系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
4 (4) (1984), 314—319

双边截断型分布族中 UMVUE 的不存在问题

朱 力 行
(安徽大学,合肥)

关于一个概率分布族中,可估函数的方差一致最小的无偏估计(以下简记为UMVUE)不存在性问题,在文献上能见到的研究结果不多. 前不久,陈桂景和陈希孺[1,2]首先在这样一种双边截断单参数分布族中考虑了这一问题:

$$dP_\theta(x) = (k+1)(c^{k+1}-1)^{-1}\theta^{-(k+1)}x^k I_{[\theta\leqslant x\leqslant c\theta]}(x)dx, \qquad 0<\theta<\infty. \tag{1}$$

这里 $c>1$, $k>-1$ 是已知数. 假定 $x_1,\cdots,x_n$ 为从此分布族中抽得的iid样本. 他们证明了,当样本容量 $n=1$ 时,在此分布族中任一可估函数 $g(\theta)$ 的 UMVUE 均不存在. 当 $n\geqslant 2$ 时,θ 的 UMVUE 不存在. 进而他们猜想,不论样本容量 n 如何,任一可估函数 $g(\theta)$ 的 UMVUE 均不存在. 为试图证明这一猜想,陈　刚在[3]中推广了[1,2]的结果. 他证明了,对任意 n,当一可估函数 $g(\theta)$ 满足下述两个条件时,其 UMVUE 一定不存在:

1) $g'(\theta)$ 连续, $g'(\theta)\neq 0$, $\theta>0$;

2) $g(0_+)$, $g'(0_+)$ 存在,有限.

注意,分布族[3]中的可估函数必为绝对连续函数. 本文则证明了,对比 (1) 更为广泛的一类分布族的任意可估函数,其 UMVUE 均不存在.

首先,我们先来考虑分布族(1)中 $k=0$ 的特殊情况,然后转向一般情况.

定理. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为从分布族

$$dP_\theta(x) = (c-1)^{-1}\theta^{-1}I_{[\theta\leqslant x\leqslant c\theta]}(x)dx, \qquad \theta>0 \tag{2}$$

(其中 $c>1$ 给定)中抽得的 iid 样本. 则不论 n 如何,任一不恒为常数的可估函数 $g(\theta)$ 不存在方差处处有限的 UMVUE.

因为当 $n=1$ 时,此定理的结论已由[2]证明,故下面仅考虑 $n\geqslant 2$ 的情况.

证. 记 $U=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}/\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$, $V=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$. 则充分统计量 (U, V) 的分布密度为

$$f_\theta(u,v) = c_0\theta^{-n}(1-u)^{n-2}v^{n-1} \qquad \left(\frac{1}{c}<u<1,\ \frac{\theta}{u}<v<c\theta\right), \tag{3}$$

其中 $c_0=n(n-1)(c-1)^{-n}$.

记 $q_\alpha(u) = \dfrac{c_0}{\alpha+1}(1-u)^{n-2}(c^{\alpha+1}-u^{-(\alpha+1)})$, $\dfrac{1}{c}<u<1, \alpha=\pm 2,\pm 3,\cdots$, (4)

1984 年 4 月 23 日收到.

$$W_{a,\alpha}(u)=\begin{cases}\int_a^1 q_\alpha(t)dt & \text{当 } u\in\left(\frac{1}{c},\ a\right),\\ -\int_{\frac{1}{c}}^a q_\alpha(t)dt & \text{当 } u\in[a,\ 1).\end{cases}$$

其中 $a\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)$.

$$h_{a,\alpha}(u,\ v)=U^{\alpha-n+1}W_{a,\alpha}(u),\tag{5}$$

其中 $a\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)$, $\alpha=\pm2,\ \pm3,\cdots$.

