系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(3) (2008, 3), 325–333

一类二阶奇异微分方程正解的存在唯一性*

赵 增 勤

(曲阜师范大学数学科学学院， 曲阜 273165)

摘要 利用上下解方法、不动点理论研究奇异微分方程 $u''+f(t,u)=0, t\in(0,1)$ 在边界条件 $\alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\ \gamma u(1)+\delta u'(1)=0$ 下 $C[0,1]$ 正解和 $C^1[0,1]$ 正解的存在性与唯一性．其中非线性项 $f(t,u)$ 关于 u 是减的，仅满足较弱的要求．

关键词 奇异边值问题，正解，上下解，不动点定理．

MR(2000) 主题分类号 34B15

1 引言与主要结果

本文研究非线性二阶边值问题

$$u''+f(t,u)=0,\quad t\in(0,1), \tag{1.1}$$

$$\alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\quad \gamma u(1)+\delta u'(1)=0, \tag{1.2}$$

其中 $\alpha,\beta,\delta,\gamma$ 是非负实数， $\varDelta:=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma>0$.

关于所述的边值问题， $f(t,u)$ 关于 u 增的情况研究较多， $f(t,u)$ 关于 u 减的研究相对较少．文 [1] 中的 $f(t,u)$ 关于 u 是减的，其结果对文 [2–3] 中结论作了较大程度的改进．相关的近期研究还有文 [4–6]. 但这些讨论都设 $f(t,u)$ 关于 u 是齐次或者拟齐次的．本文假定 $f(t,u)$ 是关于 u 的一般减函数，不假定齐次或者拟齐次性等条件；虽然使用上、下解方法，但是不需要假定上、下解条件； $f(t,u)$ 在 $t=0,\ t=1,\ u=0$ 点都可以是奇异或者不奇异的．

在以下的讨论中，我们记 $I=[0,1],\ J=(0,1),\ R^+=(0,+\infty)$. 若函数 $w(t)\in C(I)\cap C^2(J)$ 满足边界条件 (1.2) 和在 J 中满足方程 (1.1), 则称 $w(t)$ 为所述问题的解，也称为 $C(I)$ 解；若解 $w(t)$ 使得 $w'(0+)$ 和 $w'(1-0)$ 都存在，则称为 $C^1(I)$ 解；若解 $w(t)$ 在 J 上恒正，则称为正解．

若函数 $v_0(t)\in C(I)\bigcap C^2(J)$ 满足

$$\begin{cases} -v_0''(t)\le f(t,v_0(t)),\quad t\in J,\\ \alpha v_0(0)-\beta v_0'(0)\le 0,\quad \gamma v_0(1)+\delta v_0'(1)\le 0,\end{cases}$$

* 国家自然科学基金 (10471075), 山东省自然科学基金 (Y2006A04), 高教博士点专项科研基金 (20050446001) 资助课题．

收稿日期：2005-08-05, 收到修改稿日期：2007-01-30.

则称 $v_0(t)$ 为两点边值问题 (1.1) 和 (1.2) 的下解；上解 $w_0(t)$ 的定义只要将上述诸不等式反向. 若 (1.1) 和 (1.2) 的下解 $v_0(t)$ 和上解 $w_0(t)$ 满足 $v_0(t) \le w_0(t)$, 则称 $(v_0(t), w_0(t))$ 为问题 (1.1) 和 (1.2) 的一对上下解. 为了证明本文的主要结果，我们需要下述的引理.

引理 1.1 设 E 为实 Banach 空间， D 是 E 中凸闭集， $A\colon D \to D$ 连续，并且 $A(D)$ 是相对紧集，则 A 在 D 中必具有不动点. 该引理是 Schauder 不动点定理的推论[7].

