系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
12 (3) (1992), 207—214

图 $K_n-E(kP_s\cup rP_t)$ 的色唯一性*

刘 儒 英

(青海师范大学数学系，西宁 810008)

一、引 言

本文仅考虑有限、无向、无环的简单图. $P(G,\lambda)$ 表示图G的色多项式. 如果从 $P(H,\lambda)=P(G,\lambda)$ 可以推出图H和G同构,则称G是色唯一的.

设G是一个顶点数不超过n的图,用 $K_n-E(G)$ 表示从完全图 K_n 中删去一个和G同构的子图的所有边而得到的图. 关于 $K_n-E(G)$ 型图中的色唯一图的研究已有不少结果,参见[1—5].

本文用完全不同的方法给出了一类新的色唯一图. 即证明了,当 $s\neq 4$, $t\neq 4$ 且 P_s 和 P_t 都是不可约路时, $K_n-E(kP_s\cup rP_t)$ 是色唯一的. 这里 P_i 表示具有 i 个顶点的路, k,r 是满足 $ks+rt\leqslant n$ 的任意非负整数. 其中"不可约路"的定义将在下节给出.

二、预备知识

定义 1. 若图G的生成子图 G_0 的每个分支都是完全图，则称 G_0 为G的理想子图.

用 $N(G,k)$ 表示图G的具有k个分支的理想子图的个数,$\overline{G}$ 为G的补图. 由[6]的定理 15 容易推出

$$P(G,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}N(\overline{G},i)(\lambda)_i,\tag{1}$$

这里,n为G的顶点数, $(\lambda)_i=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-i+1)$.

定义 2. 将多项式

$$h(G,x)=\sum_{i=1}^{n}N(G,i)x^i\tag{2}$$

称为图G的伴随多项式,这里n为G的顶点数.

称图G是伴随唯一的,如果由 $h(H,x)=h(G,x)$ 可以推出图H和G同构. 由(1),

---

* 国家自然科学基金资助项目.

1990 年 1 月 10 日收到,1991 年 8 月 2 日收到修改压缩稿.

(2)两式可知，将 $\overline{G}$ 的伴随多项式中的 x^i 换成 $(\lambda)_i$，$i=1,2,\cdots,n$，即得到G的色多项式. 因此，图G是色唯一的，当且仅当 $\overline{G}$ 是伴随唯一的. 伴随多项式的引入，使我们能借助一元多项式的经典代数理论来研究图的色性.

引理 1[7]. 设图G有 k 个分支 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，那么，

$$h(G,x)=h(G_1,x)h(G_2,x)\cdots h(G_k,x).$$

引理 2. 设图G有 p 个顶点，q 条边，A个三角形，度序列为 $(d_1,d_2,\cdots,d_p)$，则

i) $N(G,p-1)=q$,

ii) $N(G,p-2)=A+\binom{q+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}d_i^2.$

证. 根据 $N(G,i)$ 的定义不难得证，从略.

引理 3. 设 $d_1,d_2,\cdots,d_t$ 是一组非负整数，满足 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_t$,

$$d_1+d_2+\cdots+d_t=2t-2,$$

则当且仅当 $d_1=d_2=1$，$d_3=d_4=\cdots=d_t=2$ 时，$\sum_{i=1}^{t}d_i^2$ 取得最小值$4t-6$.

证. 通过考虑 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant t}d_id_j$ 的最大值不难得到.

用 $p(G),q(G),A(G)$ 分别表示图G的顶点数、边数和三角形个数.

引理 4. 设G是具有 p 个顶点，q 条边的连通图，$G\not\cong K_3$，则不等式

$$N(G,p-2)\leqslant\binom{q-1}{2} \tag{3}$$

成立，其中等号成立当且仅当 $G\cong P_{q+1}$.