对每一对给定的 $(\alpha,\ a)$，有

$$\begin{aligned}E_\theta h_{a,\alpha}(u,\ v)&=\int_{\frac{1}{c}}^1 du\int_{\frac{\theta}{u}}^{c\theta} h_{a,\alpha}(u,\ v)f_\theta(u,\ v)dv\\&=\theta^{\alpha+1-n}\left\{\int_{\frac{1}{c}}^a q_\alpha(u)du\int_a^1 q_\alpha(u)du\right.\\&\quad\left.-\int_a^1 q_\alpha(u)du\int_{\frac{1}{c}}^a q_\alpha(u)du\right\}=0\end{aligned}$$

对任意的 $\theta>0$ 成立．可见 $h_{a,\alpha}(u,\ v)$ 为 0 的无偏估计．并且由 $h_{a,\alpha}(u,\ v)$ 的构造可以看出，$E_\theta h_{a,\alpha}^k<\infty$，对任意 $\theta>0$，$k>0$.

假定 $g(\theta)$ 为一可估函数，它具有一个 UMVUE，那么它必有一个依赖于充分统计量 $(U,\ V)$ 的 UMVUE $f^*(u,\ v)$，且对每一个 $\theta>0$，$E_\theta(f^*)^2<\infty$．由方差处处有限的 UMVUE 存在的充要条件，有

$$E_\theta\{h_{a,\alpha}(u,\ v)f^*(u,\ v)\}=0,\tag{6}$$

对任一个 $\theta>0$ 成立．

注意，对任意给定的 a, α, $h_{a,\alpha}(u,\ v)$ 在 $\left\{(u,\ v),\ \frac{1}{c}<u<1,\ \frac{\theta}{u}<v<c\theta\right\}$ 上有界，故又有

$$E_\theta(h_{a,\alpha}(u,\ v)f^*(u,\ v))^2<\infty,$$

即 $h_{a,\alpha}(u,\ v)f^*(u,\ v)$ 为方差有限的 0 的无偏估计，再由方差处处有限的 UMVUE 存在的充要条件，有

$$E_\theta\{h_{a,\alpha}(u,\ v)f^{*2}(u,\ v)\}=0\tag{7}$$

对任一个 $\theta>0$ 成立．

以下，我们将从 (6)，(7) 出发，推出 $g(\theta)=c_*$（某一常数），从而完成定理的证明．

把(3)，(5)代入(6)，便得

$$\begin{aligned}&\int_a^1 q_\alpha(t)dt\int_{\frac{1}{c}}^a(1-u)^{n-2}du\int_{\frac{\theta}{u}}^{c\theta}v^\alpha f^*(u,\ v)dv\\&=\int_{\frac{1}{c}}^a q_\alpha(t)dt\int_a^1(1-u)^{n-2}du\int_{\frac{\theta}{u}}^{c\theta}v^\alpha f^*(u,\ v)dv.\end{aligned}\tag{8}$$

注意上式两边，对给定的 $\theta\in(0,\ \infty)$，$\alpha\in\{\pm2,\ \pm3,\cdots\}$，为 $a\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)$ 的绝对连续

函数，故对两边关于 a 求导后，存在 L-零测集 $N_{\theta,\alpha}\subset\left(\frac{1}{c},\ 1\right)$，使当 $a\bar{\in}N_{\theta,\alpha}$，但 $a\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)$时有(经过整理)

$$q_\alpha(a)\int_{\frac{1}{c}}^{1}(1-u)^{n-2}du\int_{\frac{\theta}{u}}^{c\theta}v^\alpha f^*(u,\ v)dv$$
$$=\int_{\frac{1}{c}}^{1}q_\alpha(t)(1-a)^{n-2}dt\int_{\frac{\theta}{a}}^{c\theta}v^\alpha f^*(a,\ v)dv. \tag{9}$$