本文的主要结果叙述如下

定理 1.1 设 $f(t,u)\colon J \times R^+ \to [0,+\infty)$ 连续， $f(t,u)$ 关于 u 单调减少，并且

$$f(t,\lambda) \not\equiv 0, \quad \int_0^1 e(t) f(t, \lambda\, e(t)) \mathrm{d}t < \infty, \quad \forall\, \lambda > 0 \tag{1.3}$$

成立，则两点边值问题 (1.1) 和 (1.2) 有唯一正解 $w(t) \in C(I) \bigcap C^2(J)$, 并且

$$m\, e(t) \le w(t), \quad \exists\, m > 0. \tag{1.4}$$

其中 $e(t) = G(t,t)$, $G(t,s)$ 是边值问题 (1.1) 和 (1.2) 的 Green 函数.

我们知道，边值问题 (1.1) 和 (1.2) 的 Green 函数是

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varDelta}(\beta + \alpha t)(\delta + \gamma(1-s)), & 0 \le t \le s \le 1, \\[2ex] \dfrac{1}{\varDelta}(\beta + \alpha s)(\delta + \gamma(1-t)), & 0 \le s < t \le 1\ . \end{cases}$$

于是， $e(t) = \frac{1}{\varDelta}(\beta + \alpha t)(\delta + \gamma(1-t))$.

$$\frac{\varDelta}{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)} e(t) e(s) \le G(t,s) \le e(t), \quad G(t,s) \le e(s), \quad \forall\, t, s \in I. \tag{1.5}$$

对于边界条件 (1.2), 有下述的四种情形

1) $\beta\delta \ne 0$;

2) $\beta = 0, \quad \delta \ne 0$;

3) $\beta = \delta = 0$;

4) $\beta \ne 0, \quad \delta = 0$.

相应的格林函数 $G(t,s)$, $e(t)$ 分别记为 $G_i(t,s)$, $e_i(t)$, $i = 1,2,3,4$. 本文下述各节中，必要时将分这四种情形来讨论.

2 所述问题上下解的存在性

在 Banach 空间 $E = C[0,1]$ 中构造集合 P 和算子 T 如下

$$P = \Big\{ u(t) \in E \,\Big|\, \text{存在正数 } k_u \text{使得 } u(t) \ge k_u\, e(t), t \in I \Big\}, \tag{2.6}$$

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, u(s)) \mathrm{d}s, \quad \forall\, u(s) \in P.$$

显然， $e(t)\in P$. 对任意的 $u(t)\in P$, 由 (1.5) 与题设条件得到

$$Tu(t)\le\int_0^1 e(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\le\int_0^1 e(s)f(s,k_u\,e(s))\mathrm{d}s<\infty,\tag{2.7}$$

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\ge\frac{\Delta}{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)}e(t)\int_0^1 e(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s=k_{(Tu)}\,e(t),$$

$\forall\, t\in I.$

其中 $k_{(Tu)}=\frac{\Delta}{(\beta+\alpha)(\delta+\gamma)}\int_0^1 e(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s$. 即 $Tu(t)\in P$, 从而 T 是映 P 入 P 的减算子.

对任何 $b(t)\in P$, 经直接计算得到

$$Tb(t)=\frac{1}{\Delta}(\delta+\gamma(1-t))\int_0^t(\beta+\alpha s)f(s,b(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{\Delta}(\beta+\alpha t)\int_t^1(\delta+\gamma(1-s))f(s,b(s))\mathrm{d}s,$$

$$\frac{\mathrm{d}(Tb(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{-\gamma}{\Delta}\int_0^t(\beta+\alpha s)f(s,b(s))\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{\Delta}\int_t^1(\delta+\gamma(1-s))f(s,b(s))\mathrm{d}s,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2(Tb(t))}{\mathrm{d}t^2}=-f(t,b(t)).$$

于是

$$\alpha(Tb)(0)-\beta(Tb)'(0)=0,\quad \gamma(Tb)(1)+\delta(Tb)'(1)=0,\tag{2.8}$$

$$(T^2b)''(t)+f(t,b(t))=0.\tag{2.9}$$

我们记

$$b_1(t)=\min\{e(t),(Te)(t)\},\quad b_2(t)=\max\{e(t),(Te)(t)\}.\tag{2.10}$$

显然， $b_1(t)$, $b_2(t)$, 有意义并且 $b_1(t)\le b_2(t)$. 由 $Te\in P$ 知道存在正数 k_{Te} 使得 $(Te)(t)\ge k_{Te}e(t)$. 于是 $b_1(t)\ge\min\{1,k_{Te}\}e(t)=k_1\,e(t)$, 即有 $b_1(t)$, $b_2(t)\in P$, 由此得到 $Tb_1(t)$, $Tb_2(t)$ 有意义并且