证. 设G的度序列为 $(d_1,d_2,\cdots,d_p)$，由引理 2，有

$$N(G,p-2)=A(G)+\binom{q+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}d_i^2.$$

分两种情形进行讨论:

情形 I $A(G)=0$，则

$$N(G,p-2)=\binom{q+1}{2}-\frac{1}{2}\sum d_i^2.$$

因为G是连通图，所以 $p\leqslant q+1$. 不妨设 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_p$，则它们对应一个由 $q+1$ 个非负整数组成的数组(有 $q+1-p$ 个零)

$$(0,\cdots,0,d_1,d_2,\cdots,d_p).$$

这$q+1$个数之和为$\sum_{i=1}^{p}d_i=2(q+1)-2$. 由引理 3,

$$\sum_{i=1}^{p}d_i^2\geqslant4(q+1)-6=4q-2,$$

其中等号成立，当且仅当 $p=q+1,d_1=d_2=1$，$d_3=\cdots=d_p=2$，即 $G\cong P_{q+1}$. 所以

$$N(G,p-2) \leqslant \binom{q+1}{2} - \frac{1}{2}(4q-2) = \binom{q-1}{2},$$

其中等号成立,当且仅当 $G \cong P_{q+1}$.

情形 II　$A(G) > 0$.对G定义如下运算 σ:删去一条属于某个三角形的边 $e = vw$,给图$G-e$增加一个新顶点 x，并用一条新边连结x与e的任意一端(不妨设 v)，将所得的新图记为 G_1 (图 1)．将上述过程称为“对G进行了一次去e的σ运算”.

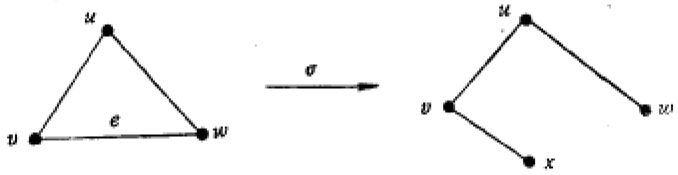

图　1

注意到对G进行了一次σ运算后,点数增加 1,边数不变,三角形个数减少，连通性没有被破坏,原有顶点中仅仅有一个顶点的度数被改变(图 1 中的w点)．并且有

断言．$N(G_1,p(G_1)-2) \geqslant N(G,p(G)-2)$.

事实上,设 $A(G_1) = A(G) - l$，则w在G中的度数 $d_G(w) \geqslant l+1$，这是因为 w至少属于G的 l 个三角形．而且 $d_{G_1}(w) = d_G(w) - 1$．设 $d_G(w) = d_j$，由引理 2，有

$$\begin{aligned} N(G_1,p(G_1)-2) &= A(G_1) + \binom{q+1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} d_i^2 + (d_j-1)^2 + 1\right) \\ &= A(G) - l + \binom{q+1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} d_i^2 - 2d_j + 2\right) \\ &= \left(A(G) + \binom{q+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} d_i^2\right) + (d_j - l - 1) \\ &= N(G,p-2) + (d_G(w) - l - 1) \\ &\geqslant N(G,p(G)-2). \end{aligned}$$

断言证毕.

必存在自然数 m，使得对G相继经过m次σ运算后，所得到的图 G_m 满足:

$$A(G_{m-1}) \neq 0, A(G_m) = 0.$$

注意到 G_m 仍是具有q条边的连通图,因此由情形 I 的证明知

$$N(G_m,p(G_m)-2) \leqslant \binom{q-1}{2}.$$

于是得

$$N(G,p-2) \leqslant N(G_1,p(G_1)-2) \leqslant \cdots \leqslant N(G_m,p(G_m)-2) \leqslant \binom{q-1}{2}.$$

