系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(2) (2008, 2), 215–224

四阶奇异边值问题正解的全局结构*

路 慧 芹

(山东师范大学数学科学学院， 济南 250014)

摘要 利用上下解方法研究了一类四阶奇异边值问题正解的全局结构．证明了解集存在无界连通分支并给出了多个正解的存在性结果，推广和改进了相关文献的结果．

关键词 奇异边值问题，连通分支，正解，上下解．

MR(2000) 主题分类号 34B15, 47H15

1 引 言

在本文中，我们研究下列奇异边值问题 (SBVP) 正解的全局结构

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda f(t,u(t)), \quad t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \quad u''(0)=u''(1)=0, \end{cases} \tag{1.1$_\lambda$}$$

其中 $\lambda\in R^+$ 是参数， $R^+=[0,+\infty)$, $f(t,u)\in C((0,1)\times[0,+\infty),[0,+\infty))$, $f(t,u)$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 处是奇异的且在 $(0,1)\times(0,+\infty)$ 的任意子区间上不恒等于零．

文 [1–2] 研究了 SBVP$(1.1)_\lambda$, 在某些条件下证明了存在一个正实数 λ_0 使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时 SBVP$(1.1)_\lambda$ 没有正解；当 $0<\lambda\le\lambda_0$ 时 SBVP$(1.1)_\lambda$ 至少存在一个正解．但是，在这些文章中都要求 f 关于 u 是非减的．

本文在更弱的条件下通过研究 SBVP$(1.1)_\lambda$ 的解集结构，给出了该问题多个正解的存在性结果，推广和改进了文 [1–2] 中的相关结果．非线性微分方程的四阶奇异边值问题是一个十分重要的研究领域，其研究工作见文 [1–6].

(λ,u) 称为 SBVP$(1.1)_\lambda$ 的一个正解是指 $\lambda>0$, $u\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)$ 满足 SBVP$(1.1)_\lambda$ 且 $u(t)>0$, $t\in(0,1)$.

2 预备知识和引理

为方便起见，列条件如下

(A_1) 存在 $q(t)\in C((0,1),R^+)$ 和 $h(u)\in C([0,+\infty),R^+)$ 满足对任意的 $(t,u)\in(0,1)\times[0,+\infty)$ 有

$$f(t,u)\le q(t)h(u), \qquad \int_0^1 t(1-t)q(t)\mathrm{d}t<+\infty.$$

* 国家自然科学基金 (10471075) 和国家自然科学基金数学天元基金 (A0324616) 资助课题．
收稿日期：2005-03-30, 收到修改稿日期：2006-03-06.

(A_2) 存在 $0<a<b<1$, 使得 $\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{f(s,u)}{u}=+\infty$ 和 $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(s,u)}{u}=+\infty$ 关于 $s\in[a,b]$ 一致成立.

本文中所使用的基本空间为 $E=R\times C[0,1]$. 众所周知，如果对任意的 $x\in C[0,1]$ 赋以范数 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$, 则 $C[0,1]$ 为一个 Banach 空间. 进一步，对 $(\lambda,x)\in E$, 令 $\|(\lambda,x)\|=\max\{|\lambda|,\|x\|\}$, E 也成为一个 Banach 空间.

令

$$P=\{u\in C([0,1],R^+)|\ u(t)\geq a(1-b)u(s),\quad t\in[a,b],\ s\in[0,1]\}.$$

显然， P 是 $C[0,1]$ 中的锥. 令 $\Sigma=\overline{\left\{(\lambda,u)\in R^+\times P:u\neq\theta,\ (\lambda,u)\text{ 满足 SBVP}(1.1)_\lambda\right\}}$. 明显地， $(0,\theta)\in\Sigma$, 其中 θ 表示 $C[0,1]$ 中的零元素. 令 C 是 Σ 中发自 $(0,\theta)$ 的连通分支. 显然 C 是闭的.