$$(Tb_2)(t)\le(Tb_1)(t)\le T(k_1e)(t).\tag{2.11}$$

用 (2.10) 与 T 的减性得

$$Tb_2(t)\le(Te)(t)\le b_2(t),\quad Tb_1(t)\ge(Te)(t)\ge b_1(t).$$

这结合 (2.9) 得到

$$(Tb_2)''(t)+f(t,Tb_2(t))\ge(Tb_2)''(t)+f(t,b_2(t))=0,\tag{2.12}$$

$$(Tb_1)''(t)+f(t,Tb_1(t))\le(Tb_1)''(t)+f(t,b_1(t))=0,\tag{2.13}$$

并且由 (2.8) 知， $Tb_2(t)$, $Tb_1(t)$ 满足边界条件 (1.2), 于是由 (2.11), (2.12) 和 (2.13) 得知

$$(H(t),Q(t))=(Tb_2(t),Tb_1(t))$$

构成了所述问题的一对上下解，并且

$$H(t),Q(t)\in P,\quad H(t),Q(t)\in C(I)\bigcap C^2(J).\tag{2.14}$$

3 定理 1.1 中解的存在性

3.1 情形 1) 时解的存在性

设 $H_1(t)$, $Q_1(t)$ 是问题 (1.1) 和 (1.2) ($\alpha\beta\neq 0$) 的一对上下解，这时在 I 上 $e_1(t)$ 恒正，从而 $G_1(t,s)$, $H_1(t)$, $Q_1(t)$ 恒正.

定义辅助函数

$$F(t,u)=\begin{cases} f(t,H_1(t)), & \text{若 } u<H_1(t),\\ f(t,u), & \text{若 } H_1(t)\le u\le Q_1(t),\\ f(t,Q_1(t)), & \text{若 } u>Q_1(t).\end{cases} \tag{3.15}$$

由所述条件知 $F\colon J\times R\to[0,+\infty)$ 连续，考虑方程

$$u''+F(t,u)=0. \tag{3.16}$$

显然奇异边值问题 (3.16) 和 (1.2) 等价于积分方程

$$u(t)=\int_0^1 G_1(t,s)F(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

令算子 A 为

$$Au(t)=\int_0^1 G_1(t,s)F(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

易见 $A\colon XE\to XE$. 从而对任何 $u(t)\in XE$, 用定理条件与 (2.14),(3.15) 和 (1.5) 式得

$$\begin{aligned} Au(t)&\le\int_0^1 e_1(s)F(s,u(s))\mathrm{d}s\\ &\le\int_0^1 e_1(t)f(t,H_1(t))\mathrm{d}t\\ &\le\int_0^1 e_1(t)f(t,\lambda e_1(t))\mathrm{d}t\\ &<\infty, \end{aligned} \tag{3.17}$$

即 $A(XE)$ 是有界集. 对任何 $u(t)\in XE$ 当 $t_1,t_2\in I$ 时

$$|Au(t_2)-Au(t_1)|\le\int_0^1 |G_1(t_2,s)-G_1(t_1,s)|F(s,H_1(s))\mathrm{d}s.$$

用此式结合 $G_1(t,s)$ 的连续性得 $\{Au(t)\mid u(t)\in XE\}$ 等度连续. 于是 $A(XE)$ 是相对紧集.

