系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
15(3) (1995, 7), 286–288

一类泛连通无爪图

殷 志 祥

(安徽省淮南矿业学院数学教研室, 淮南 232001)

摘要 本文证明了如果 G 是 3 连通无爪图, 且 G 的每个导出子图 A, A^+ 都满足 $\varphi(a_1, a_2)$, 则 G 是泛连通图 (除了当 $u, v \in V(G)$, $d(u,v)=1$ 时, G 中可能不存在 (u,v)-k 路外, 这里 $2 \le k \le 4$).

关键词 无爪图, 导出子图, 泛连通图.

1 引 言

设 G 是一个无向简单图, 如果 G 不含同构于 $K_{1,3}$ 的点导出子图, 则称 G 是无爪图. n 为 G 的顶点数, 如果对任意 $u, v \in V(G)$ 且对任意正整数 $k(d(u,v) \le k \le n-1)$, 图 G 都有长为 k 的 (u,v)- 路存在, 则称 G 是泛连通图. 用 (u,v)-k 路记长为 k 的以 u 为起点, v 为终点的路. 设 H 是 G 的一个子图, $u, v \in V(H)$, 称 H 为满足 $\varphi(u,v)$ 的图是指 $\{x | x \in (N(u) \bigcap N(v)) \setminus V(H)\} \ne \emptyset$. 若 $v_1, v_2, \cdots, v_k \in V(G)$, 记 $N(v_1, v_2, \cdots, v_k) = N(v_1) \bigcup N(v_2) \cdots \bigcup N(v_k)$; 用 $u\vec{P}v$ 表示由 u 经 P 按 P 的正向到 v 的一段路; 用 $u\overleftarrow{P}v$ 表示由 u 经 P 按 P 的逆向到 v 的一段路; 其中 P 是 G 的给定方向的路. 图 A 与 A^+ 如图 1 所示, 除此之外, 本文所用的其它术语和记号可参见文 [1].

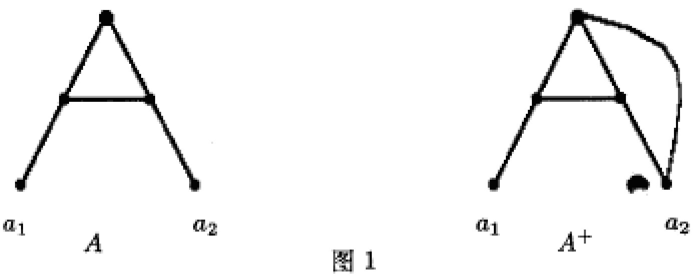

图 1

1988 年, Broersma, H. J. 和 Veldman, H. J.[2] 提出了:

猜想1) 如果 G 是 2 连通无爪图, 且 G 的每个导出子图 A 都满足 $\varphi(a_1, a_2)$, 则 G 是 Hamilton 图.

本文将此猜想的条件和结论都给以加强得到:

定理 如果 G 是 3 连通无爪图, 且 G 的每个导出子图 A, A^+ 都满足 $\varphi(a_1, a_2)$, 则 G 是泛连通图 (除了 $u, v \in V(G)$, $d(u,v)=1$ 时, G 中可能不存在 (u,v)-k 路外, 这里 $2 \le k \le 4$).

1990 年 6 月 12 日收到, 1993 年 9 月 11 日收到最后修改稿.

1) 该猜想已于 1991 年被胡智全所证明.

2 引 理

我们不加证明地给出下面几个引理：

引理 1 设 G 是无爪图， $P = v_1v_2\cdots v_r(v_1 = u, v_r = v)$ 是 G 的 (u,v)-$(r-1)$ 路，且 G 不存在 (u,v)-r 路，若存在 $x \notin V(P)$, 使 $xv_i \in E(G)\,(2 \le i \le r-1)$, 则：

a) $xv_{i-1}, xv_{i+1} \notin E(G), v_{i-1}v_{i+1} \in E(G)$.

b) $v_iv_l \in E(G)$, 当 $i+1 \le l \le r-1$ 时，则 $xv_{l+1} \notin E(G)$, 当 $2 \le l \le i-1$ 时，则 $xv_{l-1} \notin E(G)$.

引理 2 假设 $P = v_1v_2\cdots v_r(v_1 = u, v_r = v)$ 是 G 的 (u,v)-$(r-1)$ 路且 G 中不存在 (u,v)-r 路 $(r \ge 3)$, 若 $G[V(P)] \cong K_{|V(P)|}$, 则：

a) $N_{\overline{P}}(v_2), N_{\overline{P}}(v_3), \cdots, N_{\overline{P}}(v_{r-1})$ 两两不相交.

b) 当 $r \ge 5$ 时，对任意 $x_i \in N_{\overline{P}}(v_i)\,(i = 2,3,\cdots,r)$ 有 $\{x_2,\cdots,x_r\}$ 是独立集. 其中 $N_{\overline{P}}(v_i) = N(v_i)\bigcap\{V(G)\setminus V(P)\}$.