记 $\{\theta_i,\ i=1,2,\cdots\}$ 为正有理数全体

$$N'=\bigcup_{i=1,\alpha\in\{\pm2,\pm3,\cdots\}}^{\infty}N_{\theta_i,\alpha},$$

则 N' 仍为 $\left(\frac{1}{c},\ 1\right)$的一个 L-零测子集．那么，对任意 $a\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)-N'$，$\alpha\in\{\pm2,\pm3,\cdots\}$，及任一正有理数 θ_i，则(9)式成立．但由于(9)两边为 θ 的绝对连续函数，故对上述的 a，α，(9)式对一切 $\theta>0$ 成立．对(7)经过与对(6)的同样处理，知存在 $\left(\frac{1}{c},\ 1\right)$ 的一个 L-零测子集 N''，使当 $a\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)-N''$ 时，对一切 $\alpha\in\{\pm2,\ \pm3,\ \cdots\}$ 及一切 $\theta>0$，有

$$q_\alpha(a)\int_{\frac{1}{c}}^{1}(1-u)^{n-2}du\int_{\frac{\theta}{u}}^{c\theta}v^\alpha f^{*2}(u,\ v)dv$$
$$=\int_{\frac{1}{c}}^{1}q_\alpha(t)(1-a)^{n-2}dt\int_{\frac{\theta}{a}}^{c\theta}v^\alpha f^{*2}(a,\ v)dv. \tag{10}$$

记 $N=N'\cup N''$，对任意给定的 $a\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)-N$，$\alpha\in\{\pm2,\ \pm3,\cdots\}$，(9)，(10) 两边均为 θ 的绝对连续函数．因此存在 L-零测集 $M_{a,\alpha}$，使得当 $\theta\in(0,\ \infty)-M_{a,\alpha}$ 时，对(9)，(10)两边关于 θ 求导得：

$$c^{\alpha+1}f^*(a,\ c\theta)-a^{-(\alpha+1)}f^*\left(a,\ \frac{\theta}{a}\right)=\frac{1}{\alpha+1}\left(c^{\alpha+1}-a^{-(\alpha+1)}\right)A(\alpha,\ \theta), \tag{11}$$

$$c^{\alpha+1}f^{*2}(a,\ c\theta)-a^{-(\alpha+1)}f^{*2}\left(a,\ \frac{\theta}{a}\right)=\frac{1}{\alpha+1}\left(c^{\alpha+1}-a^{-(\alpha+1)}\right)B(\alpha,\ \theta), \tag{12}$$

其中

$$A(\alpha,\ \theta)=c_0\theta^{-(\alpha+1)}\left(\int_{1/c}^{1}q_\alpha(t)\ dt\right)^{-1}d\left\{\int_{1/c}^{1}(1-u)^{n-2}du\int_{\theta/u}^{c\theta}v^\alpha f^*(u,\ v)dv\right\}\Big/d\theta,$$
$$B(\alpha,\ \theta)=c_0\theta^{-(\alpha+1)}\left(\int_{1/c}^{1}q_\alpha(t)\ dt\right)^{-1}d\left\{\int_{1/c}^{1}(1-u)^{n-2}du\int_{\theta/u}^{c\theta}v^\alpha f^{*2}(u,v)dv\right\}\Big/d\theta.$$

若记 $M_a=\bigcup_{\alpha=\pm2,\pm3,\cdots}M_{a,\alpha}$，它仍为 L-零测集，且对给定的 $a\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)-N$，对一切 α，当 $\theta\in(0,\ \infty)-M_a$ 时，(11)，(12)同时成立．

由(11)解出 $f^*(a,\ c\theta)$，平方之后代入(12)，经过移项整理配方，可得

$$\left(f^*\left(a,\ \frac{\theta}{a}\right)-\frac{A(\alpha,\ \theta)}{\alpha+1}\right)^2=\frac{(ac)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left[\frac{A^2(\alpha,\ \theta)}{\alpha+1}-B(\alpha,\ \theta)\right]. \tag{13}$$

再由(11)解出 $f^*\left(a,\ \frac{\theta}{a}\right)$，代入(12)，类似可得

$$\left(f^*(a,c\theta)-\frac{A(\alpha,\theta)}{\alpha+1}\right)^2=\frac{(ac)^{-(\alpha+1)}}{\alpha+1}\left[\frac{A^2(\alpha,\theta)}{\alpha+1}-B(\alpha,\theta)\right]. \tag{14}$$