另一方面，任给 $\varepsilon>0$, 由 (3.17) 式知存在 $\delta_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 使

$$\int_0^{\delta_1} e_1(s)f(s,H_1(s))\mathrm{d}s+\int_{1-\delta_1}^1 e_1(s)f(s,H_1(s))\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.18}$$

对 $L>0$, $F(t,u)$ 在 $[\delta_1,1-\delta_1]\times[0,L]$ 上一致连续，从而存在 $\delta_1>\delta_2>0$, 当 $t\in[\delta_1,1-\delta_1]$, $u_1,\ u_2\in[0,L]$, $|u_1-u_2|<\delta_2$ 时

$$|F(t,u_1)-F(t,u_2)|<\frac{\varepsilon}{2\,\overline{e}_1}, \tag{3.19}$$

其中 $\overline{e}_1=\max\limits_{0\le t\le 1}\{e_1(t)\}$. 于是用 (3.18) 和 (3.19), 当 $u_1,\ u_2\in B$, $|u_1-u_2|<\delta_2$ 时有

$$\begin{aligned}|Au_2(t)-Au_1(t)|&\le\int_0^1 e_1(s)|F(s,u_2(s))-F(s,u_1(s))|\mathrm{d}s\\&\le\overline{e}_1\int_{\delta_1}^{1-\delta_1}|F(s,u_2(s))-F(s,u_1(s))|\mathrm{d}s\\&\quad+2\left[\int_0^{\delta_1}e_1(s)f(s,H_1(s))\mathrm{d}s+\int_{1-\delta_1}^1 e_1(s)f(s,H_1(s))\mathrm{d}s\right]\\&<\varepsilon,\end{aligned}$$

即 A 连续. 用引理 1.1 得 A 至少有一个不动点 $u_0\in XE\cap C^1(I)$, 即 $u_0(t)$ 满足

$$u_0''(t)+F(t,u_0(t))=0,\quad t\in I \tag{3.20}$$

和边界条件 (1.2). 下面证明

$$H_1(t)\le u_0(t)\le Q_1(t),\quad t\in I.$$

假若 $Q_1(t)\ge u_0(t)$ 在 I 上不恒成立，不妨设 $t^*\in J$ 使

$$Q_1(t^*)<u_0(t^*). \tag{3.21}$$

我们令 $z(t)=Q_1(t)-u_0(t),\ t\in I$,

$$a=\inf\{t_1|\ 0\le t_1<t^*,\text{在 }(t_1,t^*]\text{上 }z(t)<0\},$$

$$b=\sup\{t_2|\ t^*<t_2\le 1,\text{在 }[t^*,t_2)\text{上 }z(t)<0\}.$$

则当 $t\in(a,b)$ 时有 $Q_1(t)<u_0(t)$, 于是由 (3.15) 和 (2.13) 知 $F(t,u_0(t))=f(t,Q_1(t))$,

$$Q_1''(t)+F(t,u_0(t))=Q_1''(t)+f(t,Q_1(t))\le 0,\quad t\in(a,b).$$

这结合 (3.20) 得

$$z_0''(t)z''(t)=Q_1''(t)-u_0''(t)\le 0.$$

对上述的 $a,b,z(t)$ 有下述四种可能

i)　$z(a)=z(b)=0$;

ii)　$z(a)=0,\ z(b)<0$;

iii)　$z(a)<0,\ z(b)=0$;

iv)　$z(a)<0,\ z(b)<0$.

假若 i) 成立，易见在 (a,b) 上 $z(t)\ge 0$, 这矛盾于 (3.21) 式.

假若 ii) 成立，由 $z(b)<0$ 知 $b=1$, 即 $z(1)<0$, 而 $\gamma z(1)+\delta z'(1)\geq 0$, 于是 $z'(1)\geq -\frac{\gamma}{\delta}z(1)\geq 0$, 而 $z'(t)$ 在 $(a,1)$ 上是减函数，从而在 (a,b) 上 $z'(t)\geq 0$, 即在 (a,b) 上 $z(t)$ 是增函数，而 $z(a)=0$, 于是在 (a,b) 上 $z(t)\geq 0$, 这矛盾于 (3.21) 式. 类似方法可证 iii), iv) 成立也产生矛盾. 得到 $Q_1(t)\geq u_0(t)$. 同理可证 $u_0(t)\geq H_1(t)$. 结合 (3.15) 与 (3.20) 知 $u_0(t)$ 是 (1.1) 和 (1.2) 的解.