下面,我们进一步证明,在情形 II 的假设 ($A(G) > 0$) 之下,有严格不等式

$$N(G, p-2) < \binom{q-1}{2}$$

成立．换言之，在这种情形下，(3)式永远不会有等号成立．

由于 $A(G_{m-1}) \neq 0$，又可分为两种子情形：

情形 II(a)　设 $A(G_{m-1}) = 1$，并设 G_{m-1} 中唯一的三角形的三个顶点为 u, v 和 w．由于假设 $G \not\cong K_3$ 以及 G_{m-1} 连通，所以 u, v, w 中至少有一个点的度数大于2．不妨设 $d_{G_{m-1}}(w) \geqslant 3$．又因为由 G_{m-1} 变为 G_m 所进行的 σ 运算中去掉的边 e 是任意选择的，所以不妨设删去边 $e = vw$，新增加的点 x 用一条新边和 v 连接(仍参看图 1)．那么

$$\begin{aligned}
&N(G_m, p+m-2) \\
&= A(G_m) + \binom{q+1}{2} - \frac{1}{2}\Big[\sum_{\substack{y \in V(G_{m-1}) \\ y \neq w}} d^2_{G_{m-1}}(y) + (d_{G_{m-1}}(w) - 1)^2 + 1\Big] \\
&= \binom{q+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{y \in V(G_{m-1})} d^2_{G_{m-1}}(y) + (d_{G_{m-1}}(w) - 1) \\
&= \Big[1 + \binom{q+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{y \in V(G_{m-1})} d^2_{G_{m-1}}(y)\Big] + (d_{G_{m-1}}(w) - 2) \\
&= N(G_{m-1}, p+m-3) + (d_{G_{m-1}}(w) - 2) \\
&> N(G_{m-1}, p+m-3).
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
N(G, p-2) &\leqslant N(G_1, p-1) \leqslant \cdots \leqslant N(G_{m-1}, p+m-3) \\
&< N(G_m, p+m-2) \leqslant \binom{q-1}{2}.
\end{aligned}$$

从而有 $N(G, p-2) < \binom{q-1}{2}$.

情形 II(b)　设 $A(G_{m-1}) > 1$．由于 $A(G_m) = 0$，所以在图 G_{m-1} 中必存在边 e，使得只要对 G_{m-1} 进行一次去 e 的 σ 运算即可去掉 G_{m-1} 的所有三角形．因此，在 G_{m-1} 中所有的三角形都有一条公共边 e．设 G_{m-1} 中被所有三角形覆盖的顶点导出的子图如

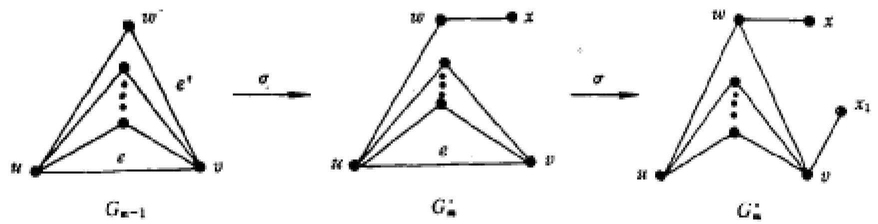

图　2

图 2 所示．现在，我们另外选一条边 $e' = wv$，首先对 G_{m-1} 另外作去 e' 的 σ 运算，使新点 x 和 $G_{m-1} - e'$ 的 w 连结，得到新图 G'_m(如图 2)．(注意 $A(G'_m) = A(G_{m-1}) - 1$.) 然后，对 G'_m 再进行一次去 e 的 σ 运算，得图 G''_m．因为 $A(G''_m) = 0$，所以由情形 I 知，

$$N(G''_m,(p+m+1)-2)\leqslant\binom{q-1}{2}.$$

那么

$$\begin{aligned}
&N(G'_m,p+m-2)\\
&=A(G'_m)+\binom{q+1}{2}-\frac{1}{2}\Big[\sum_{\substack{y\in V(G_{m-1})\\ y\neq v}}d^2_{G_{m-1}}(y)+(d_{G_{m-1}}(v)-1)^2+1\Big]\\
&=A(G_{m-1})-1+\binom{q+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{y\in V(G_{m-1})}d^2_{G_{m-1}}(y)+d_{G_{m-1}}(v)-1\\
&=\Big[A(G_{m-1})+\binom{q+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{y\in V(G_{m-1})}d^2_{G_{m-1}}(y)\Big]+(d_{G_{m-1}}(v)-2)\\
&=N(G_{m-1},(p+m-1)-2)+(d_{G_{m-1}}(v)-2).
\end{aligned}$$

注意到 $d_{G_{m-1}}(v)>2$，因此，

$$N(G_{m-1},p+m-3)<N(G'_m,p+m-2)\leqslant N(G''_m,p+m-1)\leqslant\binom{q-1}{2}.$$

从而得，

$$N(G,p-2)\leqslant N(G_{m-1},p+m-3)<\binom{q-1}{2}.$$

引理 4 证毕.