引理 3 设 G 是 3 连通无爪图，且 G 的每个导出子图 A, A^+ 都满足 $\varphi(a_1,a_2)$. 令 $P = v_1v_2\cdots v_r\,(v_1 = u, v_r = v)$ 是 G 的 (u,v)-$(r-1)$ 路，假设 G 中不存在 (u,v)-r 路，且存在 $x \notin V(P)$, 使 $xv_i \in E(G)\,(2 \le i \le r-1)$. 记 $k = \min\{j|v_j \notin N(v_i), i+1 \le j \le r\}$, 若 $\{v_{i+1}, v_{i+2}, \cdots, v_r\} \subseteq N(v_i)$, 则记 $k = r+1$; $s = \max\{j|v_j \notin N(v_i), 1 \le j \le i-1\}$, 若 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}\} \subseteq N(v_i)$, 则记 $s = 0$; 则以下结论成立.

a) $G[\{v_{s+1},\cdots,v_{k-1}\}] \cong K_{(k-s-1)}$.

b) $k \ne r$, 且若 $k \ne r+1$ 时，则 $N(x)\bigcap N(v_k) = \{v_r\}$, 并有 $G[\{v_k, v_{k+1}, \cdots, v_r\}] \cong K_{(r-k+1)}$.

c) $s \ne 1$, 且若 $s \ne 0$ 时，则 $N(x)\bigcap N(v_s) = \{v_1\}$, 并有 $G[\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}] \cong K_s$.

引理 4 设 G 是 3 连通无爪图且 G 的每个导出子图 A, A^+ 都满足 $\varphi(a_1,a_2)$. $P = v_1v_2\cdots v_5\,(v_1 = u, v_5 = v)$ 是 G 的 (u,v)-4 路， $G[V(P)] \cong K_{|V(P)|}$, 若 $n \ge 6$, 则 G 中存在 (u,v)-5 路.

引理 5 设 G 是 3 连通无爪图， $n = |V(G)| \ge 6$, 且 G 的每个导出子图 A, A^+ 都满足 $\varphi(a_1,a_2)$, 则

a) 对任意 $u,v \in V(G)$, 若 $d(u,v) = 1$, 则 G 中存在 (u,v)-5 路.

b) 对任意 $u,v \in V(G)$, 若 $2 \le d(u,v) \le 5$, 则对任意满足 $d(u,v) \le k \le 5$ 的整数 k, G 中存在 (u,v)-k 路.

3 定理的证明

假设定理不成立，由引理 5 知存在 $u,v \in V(G)$, 以及满足 $6 \le r < n$ 的正整数 r, G 中存在 (u,v)-$(r-1)$ 路 $P = v_1v_2\cdots v_r(v_1 = u, v_r = v)$, 但 G 中不存在 (u,v)-r 路. 因 G 是 3 连通图，且 $r < n$, 故必存在 $x \in V(G)\setminus V(P)$, 使得 $xv_i \in E(G)\,(2 \le i \le r-1)$, 由引理 1 知: $v_{i-1}v_{i+1} \in E(G)$, 令 k 和 s 的意义同引理 3, 由引理 3 及引理 1 知 $N(x)\bigcap V(P) \subseteq \{v_1, v_i, v_r\}$, 下面分几种情形讨论：

情形 1 $k \ne r+1$ 或 $s \ne 0$. 由对称性，不妨设 $k \ne r+1$, 为构造 (u,v)-r 路方便起见，不妨设 $i = k-2$, 否则以 $v_1 \overrightarrow{P} v_{i-1}v_{i+1} \overrightarrow{P} v_{k-2}v_iv_{k-1} \overrightarrow{P} v_r$ 代 P 即可，再分两种子情形讨论：

情形 1.1 $k \le r-2$, 此时可以证明下列两种性质：

性质 1 $N(v_{k+1},\cdots,v_{r-1}) \subseteq \{v_{k-1},\cdots,v_r\}$.