众所周知， $\text{SBVP}(1.1)_\lambda$ 的正解等价于下列积分方程

$$u(t)=\lambda(Tu)(t)=\lambda\int_0^1G(t,s)\int_0^1G(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \tag{2.1}$$

有正解 (λ,u), 其中 $\lambda>0,\ u\in P\backslash\{\theta\}$.

$$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t), & 0\leq s\leq t\leq 1,\\[2ex] t(1-s), & 0\leq t\leq s\leq 1.\end{cases} \tag{2.2}$$

由文 [7] 中的 (9.4.12) 和 (9.4.13) 式知， (2.2) 式满足

$$G(t,s)\geq a(1-b)G(s,s)\geq a(1-b)G(\tau,s),\quad t\in[a,b],\tau,\ s\in[0,1]. \tag{2.3}$$

若条件 (A_1) 成立，则由上式易证算子 T 映 P 入 P 且 T 是全连续的 [5]. 因此， Σ 是局部紧且闭的.

考虑下列问题

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)=F(t,u(t)),\quad t\in(0,1),\\[2ex] u(0)=x_0,\quad u(1)=x_1,\quad u''(0)=c,\quad u''(1)=d,\end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $x_0\geq 0,\ x_1\geq 0,\ c\leq 0,\ d\leq 0$. $F\in C(D,R)$ 和 $D\subset(0,1)\times R$.

$\alpha\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)$ 被称为 (2.4) 的一个下解是指 $\alpha(t)$ 满足: 对所有的 $t\in(0,1)$, $(t,\alpha(t))\in D$ 且 $\alpha^{(4)}(t)\leq F(t,\alpha(t)),\ t\in(0,1),\ \alpha(0)\leq x_0,\ \alpha(1)\leq x_1,\ \alpha''(0)\geq c,\ \alpha''(1)\geq d$. 同样地，$\beta\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)$ 被称为 (2.4) 的一个上解是指 $\beta(t)$ 满足上述诸不等式的反向不等式. 如果 $\alpha(t)\leq\beta(t),\forall t\in[0,1]$, 定义

$$D_\alpha^\beta=\{(t,u)\in(0,1)\times R:\alpha(t)\leq u\leq\beta(t)\},$$

则我们有下列结果

引理 2.1 令 α 和 β 分别是 (2.4) 的下解和上解且满足

1) $\alpha(t)\leq\beta(t),\ \ \forall t\in[0,1]$ 且 $D_\alpha^\beta\subset D$;

2) 存在一个函数 $p \in C((0,1), R^+)$ 满足

$$| F(t,u) | \leq p(t), \quad \forall\ (t,u) \in D_\alpha^\beta$$

和

$$\int_0^1 t(1-t)p(t)\mathrm{d}t < +\infty,$$

则 BVP(2.4) 至少有一个解 $u \in C^2[0,1] \cap C^4(0,1)$ 使得 $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$, $\forall\ t \in [0,1]$.

证　首先，我们定义一个辅助函数

$$F^*(t,u) = \begin{cases} F(t,\alpha(t)), & u < \alpha(t); \\ F(t,u), & \alpha(t) \leq u \leq \beta(t); \\ F(t,\beta(t)), & u > \beta(t). \end{cases} \tag{2.5}$$

由条件 $D_\alpha^\beta \subset D$ 及 F^* 的定义易验证 $F^* : (0,1) \times R \to R$ 是连续的，由条件 (2), 知它满足

$$| F^*(t,u) | \leq p(t), \quad \forall\ (t,u) \in (0,1) \times R. \tag{2.6}$$

考虑下列边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = w(t), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = x_0, \quad u(1) = x_1, \quad u''(0) = c, \quad u''(1) = d. \end{cases} \tag{2.7}$$

令

$$y(t) = u(t) - x_1 t - x_0(1-t) + \int_0^1 G(t,\tau)[c + (d-c)\tau]\mathrm{d}\tau, \quad t \in [0,1], \tag{2.8}$$