3.2 情形 2) 时解的存在性

设 $H_2(t),Q_2(t)$ 是问题 (1.1) (1.2) $(\beta=0,\delta\neq 0)$ 时的一对上下解. 这时 $e_2(t)=\frac{\delta+\gamma(1-t)}{\delta+\gamma}t$, 边界条件 (1.2) 退化为

$$u(0)=0,\quad \gamma u(1)+\delta u'(1)=0. \tag{3.22}$$

设 $\{a_n\}$ 是一数列满足

$$0<\cdots<a_{n+1}<a_n<\cdots<a_2<a_1<\frac{1}{2},\quad a_n\to 0\ (n\to\infty),$$

$\{r_n\}$ 是一数列， $0<H_2(a_n)\leq r_n\leq Q_2(a_n)$, $n=1,2,\cdots$. 对每一个 n, 考虑奇异边值问题

$$u''+f(t,u)=0, \tag{3.23}$$

$$u(a_n)=r_n,\quad \gamma u(1)+\delta u'(1)=0. \tag{3.24}$$

在区间 $[a_n,1]$ 上 $e_2(t)$ 恒正，从而 $H_2(t)$, $Q_2(t)$ 恒正. 显然成立

$$\int_0^1 e_2(s)f(s,H_2(s))\mathrm{d}s\geq\int_{a_n}^1\frac{\delta}{\delta+\gamma}sf(s,H_2(s))\mathrm{d}s\geq\frac{\delta}{\delta+\gamma}a_n\int_{a_n}^1 f(s,H_2(s))\mathrm{d}s,$$

于是有

$$0\leq\int_{a_n}^1 f(s,H_2(s))\mathrm{d}s\leq\frac{\delta+\gamma}{\delta a_n}\int_0^1 e_2(s)f(s,H_2(s))\mathrm{d}s<\infty.$$

用类似于情形 1) 的过程我们容易证得问题 (3.23) 和 (3.24) 有 $C^1[a_n,1]$ 正解 $u_n(t)$ 且满足

$$0<H_2(t)\leq u_n(t)\leq Q_2(t),\quad t\in[a_n,1].$$

因此，我们有

$$|u_n(1)|\leq M=H_2(1)+Q_2(1),\quad |u_n'(1)|=\left|\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)u_n(1)\right|\leq\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)M,\quad n=1,2,\cdots.$$

不失一般性，我们可设

$$u_n(1)\to u_0\in[H_2(1),Q_2(1)],\quad u_n'(1)\to-\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)u_0,\quad 当\ n\to\infty 时.$$

根据文 [8] 中第 14 页定理 3.2 可得，方程 (1.1) 有一解 $u(t)$ 满足 $u(1)=u_0$, $u'(1)=-\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)u_0$. 其最大存在区间为 $(w^-,\ w^+)$, 并且，在 $(w^-,\ w^+)$ 任何紧子区间上， $u_n(t)$ 一致收敛于 $u(t)$, ($u_n'(t)$ 一致收敛于 $u'(t)$), $n\to\infty$ 时. 因为 $H_2(t)\leq u_n(t)\leq Q_2(t)$, $t\in[a_n,1]$, 并且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,1]=(0,1]$. 因此， $H_2(t)\leq u(t)\leq Q_2(t)$, $t\in(w^-,w^+)\bigcap(0,1]$. 由延展性定理知，

$(w^-, w^+) \supset (0,1]$. 由 $H_2(0) = Q_2(0) = 0$ 知 $u(0) = 0$ 且满足 $\gamma u(1) + \delta u'(1) = 0$. 因此 $u(t) \in C[0,1] \bigcap C^1(0,1] \bigcap C^2(0,1)$ 是奇异边值问题 (1.1), (3.22) 的正解，即是 (1.1) 和 (1.2) 的正解.

情形 3)($\beta = \delta = 0$) 时，文 [9] 中已经证明.

情形 4) 的证明类似于情形 2), 这里从略. 这完成了解的存在性证明.