注 1. 引理 4 蕴涵着下述重要结论：如果

$$h(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

是某个不同构于 K_3 的连通图 G 的伴随多项式,并且满足 $b_2=\binom{b_1-1}{2}$,则 $G\cong P_{b_1+1}$，而且 $n=b_1+1$.

事实上,由引理 2，$b_1=q(G)$，又因为 G 是连通图，$G\ncong K_3$，而且满足

$$N(G,p(G)-2)=b_2=\binom{b_1-1}{2}=\binom{q(G)-1}{2},$$

由引理 4，$G\cong P_{q(G)+1}=P_{b_1+1}$. 从而，$h(x)$ 的次数

$$n=p(G)=b_1+1.$$

这说明,在这种情况下,G 的伴随多项式的次数(也是 G 的顶点数)被它的前三项系数所决定.

P_n 的伴随多项式可由[8]的定理 1 得到,即

引理 5.

$$h(P_n,x)=\sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{n-k}x^k.$$

由引理 5，$h(P_n,x)$ 可以写成如下形式:

$$h(P_n,x)=x^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}h_1(P_n,x)\tag{4}$$

这里，$[a]$ 表示不超过 a 的最大整数，$h_1(P_n,x)$ 是一个常数项不为零的多项式.

定义 3. 把路 P_n 的伴随多项式写成(4)式右端的形式后,如果 $h_1(P_n,x)$ 在有理数

域上不可约,则称 P_n 是不可约路.

定理 1. 当 $k=2,3,6,10,12$ 时, P_k 都是不可约路.

证. 由引理 5, 得

$$h(P_2,x)=x(x+1);\ h(P_3,x)=x^2(x+2);$$
$$h(P_6,x)=x^3(x^3+5x^2+6x+1);$$
$$h(P_{10},x)=x^5(x^5+9x^4+28x^3+35x^2+15x+1);$$
$$h(P_{12},x)=x^6(x^6+11x^5+45x^4+84x^3+70x^2+21x+1).$$

由经典的多项式理论[9,10],不难验证上面给出的各个 $h(P_i,x)$ 所对应的 $h_1(P_i,x)$ 是有理数域上的不可约多项式. 这里略去证明细节.

不可约路是否有无穷多个? 这是个没有解决的问题.

三、主要结果及证明

下面文中的 $h_1(P_s,x)$ 及 $h_1(P_t,x)$ 的意义如(4)式所述.

引理 6. 设 m_1,k_1,r_1 都是非负整数, $s\neq 4, t\neq 4$. 如果M是一个连通图, 则其伴随多项式能表为

$$h(M,x)=x^{m_1}\{h_1(P_s,x)\}^{k_1}\{h_1(P_t,x)\}^{r_1} \tag{5}$$

的充要条件是下列三种情形之一成立:

i) $k_1=r_1=0, m_1=1, M\cong K_1$,

ii) $k_1=1,\ r_1=0,\ m_1=\left[\dfrac{s+1}{2}\right],\ M\cong P_s$,

iii) $k_1=0, r_1=1, m_1=\left[\dfrac{t+1}{2}\right],\ M\cong P_t$.

证. 充分性显然,下面只证必要性. 首先证明 $M\ncong K_3$. 否则,若 $M\cong K_3$, 则

$$x^{m_1}\{h_1(P_s,x)\}^{k_1}\{h_1(P_t,x)\}^{r_1}=x(x^2+3x+1).$$

因为 x^2+3x+1 在有理数域上不可约, 所以 x^2+3x+1 只能等于 $h_1(P_s,x)$ 或 $h_1(P_t,x)$, 这说明 P_s 或 P_t 是 P_4. 这与 $s\neq 4, t\neq 4$ 的假设矛盾. 因此, $M\ncong K_3$.