于是对(13),(14)两边开平方，并且相减后得

$$f^*\left(a,\ \frac{\theta}{a}\right)-f^*(a,c\theta)=W(a,c,\alpha)\sqrt{\left[\frac{A^2(\alpha,\theta)}{\alpha+1}-B(\alpha,\theta)\right]\Big/(\alpha+1)} \tag{15}$$

其中 $W(a,c,\alpha)=\{(\pm(ac)^{\frac{\alpha+1}{2}})-(\pm(ac)^{-\frac{\alpha+1}{2}})\}$. 其中两项中的正负号可能有各种搭配的情况，但不管如何，因 $1<ac$，总有

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}|W(a,c,\alpha)|=\infty.$$

但注意(15)左边与 α 无关，从而有

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}\left(\frac{A^2(\alpha,\theta)}{\alpha+1}-B(\alpha,\theta)\right)\Big/(\alpha+1)=0. \tag{16}$$

于是，在(13)两边令 $\alpha\to-\infty$，因右边趋于零，从而可得

$$f^*\left(a,\ \frac{\theta}{a}\right)=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{A(\alpha,\theta)}{\alpha+1}\triangleq\phi(\theta). \tag{17}$$

同样，在(14)中令 $\alpha\to+\infty$，便得

$$f^*(a,c\theta)=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{A(\alpha,\theta)}{\alpha+1}\triangleq\varphi(\theta). \tag{18}$$

注意，(17),(18)右端均为与变量 a 无关的函数。

综合以上，我们已证明了下面结果：存在一个 L-零测集 $N\subset\left(\frac{1}{c},\ 1\right)$，使对每一 $a\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)-N$，存在一个 L-零测集 $M_a\subset(0,\ \infty)$，使当 $a\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)-N$，$\theta\in(0,\ \infty)-M_a$ 时，(17),(18)成立。

由 Fubini 定理知

$$Q\triangleq\{(a,\theta):a\in(1/c,1)-N,\ \theta\in(0,\infty)-M_a\}^c$$

为 $\left(\frac{1}{c},\ 1\right)\times(0,\ \infty)$ 的二维的零测子集。

记

$$\{(u,\ v)=(a,\ c\theta):\ (a,\ \theta)\in Q\}\triangleq Q_1,$$
$$\{(u,\ v)=(a,\ \theta/a):(a,\ \theta)\in Q\}\triangleq Q_2.$$

不难验证，Q_1, Q_2 仍为 $\left(\frac{1}{c},\ 1\right)\times(0,\ \infty)$ 的 L-零测子集，故当 $(u,\ v)\in\left(\frac{1}{c},\ 1\right)\times(0,\ \infty)-Q_1\cup Q_2$ 时，由(17),(18)，下面两式同时成立

$$f^*(u,\ v)=\phi(uv), \tag{19}$$

$$f^*(u,\ v)=\varphi\left(\frac{v}{c}\right), \tag{20}$$

即有 $\phi(uv)=\varphi\left(\frac{v}{c}\right)$.

记 $S = Q_1 \cup Q_2$，因S为一个二维L-零测集，由 Fubini 定理知，存在一个 $(0, \infty)$ 的L-零测子集W，使对任一给定的 $v \in (0, \infty) - W$，$S_v \triangleq \{u: (u, v) \in S\}$ 为 $\left(\frac{1}{c}, 1\right)$ 的L-零测集。记$\{v_0, v_1, \cdots\}$为$(0,\infty) - W$ 的某一稠密可列子集，显然有

$$\bigcup_{i=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{c}v_i, v_i\right) \cap (0, \infty)\right] = (0, \infty). \tag{21}$$

对每一个给定的v_i，当 $u \in \left(\frac{1}{c}, 1\right) - S_{v_i}$ 时，有

$$f^*(u, v_i) = \psi(uv_i) = \varphi\left(\frac{v_i}{c}\right),$$

即

$$\psi(w) = \varphi\left(\frac{v_i}{c}\right), \qquad 当\ w \in \left(\frac{1}{c}v_i, v_i\right) - v_i S_{v_i}. \tag{22}$$

这里，$v_i S_{v_i} = \{w = uv_i : u \in S_{v_i}\}$，$\left(\frac{1}{c}v_i, v_i\right) - v_i S_{v_i} = \left\{w = uv_i : u \in \left(\frac{1}{c}, 1\right) - S_{v_i}\right\}$.