其中 $u \in C^2[0,1] \cap C^4(0,1)$ 是 BVP(2.7) 的解，则易知 $y(t) \in C^2[0,1] \cap C^4(0,1)$ 且

$$\begin{cases} y^{(4)}(t) = w(t), & t \in (0,1), \\ y(0) = y(1) = 0, & y''(0) = y''(1) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

由中值定理，存在 $t_0 \in (0,1)$ 使得 $y^{(3)}(t_0) = 0$. 对 (2.9) 式两边连续积分两次，我们容易得到

$$-y''(t) = \int_0^1 G(t,s)w(s)\mathrm{d}s, \tag{2.10}$$

再对 (2.10) 式两边连续积分两次，我们有

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 G(s,\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s, \quad \forall\ t \in [0,1].$$

因此

$$u(t) = x_1 t + x_0(1-t) - \int_0^1 G(t,\tau)[c + (d-c)\tau]\mathrm{d}\tau + \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 G(s,\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1]. \tag{2.11}$$

令 $X=C[0,1]$, 定义一个积分算子 A： $X\to X$ 如下

$$(Au)(t):=x_1t+x_0(1-t)-\int_0^1 G(t,\tau)[c+(d-c)\tau]\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)F^*(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1].$$

由 (2.6) 式和条件 (2) 知： $A:X\to X$ 有定义，连续，且 $A(X)$ 是一个有界集. 进一步易得，对任意的 $u\in X$, $Au(t)\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)$, 而且 $u\in X$ 是下列边值问题的一个解

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=F^*(t,u), & t\in(0,1),\\ u(0)=x_0,\quad u(1)=x_1,\quad u''(0)=c,\quad u''(1)=d, \end{cases}\tag{2.12}$$

当且仅当 $u=Au$.

由于 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 是连续的, 从而在该区间上是一致连续的, 故对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)<\varepsilon$ 使得对任意的 $t_1,t_2\in[0,1]$, $|t_1-t_2|<\delta$ 时，对任意的 $s\in[0,1]$, 有

$$|G(t_1,s)-G(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{(|d+c|+\int_0^1 G(s,s)p(s)\mathrm{d}s)}.$$

因此，对任意的 $u\in X$, 有

$$\begin{aligned} &|Au(t_1)-Au(t_2)|\\ \le{}& |x_1-x_0||t_1-t_2|+\int_0^1 |G(t_1,\tau)-G(t_2,\tau)|\left(|d+c|+\int_0^1 G(s,s)p(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\ <{}&(|x_1-x_0|+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

于是由 Ascoli-Arzela 定理知， $A(X)$ 是相对紧的. 因此由 Schauder 不动点定理可知算子 A 至少有一个不动点 $u\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)$. 从而，边值问题 (2.12) 至少有一个解 $u\in C^2[0,1]$.

下证 $\alpha(t)\le u(t)\le\beta(t)$, $\forall t\in[0,1]$. 事实上，假设不成立则存在 $t^*\in(0,1)$ 使得 $u(t^*)<\alpha(t^*)$. 由于 $u,\alpha\in C^2[0,1]$, 则可找到一个最大的开区间 $(\eta,\gamma)\subset(0,1)$ 使得 $t^*\in(\eta,\gamma)$ 且

$$u(\eta)=\alpha(\eta),\quad u(\gamma)=\alpha(\gamma),\quad u(t)<\alpha(t),\quad \forall\, t\in(\eta,\gamma).$$

对 $t\in[\eta,\gamma]$, 我们有 $F^*(t,u(t))=F(t,\alpha(t))$. 因此

$$u^{(4)}(t)=F(t,\alpha(t)),\quad t\in[\eta,\gamma].$$

由于 $u=Au$, 即

$$u(t)=x_1t+x_0(1-t)-\int_0^1 G(t,\tau)[c+(d-c)\tau]\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)F^*(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1].$$

对上式连续求导两次可得

$$u''(t)=y''(t)+c+(d-c)t=c+(d-c)t-\int_0^1 G(t,s)F(s,\alpha(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[\eta,\gamma].$$