由引理 1 及引理 2 得

$$\{h(P_s,x)\}^{k_1}=h(k_1P_s,x)$$
$$=x^{k_1s}+k_1(s-1)x^{k_1s-1}+\frac{1}{2}[k_1^2(s-1)^2+k_1(5-3s)]x^{k_1s-2}+\cdots$$

注意到 $h_1(P_s,x)$ 与 $h(P_s,x)$ 有相同的系数序列,因此 $\{h_1(P_s,x)\}^{k_1}$ 与 $\{h(P_s,x)\}^{k_1}$ 也有相同的系数系列,即

$$\{h_1(P_s,x)\}^{k_1}=x^{l_1}+k_1(s-1)x^{l_1-1}+\frac{1}{2}[k_1^2(s-1)^2+k_1(5-3s)]x^{l_1-2}+\cdots$$

同理,

$$\{h_1(P_t,x)\}^{r_1}=x^{l_2}+r_1(t-1)x^{l_2-1}+\frac{1}{2}[r_1^2(t-1)^2+r_1(5-3t)]x^{l_2-2}+\cdots$$

若把 $h(M,x)$ 按降幂排列时的前三项系数分别记为 b_0,b_1,b_2，则经过代入(5)式计算后知，

$$b_0=1,b_1=k_1(s-1)+r_1(t-1),$$
$$b_2=k_1(s-1)r_1(t-1)+\frac{1}{2}[k_1^2(s-1)^2+k_1(5-3s)$$
$$+r_1^2(t-1)^2+r_1(5-3t)].$$

由于M是连通图，所以由引理4应有

$$b_2\leqslant\binom{b_1-1}{2}.$$

把数值代入并解此不等式，得

$$k_1+r_1\leqslant 1. \tag{6}$$

(6)式共有三组非负整数解：

i) $k_1=r_1=0$. 这时由(5)式得 $h(M,x)=x^{m_1}$，这说明M没有边，而M又是连通图，所以只能是 $M=K_1$，从而 $m_1=1$；

ii) $k_1=1,r_1=0$. 这时由(5)式得

$$h(M,x)=x^{m_1}h_1(P_s,x). \tag{7}$$

由于 $h_1(P_s,x)$ 与 $h(P_s,x)$ 有相同的系数序列，因此(7)式说明，$h(M,x)$ 与 $h(P_s,x)$ 的前三项系数相同，由引理4及"注1"，可得 $M\cong P_s$，代入(7)式即得 $m_1=\left[\frac{s+1}{2}\right]$；

iii) $k_1=0,r_1=1$. 和 ii) 类似可证 $M\cong P_t$, $m_1=\left[\frac{t+1}{2}\right]$.

定理 2. 设 $G=kP_s\cup rP_t$，这里 $s\neq 4,t\neq 4$, k,r 是满足 $ks+rt\leqslant n$ 的非负整数. 如果 P_s 和 P_t 都是不可约路，则 $K_n-E(G)$ 是色唯一的.

证. 令 $G_1=\overline{K_n-E(G)}$，并令 $m=n-ks-rt$，则

$$G_1=mK_1\cup kP_s\cup rP_t. \tag{8}$$

只须证 G_1 是伴随唯一的即可.

设图H与图 G_1 有相同的伴随多项式，即

$$\begin{aligned}h(H,x)=h(G_1,x)&=x^m\{h(P_s,x)\}^k\{h(P_t,x)\}^r\\&=x^\alpha\{h_1(P_s,x)\}^k\{h_1(P_t,x)\}^r\end{aligned} \tag{9}$$

这里，$\alpha=m+k\left[\frac{s+1}{2}\right]+r\left[\frac{t+1}{2}\right]$.

