \cdots, j_{\tilde{k}} = 1, 2)$, 使 $\zeta \in I_{j_1 j_2, \cdots, j_{\tilde{k}}}$ 时

$$\mathrm{Re} \sum_{k=j_{m+\tilde{k}-2}+1}^{j_{m+\tilde{k}-1}} a_k r^{n_k} \zeta^{n_k} \geqslant \gamma \sum_{k=j_{m+\tilde{k}-2}+1}^{j_{m+\tilde{k}-1}} |a_k| r^{n_k}. \tag{9}$$

且
$$I_{j_1, \cdots, j_{\tilde{k}} j} \subset I_{j_1, \cdots, j_{\tilde{k}}}, |I_{j_1, \cdots, j_{\tilde{k}} j}| = \frac{1}{3} |I_{j_1, \cdots, j_{\tilde{k}}}| \quad (j = 1, 2),$$

$$\mathrm{dist}\,(I_{j_1, \cdots, j_{\tilde{k}} 1}, I_{j_1, \cdots, j_{\tilde{k}} 2}) = \frac{1}{3} |I_{j_1, \cdots, j_{\tilde{k}}}|.$$

设
$$E_{\tilde{k}} = \bigcup_{j_1, \cdots, j_{\tilde{k}} = 1, 2} I_{j_1, \cdots, j_{\tilde{k}}}, \ E = \bigcap_{\tilde{k}=1}^{\infty} E_{\tilde{k}},$$

则 $\dim E \geqslant \frac{\log 2}{\log 3}$ (引理 2),且对 $\zeta \in E$,(9)式对一切 $\tilde{k}$ 成立. 这时

$$\sum_{\tilde{k}=2}^{\infty} \mathrm{Re} \sum_{k=j_{m+\tilde{k}-2}+1}^{j_{m+\tilde{k}-1}} a_k r^{n_k} \zeta^{n_k} \geqslant \sum_{\tilde{k}=2}^{\infty} \gamma \sum_{k=j_{m+\tilde{k}-2}+1}^{j_{m+\tilde{k}-1}} |a_k| r^{n_k}$$

亦即
$$\mathrm{Re} \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k r^{n_k} \zeta^{n_k} \geqslant \gamma \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| r^{n_k}$$

由(8)知,当 $r > 1 - \frac{1}{n_N + 1}$ 时 $\quad \mathrm{Re}\, f(r\zeta) \geqslant \delta_0 t_N, \zeta \in E$

从而 $r \to 1-0$ 时 $\mathrm{Re}\, f(r\zeta) \to +\infty$. 这表明 $\dim \tilde{E}_\infty^f \geqslant \frac{\log 2}{\log 3}$.

但从证明中可以看出,把 $I_{i_1,\cdots,i_K}$ 三等分不是本质的.对引理 2 中的任意 $0<q<\frac{1}{2}$,对 $I_{i_1,\cdots,i_K}$ 作适当的划分后,可使得 $\dim \tilde{E}_\infty^f \geqslant \frac{\log 2}{\log 1/q}$. 由 q 的任意性知 $\dim \tilde{E}_\infty^f = 1$.

在本文写作过程中得到北京理工大学杨维奇教授的大力支持,北京大学李忠教授、中国科学院数学研究所何育赞研究员仔细查阅了原文,作者在此一并致谢.

参 考 文 献

[1] Anderson, J. M., Barth, K. F. and Brannan, D. A., Research problems in complex analysis, *Bull. London Math. Soc.*, 9(1977), 129—162.
[2] Beardon, A. F., On the Hausdorff dimension of general Cantor sets, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 61(1965), 679—694.
[3] Csordas, G., Lohwater, A. J. and Ramsey, T., Lacunary series and the boundary behavior of Bloch functions, *Michigan Math. J.*, 29(1982), 281—288.
[4] Gnuschke, D. and Pommerenke, Ch., On the radial limits of functions with Hadamard gaps, *Michigan Math. J.*, 32(1985), 21—31.
[5] Hawkes, J., Probabilistic behavior of some lacunary series, *Z. Wahrsch. Varw. Gebiete* 53(1980), 21—33.
[6] Kahane, J. P., Weiss, M. and Weiss, G., On lacunary power series, *Ark. Mat.*, 5(1963), 1—26.
[7] MacLan, G. R., Asymptotic values of holomorphic functions, *Rice Univ. Studies*, 49(1963), 1—83.
[8] Murai, T., The boundary behavior of Hadamard gap series, *Nagoya Math. J.*, 89(1983), 65—76.
[9] Pommerenke, Ch., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
[10] Pommerenke, Ch., On Bloch functions, *J. London Math. Soc.*, (2) 2(1970), 689—695.
[11] Sons, L. R. and Campbell, D. M., Hadamard gap series and normal functions, *Bull London Math. Soc.* 12(1980), 115—118.
[12] Tsuji, M., Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen Co. Tokyo, 1959.
[13] Zygmund, A., Trigonometric Series, Vol I, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, London, 1968.

ON THE RADIAL BOUNDARY BEHAVIOR OF A CLASS OF FUNCTIONS WITH HADAMARD GAP

YANG XI-PING
(Faculty of Basic Courses Beijing Meteorological College, 100081)

ABSTRACT

In this paper the boundary behavior of a class of functions f with Hadamard gap is studied. Let

$$\tilde{E}_\infty^f = \{\zeta \in \partial D: \mathrm{Re}\, f(r\zeta) \to +\infty, r \to 1-0\}.$$

Then $\dim \tilde{E}_\infty^f = 1$ under some conditions, which give a partial answer to a problem by D. Gnuschke and Ch. Pommerenke in 1985. A conjectune is proposed according to the above result.