因此

$$u''(\eta) = c + (d-c)\eta - \int_0^1 G(\eta, s)F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s,$$

$$u''(\gamma) = c + (d-c)\gamma - \int_0^1 G(\gamma, s)F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s.$$

另一方面，由于 α 是 (2.4) 的一个下解，我们有

$$\begin{cases} \alpha^{(4)}(t) \le F(t, \alpha(t)), & t \in (0,1), \\ \alpha''(0) \ge c, & \alpha''(1) \ge d. \end{cases}$$

任取 $t_0 \in (0,1)$, 则对上式中的第一个式子连续积分两次可得

$$\alpha^{(3)}(t_0) - \alpha^{(3)}(t) \le \int_t^{t_0} F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s, \quad t \in (0,1),$$

$$\begin{aligned} & t\alpha^{(3)}(t_0) - \alpha''(t) + \alpha''(0) \\ \le & \int_0^t \int_\tau^{t_0} F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ = & -t\int_{t_0}^t F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s + \int_0^t sF(s, \alpha(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

即

$$t\alpha^{(3)}(t_0) - \alpha''(t) + \alpha''(0) \le -t\int_{t_0}^t F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s + \int_0^t sF(s, \alpha(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1]. \tag{2.13}$$

又

$$\alpha^{(3)}(t) - \alpha^{(3)}(t_0) \le \int_{t_0}^t F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s, \quad t \in (0,1),$$

$$\begin{aligned} & \alpha''(1) - \alpha''(t) - (1-t)\alpha^{(3)}(t_0) \\ \le & \int_t^1 \int_{t_0}^\tau F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ = & (1-t)\int_{t_0}^t F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s + \int_t^1 (1-s)F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1], \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \alpha''(1) - \alpha''(t) - (1-t)\alpha^{(3)}(t_0) \\ \le & (1-t)\int_{t_0}^t F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s + \int_t^1 (1-s)F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

由 (2.13) 和 (2.14) 消去 $\alpha^{(3)}(t_0)$ 可得

$$\begin{aligned} t\alpha''(1) - \alpha''(t) + (1-t)\alpha''(0) & \le (1-t)\int_0^t sF(s, \alpha(s))\mathrm{d}s + t\int_t^1 (1-s)F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s \\ & = \int_0^1 G(t, s)F(s, \alpha(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

从而

$$\alpha''(t) \geq c + (d-c)t - \int_0^1 G(t,s)F(s,\alpha(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$

因此

$$\alpha''(\eta) \geq c + (d-c)\eta - \int_0^1 G(\eta,s)F(s,\alpha(s))\mathrm{d}s,$$

$$\alpha''(\gamma) \geq c + (d-c)\gamma - \int_0^1 G(\gamma,s)F(s,\alpha(s))\mathrm{d}s.$$

令 $z(t) := u(t) - \alpha(t),\ \forall\, t \in [\eta,\gamma]$, 可得

$$\begin{cases} z^{(4)}(t) \geq 0, \quad t \in (\eta,\gamma), \\ z(\eta) = 0 = z(\gamma), \quad z''(\eta) \leq 0, \quad z''(\gamma) \leq 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

在 SBVP(2.7) 中, 令 $w(t) \geq 0,\ x_0 = x_1 = 0$, 由 (2.11) 式, 我们容易获得 $z(t) \geq 0,\ \forall\, t \in [\eta,\gamma]$, 即 $u(t) \geq \alpha(t),\ \forall\, t \in [\eta,\gamma]$, 此与假设 $u(t^*) < \alpha(t^*)$ 相矛盾. 因此 $\alpha(t) \leq u(t),\ \forall\, t \in [0,1]$. 类似地可证 $u(t) \leq \beta(t),\ \forall\, t \in [0,1]$. 从而 $u \in C^2[0,1] \cap C^4(0,1)$ 是 BVP(2.4) 的一个解且满足 $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t),\ \forall\, t \in [0,1]$.