因 $G[\{v_k,\cdots,v_r\}]\cong K_{(r-k+1)}$, 只须证明 $N(v_{r-1})\subseteq\{v_{k+1},\cdots,v_r\}$ 即可. 若 $N(v_{r-1})\not\subseteq\{v_{k-1},\cdots,v_r\}$, 设 $y\in N(v_{r-1})\setminus\{v_{k-1},\cdots,v_r\}$. 若 $y\in V(P)$, 令 $y=v_l$, 由引理 3 知 $1\le l\le k-3$. 注意到必有 $l<s$ (否则 $P'=v_1\overrightarrow{P}v_lv_{r-1}\overleftarrow{P}v_{l+1}v_ixv_r$ 是 G 的 (u,v)-r 路), 从而 $s\neq 0$. 由引理 3 知 $v_1x\in E(G)$, 当 $l=1$ 时, 易见 $v_2v_{r-1}\in E(G)$ 则 $P'=v_1v_s\overleftarrow{P}v_2v_{r-1}\overleftarrow{P}v_{i+1}v_{i-1}\overleftarrow{P}v_{s+1}v_ixv_r$ 是 (u,v)-r 路; 当 $1<l<s$ 时, 则 $P'=v_1\overleftarrow{P}v_{l-1}v_s\overleftarrow{P}v_lv_{r-1}\overleftarrow{P}v_{i+1}v_{i-1}\overleftarrow{P}v_{s+1}v_ixv_r$ 是 (u,v)-r 路. 现设 $y\notin V(P)$, 则 $xy\notin E(G)$ (否则 $P'=v_1\overrightarrow{P}v_{r-3}v_{r-1}yxv_r$ 是 (u,v)-r 路). 故 $G[\{v_k,v_r,v_{r-1},x,y\}]\cong A$, 从而有 $z\in N(x)\bigcap N(y)$. 若 $z\notin V(P)$, 则 $P'=v_1\overrightarrow{P}v_ixzyv_{r-1}\overleftarrow{P}v_{k+1}v_r$ 是 (u,v)-r 路, 矛盾. 故 $z=v_1$, 此时 $G[\{v_1,v_2,x,y\}]\cong K_{1,3}$, 矛盾. 即性质 1 成立.

性质 2 若 $v_{k-1}\in N(v_{k+1},\cdots,v_r)$, 则 $N(v_k)\subseteq\{v_{k-1},\cdots,v_r\}$.

不妨设 $v_{k-1}v_{r-1}\in E(G)$, 而 $N(v_k)\not\subseteq\{v_{k-1},\cdots,v_r\}$, 此时令 $y\in N(v_k)\setminus\{v_{k-1},\cdots,v_r\}$, 若 $\in V(P)$, 令 $y=v_l$, 与性质 1 类似可得 $1\le l\le k-3$ 且 $s\neq 0$, $l<s$, $v_1x\in E(G)$. 当 $=1$ 时, 易见 $v_2v_k\in E(G)$, 此时 $P'=v_1xv_iv_{i+1}v_{i-1}\overleftarrow{P}v_2v_k\overrightarrow{P}v_r$ 是 (u,v)-r 路; 当 1 $<s$ 时, $P'=v_1\overleftarrow{P}v_{l-1}v_s\overleftarrow{P}v_lv_k\overrightarrow{P}v_{r-1}v_{k-1}\overleftarrow{P}v_{s+1}v_ixv_r$ (注意到 $k=i+2$) 是 (u,v)-r 路 矛盾. 若 $y\notin V(P)$, 易知 $yx\notin E(G)$ 且 $G[\{v_k,v_{r-1},v_r,x,y\}]\cong A$, 由引理 3 知存在 z $(x)\bigcap N(y)$ 且 $z=v_1$, 此时 $G[\{v_1,v_2,x,y\}]\cong K_{1,3}$, 矛盾. 由性质 1, 性质 2 成立可知 G 是 3 连通图矛盾.

情形 1.2 $k=r-1$.

这时可证 $N(v_k)=\{v_{k-1},v_r\}$, 与 G 是 3 连通图矛盾.

情形 2 $s=0$ 且 $k=r+1$.

由引理 3 知 $G[\{v_1,v_2,\cdots,v_r\}]\cong K_r$, 且 $r\ge 6$, 由引理 1 知 $(N(x)\bigcap V(P))\setminus\{v_i\}=\emptyset$, 再由 G 是 3 连通图知存在 x 到 $V(P)$ 的一条路 P_0, $V(P_0)\bigcap V(P)=\{v_m\}$ 且 $m\neq i$, 又由引理 2 知存在 $x_1\in V(P_0)$, $x_1\bigcap\{x,v_m\}=\emptyset$, $x_1\notin V(P)$, 并且 $G[\{v_i,v_m,v_1,x,v_r\}]\cong A$, 则存在 $y\in N(x)\bigcap N(x_1)$ 且 $y\notin V(P)$. 因 $r\ge 6$, 故易知此时 G 中存在 (u,v)-r 路矛盾.

综上所述可知定理成立.

我们提出问题:

设 G 是 3 连通无爪图, 且 G 的每个导出子图 A 满足 $\varphi(a_1,a_2)$, 那么, 定理的结论是否仍成立?

参 考 文 献

[1] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph Theory with Applications. London Macmillan Press LTD, 1976.

[2] Broersma, H. J. and Veldman H. J., Restration on induced subgraph ensuring hamiltoncity or pancylicity of $K_{1,3}$-free graph (preprint, 1988).

A KIND OF PANCONNECTED $K_{1,3}$-FREE GRAPH

YIN ZHI-XIANG

(Basic Courses Department, Huainan Mining College, Huainan 232001)

Abstract This paper proves that: let G be a 3-connected $K_{1,3}$-free graph; if every induced subgraph A or A^+ of G satisfies $\varphi(a_1,a_2)$, then G is panconnected (Except for that when $u,v\in V(G)$, and $d(u,v)=1$, there may not be (u,v)-k paths for $k=2,3,4$).

Key words $K_{1,3}$-free graph, induced graph panconnected graph.