3.3 定理 1.1 中解的唯一性与 (1.4) 式

假设 $u_1(t), u_2(t)$ 是 (1.1) 和 (1.2) 的两个不同的 $C(I)$ 正解，不妨设 $t^* \in J$ 使 $u_2(t^*) > u_1(t^*)$. 我们令

$$a = \inf\{t_1 \mid 0 \le t_1 < t^*, \text{在 } (t_1, t^*] \text{ 上 } u_2(t) > u_1(t)\},$$

$$b = \sup\{t_2 \mid t^* < t_2 \le 1, \text{在 } [t^*, t_2) \text{ 上} u_2(t) > u_1(t)\},$$

$z(t) = u_2(t) - u_1(t),\ t \in I$. 易见有下述四种可能的情形

i) $z(a) = z(b) = 0$;

ii) $z(a) = 0,\ z(b) > 0$;

iii) $z(a) > 0,\ z(b) = 0$;

iv) $z(a) > 0,\ z(b) > 0$.

并且 $t^* \in (a,b)$, 在 (a,b) 上 $u_2(t) > u_1(t)$, $f(t, u_2(t)) \le f(t, u_1(t))$, 于是 $z''(t) = u_2''(t) - u_1''(t) \ge 0, t \in (a,b)$.

对于情形 i), 用 $z''(t) \ge 0$ 知 $z(t) \le 0, t \in (a,b)$, 这矛盾于 $u_2(t^*) > u_1(t^*)$.

对于情形 ii). 易见 $b = 1$, 且 $\delta \ne 0$ (否则 $z(1) = 0$), $\gamma z(1) + \delta z'(1) = 0$, 由此知 $z'(1) = -\frac{\gamma}{\delta} z(1) \le 0$. 而 $z'(t)$ 是 (a,b) 上的增函数，于是 $z'(t) \le 0, t \in (a,b)$, 而 $z(a) = 0$, 于是在 (a,b) 上 $z(t) \le 0$, 这矛盾于 $u_2(t^*) > u_1(t^*)$.

iii) 和 iv) 两种情形可类似推出矛盾. 于是完成了唯一性证明.

因为得到的解 $w(t) \ge Tb_2(t)$, 而 $H(t) = Tb_2(t) \in P$, 于是， $w(t) \in P$, 于是 (1.4) 成立.

4 有关推论与注记

推论 4.1 若定理 1.1 中其它条件不变，把 (1.3) 加强为

$$f(t, \lambda) \not\equiv 0, \quad \int_0^1 f(t, \lambda\, e(t))\mathrm{d}t < \infty, \quad \forall\, \lambda > 0, \tag{4.25}$$

则 (1.1) 和 (1.2) 有唯一正解 $w(t) \in C^1(I) \bigcap C^2(J)$. 并且

$$m\, e(t) \le w(t) \le M\, e(t), \quad \exists\, M > m > 0. \tag{4.26}$$

证 设 (4.25) 式被满足，这时证明中 (2.6) 式的 P 换为

$$\overline{P} = \left\{ u(t) \in C[0,1] | \text{存在正数 } K_u > k_u \text{使得 } K_u\, e(t) \ge u(t) \ge k_u\, e(t), t \in I \right\},$$

并且根据题设条件类似于 (2.7) 得到

$$Tu(t) \le e(t) \int_0^1 f(s, u(s))\mathrm{d}s \le e(t) \int_0^1 f(s, k_u\, e(s))\mathrm{d}s < \infty, \quad \forall\, u \in \overline{P},$$

从而 $T\colon \overline{P} \longrightarrow \overline{P}$.

设 $w(t)$ 是 (1.1) 和 (1.2) 的解，于是 $w(t) \in \overline{P}$, 从而 (4.26) 式成立．并且 $f(t,w(t)) \le f(t,m\,e(t))$．由此得到 $|w''(t)| = f(t,w(t))$ 在 J 上可积分，于是 $w'(0+)$ 和 $w'(1-)$ 存在，即 $w(t) \in C^1(I)\bigcap C^2(J)$.