注 2.1 此引理与文 [1] 中的引理 2.2 相比不仅拓宽了边界条件, 而且更重要的是在没有附加任何其他条件的情况下删除了 $F(t,u)$ 关于 u 是不降的这一条件.

引理 2.2 令 P 是 Banach 空间 E 中的锥, 算子 $A: P \to P$ 是全连续的且满足 $\lim\limits_{x\in P,\ \|x\|\to 0^+} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = +\infty$, 则

i) 对任意的 $\overline{\lambda} \in (0,+\infty)$, 都存在 $\tau > 0$ 使得 $L \cap ([\overline{\lambda},+\infty) \times T_\tau) = \emptyset$, 其中 $T_\tau = \{x \in P \mid \|x\| < \tau\}$, $L = \overline{\{(\lambda,x) |\ \lambda \in R^+,\ x \in P\backslash\{\theta\},\ x = \lambda Ax\}}$;

ii) L 中发自 $(0,\theta)$ 的连通分支 C 在 $[0,+\infty) \times P$ 上是无界的.

引理 2.3 令 P 是 Banach 空间 E 中的锥, 算子 $A: P \to P$ 是全连续的且满足 $\lim\limits_{x\in P,\ \|x\|\to +\infty} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = +\infty$, 则对任意的 $\mu \in (0,+\infty)$, $L \cap ([\mu,+\infty) \times P)$ 是有界的.

注 2.2 引理 2.2 和引理 2.3 的结论容易从文 [8] 中定理 1 的证明中获得.

3 主要定理

定理 3.1 若条件 (A_1) 和 (A_2) 成立, 则存在 $\lambda^* > 0$ 使得 $\Sigma \subset [0,\lambda^*] \times P$ 且 $\Sigma \cap (\{\lambda\} \times P) \neq \phi,\ \forall\, \lambda \in [0,\lambda^*]$.

证 考虑下列问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = q(t), \\ u(0) = u(1) = 0, u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases}$$

易知

$$w(t) = \int_0^1 G(t,s) \int_0^1 G(s,\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$

是上述问题的一个解．由条件 (A_1) 知 $w(t)\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)$.

令 $M_0=\max\limits_{t\in[0,1]}h(w(t))$, 则 $M_0>0$ 且当 $0<\lambda\le\frac{1}{M_0}$ 时，有

$$\begin{aligned}w^{(4)}(t)-\lambda f(t,w(t))&=q(t)-\lambda f(t,w(t)))\ge q(t)(1-\lambda h(w(t)))\\&\ge q(t)\Big(1-\frac{1}{M_0}h(w(t))\Big)\ge 0,\quad t\in(0,1).\end{aligned}$$

这表明当 $0<\lambda\le\frac{1}{M_0}$ 时， $w(t)$ 是 SBVP$(1.1)_\lambda$ 的一个上解．另一方面， $\alpha(t)\equiv\theta$ 显然是 SBVP$(1.1)_\lambda$ 的一个下解且 $\alpha(t)\le w(t)$, $\forall\ t\in[0,1]$. 因此，由引理 2.1 和 $f(t,u)$ 在 $(0,1)\times(0,+\infty)$ 的任意子区间上不恒等于零知， SBVP$(1.1)_\lambda$ 对每一个满足 $0<\lambda\le\frac{1}{M_0}$ 的 λ 都有一个正解.

令 $\lambda_1>0$ 是固定的，如果当 $\lambda=\lambda_1$ 时， SBVP$(1.1)_\lambda$ 有一个正解 u_1, 则对所有的 $\lambda\in(0,\lambda_1)$, SBVP$(1.1)_\lambda$ 都有一个正解，因为 u_1 和 θ 分别是 SBVP$(1.1)_\lambda$ 的上、下解.

定义

$$\varLambda=\{\lambda>0|\ \text{SBVP}(1.1)_\lambda\text{有一个正解}u\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)\},$$

则 $\varLambda\ne\emptyset$ 且对任意的 $\lambda_1\in\varLambda$, 都有 $(0,\lambda_1]\subset\varLambda$. 下证 $\varLambda$ 是有界的.