设H有 l 个连通分支：$H_1,H_2,\cdots,H_l$. 由引理1及(9)式，得

$$\begin{aligned}&h(H_1,x)h(H_2,x)\cdots h(H_l,x)\\&=x^\alpha\{h_1(P_s,x)\}^k,\{h_1(P_t,x)\}^r\end{aligned} \tag{10}$$

由 $h_1(P_s,x)$ 和 $h_1(P_t,x)$ 在 $Z[x]$ 上的不可约性以及 $Z[x]$ 内多项式的唯一分解定理，对任意 $i\in\{1,2,\cdots,l\}$，必有

$$h(H_i,x)=x^{\alpha_i}\{h_1(P_s,x)\}^{k_i}\{h_1(P_t,x)\}^{r_i}. \tag{11}$$

这里，α_i,k_i,r_i 都是非负整数. 由于 H_i 是连通的，由(11)式及引理6可知，H_i 只有三

种可能：$H_i \cong K_1$，或 $H_i \cong P_s$，或 $H_i \cong P_t$. 相应地，$h(H_i, x) = x$，或 $h(H_i, x) = h(P_s, x)$，或$h(H_i, x) = h(P_t, x)$.

由此可知，H的每个非孤立点分支 H_i 只能给（10）式左端贡献一个不可约因式 $h_1(P_s, x)$ 或者 $h_1(P_t, x)$. 由 $Z[x]$ 内多项式的唯一分解定理，H 的非孤立点分支共有 $k+r$ 个，其中，P_s 分支有 k 个，P_t 分支有 r 个. 设H的孤立点分支有 m' 个，则

$$H = m'K_1 \cup kP_s \cup rP_t. \tag{12}$$

又因为 $p(H) = p(G_1)$，故由(8)，(12)两式得 $m' = m$. 从而 $H \cong G_1$.

综上所述，G_1 是伴随唯一的. 从而 $\overline{G}_1 = K_n - E(G)$ 是色唯一的. 证毕.

参 考 文 献

[1] Loerinc B. and Whitehead Jr. E. G., Chromatic polynomials for regular graphs and modified wheels, *J. Combin. Theory* (B), **31**(1981), 54—61.

[2] Giudici R. E., Some new families of chromatically unique graphs, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 96(1985), 147—158.

[3] 韩伯棠，关于一类图$Kn(1,m)$的色性，应用数学学报，**9**(1986)，101—112.

[4] Gracia, Z. and Salzberg, P. M., Chromatic classfication of $K_p - G_6$, *Ars Combinatoria*, **20B**(1985), 107—111.

[5] Li, N. Z., Whitehead Jr. E. G. and Xu S. J., Classification of chromatically unique graphs having quadratic σ-polynomials, *J. Graph Theory*, 11(1987), 169—176.

[6] Read, R. C., An introduction to chromatic polynomials, *J. Combin. Theory*, 4(1968), 52—71.

[7] 刘儒英，求图的色多项式的一种新方法及其应用，科学通报，**32**(1987)，77.

[8] 刘儒英，关于两类图的色多项式，科学通报，**32**(1987)，236.

[9] 范德瓦尔登，B.L.，著丁石孙译，代数学，科学出版社，北京，1978，106—108.

[10] 法杰耶夫等著，丁寿田译，高等代数习题集，高等教育出版社(修订第二版)，北京，1987.

[11] Korfhage, R. R., σ-Polynomials and graph coloring, *J. Combin. Theory*(B), **24**(1978), 137—153.

CHROMATIC UNIQUENESS OF $K_n - E(kP_s \cup rP_t)$

Liu Ru-Ying

(*Qinghai Normal University, Xining* 810008)

ABSTRACT

Let $K_n - E(G)$ denote the graph obtained from K_n by deleting all the edges of a subgraph isomorphic to G. In this paper, the concept of irreducible path is introduced and $K_n - E(kP_s \cup rP_t)$ are shown to be chromatically unique if $s \neq 4, t \neq 4$, and P_s and P_t are irreducible paths.