推论 4.2 设 $f(t,u)\colon J\times R^+ \to R^+$ 连续， $f(t,u)$ 关于 u 单调减少，并且

$$f(t,\lambda) \not\equiv 0, \quad \int_0^1 tf(t,\lambda t)\mathrm{d}t < \infty, \quad \forall\, \lambda > 0, \tag{4.27}$$

则两点边值问题

$$\begin{cases} u'' + f(t,u) = 0, \quad t \in J, \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.28}$$

存在唯一正解 $w(t) \in C(I)\bigcap C^2(J)$. 并且存在常数 $m > 0$ 使 $m\,t \le w(t)$.

这只要在定理 1.1 中，边界条件 (1.2) 取 $\beta = \gamma = 0$ 的特殊情形．这时 $e(t) = t,\ t \in I$.

注 1 这比较文 [1], 完全去掉了条件 i), 本质地减弱了条件 ii), 结论加强到解的唯一性及其估计式.

用推论 4.1, 类似于推论 4.2 的方法我们得到下面推论.

推论 4.3 若把条件 (4.27) 加强为

$$f(t,\lambda) \not\equiv 0, \quad \int_0^1 f(t,\lambda t)\mathrm{d}t < \infty, \quad \forall\, \lambda > 0,$$

则 (4.28) 的唯一正解 $w(t) \in C^1(I)\bigcap C^2(J)$. 并且存在常数 $M > m > 0$ 使 $m\,t \le u(t) \le M\,t$.
如果 $f(t,u)$ 关于 t,u 都不具有奇异性，则 (4.25) 中的可积性自然满足．这就得到下面推论.

推论 4.4 设 $f(t,u) \in C(I\times[0,+\infty),[0,+\infty))$, 关于 u 单调减少, 对任何 $u \ge 0$, $f(t,u) \not\equiv 0$, 则边值问题 (1.1) 和 (1.2) 必存在唯一正解.

注 2 这里只假定 $f(t,u)$ 关于 u 的减性，不需要假定 $f(t,u)$ 关于 u 凸性，也不需要其它条件．这既推广了也改进了文 [10] 中 3 节第一个例子的结果.

参 考 文 献

[1] Zhang Bing Gen,Yang Bo. An existence theorem for a class of nonlinear singular boundary value problems. *Chinese Sci. Bull.*, 1995, **40**(1): 1–6.

[2] Gatica J A, Oliker V and Waltman P. Singular nonlinear boundary value problems for second-order ordinary differential equations. *J. Diff. Eqns*, 1989, **79**(1): 62–78.

[3] O'Regan Donal. Existence of positive solutions to some singular and nonsingular second order boundary value problems. *J. Diff. Eqns*, 1990, **84**(1): 228–251.

[4] 赵增勤．非线性奇异微分方程边值问题的正解．数学学报， 2000, **43**(1): 179–188.

[5] 韦忠礼．负指数 Emden-Fowler 方程奇异边值问题的正解．数学学报， 1998, **41**(3): 655–662.

[6] Wang Yuxia and Liu Xiyu. Positive solutions of singular boundary value problem of negative exponent Emden-Fowler equation. *Proc. Indian Acad. Sci.* (*Math. Sci.*), 2003, **113**(2): 195–205.

[7] 郭大钧．非线性泛函分析 (第二版)．济南：山东科学技术出版社， 2001.
[8] Hartman P. Ordinary Differential Eqnations, 2nd Ed. Birkhauser, Boston, 1982.
[9] Zhang Yong. Positive solutions of singular sublinear Emden-Fowler boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1994, **185**(1): 215–222.
[10] 李福义，冯锦锋，沈沛龙．一类减算子的不动点定理及其应用．数学学报， 1999, **42**(2): 193–196.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF POSITIVE SOLUTIONS FOR A CLASS OF SECOND ORDER SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

ZHAO Zengqin

(*School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu* 273165)

Abstract The existence of positive solutions for a class of singular boundary value problems is investigated. Furthermore, the sufficient condition for the existence and uniqueness of positive solution of the system in $C[0,1]$ and $C^1[0,1]$ is given respectively, by means of the method of lower and upper solution, and the fixed point theorem.

Key words Singular boundary value problem, positive solution, lower and upper solution, fixed point theorem.