由条件 (A_2) 中的第一个极限易知，对任意大的 $M>0$, 都存在充分小的 $\delta>0$ 使得

$$f(s,u)\ge Mu,\quad\forall\ s\in[a,b],\ 0\le u\le\delta.$$

从而，对任意的 $u\in P$, $0\le u\le\delta$, 由 (2.1) 式可得

$$\begin{aligned}T(u(t))&=\int_0^1G(t,s)\int_0^1G(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&\ge M\int_0^1G(t,s)\int_a^bG(s,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&\ge Ma(1-b)\|u\|\int_0^1G(t,s)\int_a^bG(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1],\end{aligned}$$

故有

$$\|Tu\|\ge\|u\|Ma(1-b)\max_{t\in[0,1]}\Big\{\int_0^1G(t,s)\int_a^bG(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\Big\}.$$

由于 M 是任意大的， $a(1-b)\max\limits_{t\in[0,1]}\{\int_0^1G(t,s)\int_a^bG(s,\tau)\mathrm{d}\tau ds\}$ 是一个正常数．因此，

$$\lim_{u\in P,\ \|u\|\to0^+}\frac{\|Tu\|}{\|u\|}=+\infty.\tag{3.1}$$

由条件 (A_2) 中的第二个极限易知，对任意大的 $\overline{M}>0$, 存在 $N>0$ 使得

$$f(s,u)\ge\overline{M}u,\quad\forall\ s\in[a,b],\ u\ge N.$$

从而，对任意的 $u\in P,\ u\geq N$, 由 (2.1) 式可得

$$\begin{aligned}T(u(t))&=\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&\geq \overline{M}\int_0^1 G(t,s)\int_a^b G(s,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&\geq \overline{M}a(1-b)\|u\|\int_0^1 G(t,s)\int_a^b G(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1],\end{aligned}$$

故有

$$\|Tu\|\geq\|u\|\overline{M}a(1-b)\max_{t\in[0,1]}\Big\{\int_0^1 G(t,s)\int_a^b G(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\Big\},$$

由于 $\overline{M}$ 是任意大的， $a(1-b)\max\limits_{t\in[0,1]}\{\int_0^1 G(t,s)\int_a^b G(s,\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\}$ 是一个正常数．因而

$$\lim_{u\in P,\ \|u\|\to+\infty}\frac{\|Tu\|}{\|u\|}=+\infty.\tag{3.2}$$

因此, 算子 T 满足引理 2.2 和引理 2.3 的条件. 由引理 2.2 和引理 2.3 知, 对任意的 $\overline{\lambda}\in(0,+\infty)$, 都存在 $0<r<1,\ R>1$ 使得

$$\Sigma\cap([\overline{\lambda},+\infty)\times P_r)=\emptyset,\quad \Sigma\cap([\overline{\lambda},+\infty)\times(P\backslash\overline{P_R}))=\emptyset,\tag{3.3}$$

其中 $P_r=\{x\in P\mid \|x\|<r\}$.

对于 $(\lambda,u)\in\Sigma\cap([\overline{\lambda},+\infty)\times(\overline{P_R}\backslash P_r))$, 由于 $ra(1-b)\leq u(t)\leq R,\quad t\in[a,b]$, 我们有

$$\begin{aligned}R\geq u(t)=\lambda T(u(t))&=\lambda\int_0^1 G(t,s)\int_0^1 G(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&\geq\lambda\int_0^1 G(t,s)\int_a^b G(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&\geq\lambda\int_0^1 G(t,s)\int_a^b G(s,\tau)f_{r,R}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\quad t\in[a,b],\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中 $f_{r,R}(s)=:\inf\{f(s,u):u\in[ra(1-b),\ R]\},\ s\in[a,b]$. 由于 $f(t,u)$ 在 $(0,1)\times(0,+\infty)$ 的任意子区间上不恒等于零并且 $f(t,u)\in C((0,1)\times[0,+\infty),[0,+\infty))$, 从而有

$$\max_{t\in[a,b]}\int_0^1 G(t,s)\int_a^b G(s,\tau)f_{r,R}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s>0.$$