记$H = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty}(v_i S_{v_i})$，那么它为$(0, \infty)$的$L$-零测子集，由(21)，(22)易知

$$\psi(w) = \varphi\left(\frac{v_0}{c}\right) \triangleq c_*, \qquad 当\ w \in (0, \infty) - H, \tag{23}$$

故由(20)，(23)知，当 $v \in (0, \infty) - (CHUW)$ 时，对每一个 $u \in \left(\frac{1}{c}, 1\right) - S_v$ 有

$$f^*(u, v) = c_*,$$

即有 $g(\theta) = E_\theta f^*(u, v) = c_*$ 对任意 $\theta > 0$ 成立.

定理证明完毕。

由此定理证明方法容易得到下面结果．其中定理 1′ 包含了[1—3]的结果；推论 2 包含了[4]的结果.

定理 1′. 设 $x_1, \cdots, x_n$ 为从分布族

$$dP_\theta(x) = Q(\theta)x^k I_{(\theta, c\theta)}(x)dx, \qquad 0 < a \leqslant \theta < b$$

中抽得的 iid 样本，其中 $c > 1$，k为任意实数，$a > 0$，$b > ca$，且b可取无穷大值．则任一非常数的可估函数 $g(\theta)$ 均不存在 UMVUE.

推论 1. 设在定理 1′ 中把分布族换为

$$dP_\theta(x) = Q(\theta)(e^x)^{k-1} I_{(\theta, \theta+c)}(x)dx, \qquad a < \theta < b,$$

其中 $c > 0$，$-\infty < k < \infty$，$a + \log c < b$，a, b 分别可取$-\infty$，$+\infty$值，a, b, c都给定，结论仍然成立.

此外，当样本容量为 1 时，对分布族

$$dP_\theta(x) = Q(\theta)f(x)I_{[\theta < x < c\theta]}(x)dx, \qquad 0 < \theta < \infty, \qquad c > 1,$$

其中 $\frac{1}{f(x)}$ 在任意区间 $[a, b]$ 上可积，同样可证对任意的非常数可估函数 $g(\theta)$ 不存在 UMVUE，只要构造出此分布族的一族零的无偏估计 $g(x)$，这里 $g(x) = g_c^*(x)/f(x)$，

$a \in (0, c-1)$,

$$g_a^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{c^{n-1}}(c-1-a), & x \in (c^{n-1}, c^{n-1}(1+a)], \\ -\frac{1}{c^{n-1}}a & x \in (c^{n-1}(1+a), c^n]. \end{cases}$$

用定理的类似方法即可证得结果。

参　考　文　献

[1] 陈桂景、陈希孺，UMVUE 不存在的一种分布族，科学通报，15(1981) 902—904.

[2] Chen Guijing, Chen Xiru, Nonexistence of UMVUE for the Parameter of a Two-sided Truncated Family (已投《数学研究与评论》).

[3] 陈　刚，一类截断型分布族 UMVUE 的不存在性(已投数学学报).

[4] Mc. Graw-Hill, Introduction to the Theory of Statistics, 1974年.

NONEXISTENCE OF UMVUE IN TWO-SIDE TRUNCATED DISTRIBUTION FAMILY

ZHU LIXING

(*Anhui University*)

ABSTRACT

Suppose $X_1, \cdots, X_n$ are iid. samples drawn from a one-dimensional population $dP_\theta(x) = Q(\theta)x^k I_{(\theta, c\theta)}(x)dx$, $a \leqslant \theta < b$, where $c > 1$, $a > 0$, $b > ca$ and k are given constants and the parameter θ runs over (a, b). It is shown that for any non-constant estimable function $g(\theta)$, there is no uniformly minimum variance unbiased estimate of $g(\theta)$ (in (a, b)) based on $X_1, \cdots, X_n$.