由 (3.4) 式可得

$$\lambda\leq R\Big(\max_{t\in[a,b]}\int_0^1 G(t,s)\int_a^b G(s,\tau)f_{r,R}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\Big)^{-1}.\tag{3.5}$$

这意味着 $\Sigma\cap([\overline{\lambda},+\infty)\times(\overline{P_R}\backslash P_r))$ 是有界的. 再结合 (3.3) 式可知, 对每一个 $\overline{\lambda}\in(0,+\infty)$, $\Sigma\cap([\overline{\lambda},+\infty)\times P)$ 都是有界的．这表明 Λ 是有界的.

令 $\lambda^*=\sup\Lambda$. 下证当 $\lambda=\lambda^*$ 时， $\mathrm{SBVP}(1.1)_\lambda$ 存在正解．我们选取增序列 $\{\lambda_n\}$ 使得 $\lambda_n\to\lambda^*(n\to+\infty)$, 由于 $\mathrm{SBVP}(1.1)_\lambda$ 对每一个 $\lambda_n(n=1,2,\cdots)$ 都有一个正解 u_n, 因此

$(\lambda_n,\ u_n)\in\Sigma$. 由于 $\{u_n\}$ 是有界的且 Σ 是局部紧的，故存在 $u\in C^2[0,1], u(t)>0,\ t\in(0,1)$ 使得 $(\lambda^*,\ u)\in\Sigma$. 因此， $\Sigma\subset[0,\lambda^*]\times P$ 且 $\Sigma\cap(\{\lambda\}\times P)\neq\emptyset,\ \forall\ \lambda\in[0,\lambda^*]$.

定理 3.2 若条件 (A_1) 和 (A_2) 成立，则 Σ 中存在发自 $(0,\theta)$ 趋向于 $(0,+\infty)$ 的连通分支 C 并且具有下列性质

1) $C\subset\Sigma\subset([0,\lambda^*]\times P)$;

2) C 在 $[0,\lambda^*]\times P$ 中是无界的；

3) 存在 $\lambda_0\in(0,\lambda^*]$ 使得对任意的 $\lambda\in(0,\lambda_0)$, $\mathrm{SBVP}(1.1)_\lambda$ 至少有两个正解 $u_\lambda^*, u_\lambda^{**}$ 满足 $\|u_\lambda^*\|>\|u_\lambda^{**}\|>0$ 且 $(\lambda,u_\lambda^*)\in C,\ (\lambda,u_\lambda^{**})\in C$;

4) $\lim\limits_{\lambda\to0^+,\ (\lambda,\ u_\lambda^*)\in C}\|u_\lambda^*\|=+\infty,\quad \lim\limits_{\lambda\to0^+,\ (\lambda,\ u_\lambda^{**})\in C}\|u_\lambda^{**}\|=0.$

证 由定理 3.1 知 $\Sigma\subset[0,\lambda^*]\times P$, 因此， $C\subset\Sigma\subset[0,\lambda^*]\times P$, 即结论 1) 成立.

由 (3.1) 式和 (3.2) 式知，算子 T 满足引理 2.2 和引理 2.3 的条件. 由引理 2.2 的 ii) 知 Σ 中存在发自 $(0,\theta)$ 的连通分支 C 在 $[0,\lambda^*]\times P$ 中是无界的，即结论 2) 成立.

由定理 3.1 的证明知，对每一个 $\overline{\lambda}\in(0,+\infty)$, $\Sigma\cap([\overline{\lambda},+\infty)\times P)$ 都是有界的. 注意到结论 2) 易知 Σ 中存在发自 $(0,\theta)$ 的无界连通分支 C 趋向于 $(0,+\infty)$, 从而结论 4) 成立.

对于 $(\lambda,u)\in\Sigma\cap([\overline{\lambda},+\infty)\times(\overline{P_R}\backslash P_r))$, 其中 $R>1>r>0$, 由于

$$\begin{aligned}u(t)=\lambda T(u(t))&=\lambda\int_0^1G(t,s)\int_0^1G(s,\tau)f(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\&\le\lambda\int_0^1G(t,s)\int_0^1G(s,\tau)q(\tau)h(u(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{3.6}$$

令 $M^*=\max\limits_{u\in[0,R]}h(u)$. 由 (3.6) 式可得

$$\lambda\ge r\Big(M^*\max_{t\in[0,1]}\int_0^1G(t,s)\int_0^1G(\tau,\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\Big)^{-1}.$$

结合 (3.5) 式可知，对于 $(\lambda,u)\in\Sigma\cap([\overline{\lambda},+\infty)\times(\overline{P_R}\backslash P_r))$, 其中 $R>1>r>0$ 有

$$\begin{aligned}\lambda'\equiv: r\Big(M^*\max_{t\in[0,1]}\int_0^1G(t,s)\int_0^1G(\tau,\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\Big)^{-1}&\le\lambda\\\le R\Big(\max_{t\in[a,b]}\int_0^1G(t,s)\int_a^bG(s,\tau)f_{r,R}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\Big)^{-1}&:\equiv\lambda''.\end{aligned}\tag{3.7}$$

因此，

$$\Sigma\cap((0,+\infty)\times(\overline{P_R}\backslash P_r))\subset([\lambda',\lambda'']\times(\overline{P_R}\backslash P_r)).\tag{3.8}$$

注意到 C 是 Σ 中发自 $(0,\theta)$ 趋向于 $(0,+\infty)$ 的无界连通分支. 由 (3.7) 和 (3.8) 式可知对任意的 $\lambda\in(0,\lambda')$, $\mathrm{SBVP}(1.1)_\lambda$ 至少有两个正解 $u_\lambda^*, u_\lambda^{**}$ 满足 $\|u_\lambda^*\|>R>r>\|u_\lambda^{**}\|>0$ 且 $(\lambda,u_\lambda^*)\in C,\ (\lambda,u_\lambda^{**})\in C$. 从而结论 (3) 成立.

注 3.1 若 $f(t,0)$ 在 $(0,1)$ 的任意子区间上不恒等于零，则条件 (A_2) 中的第一个极限式自动成立.

参 考 文 献

[1] 张炳根，孔令举．四阶奇异边值问题正解的存在性．数学年刊， 2001, **22A**(4): 397–402.
[2] Zhang B G and Kong L. Positive solutions of fourth order singular boundary value problems. *Nonlinear Studies*, 2000, **7**(1): 70–77.
[3] Aftabizadeh A R. Existence and uniqueness results for fourth order boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1986, **116**(2): 415–426.
[4] O'Regan D. Solvability of some fourth (and higher) order singular boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1991, **161**(1): 78–116.
[5] Ma R and Wang H. On the existence of positive solutions of fourth order differential equations. *Applicable Analysis*, 1995, **59**(1–4): 225-231.
[6] Robert Dalmasso. Positive solutions of singular boundary value problems. *Nonlinear Analysis*, 1996, **27**(6): 645–652.
[7] 郭大钧，孙经先．抽象空间常微分方程．济南：山东科学技术出版社， 2002.
[8] Lu Huiqin, Sun Jingxian. Global results for eigenvectors of superlinear operators and applications. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 2004, **35**(2): 225–236.

GLOBAL RESULTS FOR POSITIVE SOLUTIONS OF FOURTH ORDER SINGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS

LU Huiqin

(*Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan* 250014)

Abstract The structure of the solution set for a class of fourth order singular boundary value problem is investigated. Behaviour of the solution set and the existence of multiple positive solutions are obtained by means of the method of upper and lower solutions.

Key words Singular boundary value problems, continuum, positive solutions, upper and lower solutions.