系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
12 (1) (1992), 82—88

一类极限环唯一性的充分条件*

周毓荣
(山东矿业学院应用数学系，泰安 271019)

本文对微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=p(y),\\ \dot{y}=-f(x,y)h(y)-g(x)\varphi(y),\end{cases}\tag{1}$$

包围多个奇点的极限环的唯一性给出一组简洁的充分条件，并将它应用于几类非线性振动方程及多项式微分系统. 最后通过系统 (1) 我们指出证明极限环唯一性中的几种常用方法之间的内在联系，并指出对形如(1)的系统，作 Dulac 函数的一般规律.

假设 (1) 中函数对一切变元连续且满足初值解的唯一性条件. 若涉及它们的导数或偏导数时，亦假设其导数或偏导数也是连续的. 此外假设

i) $yp(y)>0$, $yh(y)>0$, 当 $y\neq 0$;

ii) $\varphi(y)>0$;

iii) $xg(x)>0$, 当 $x\bar{\in}(x_0',x_0)$.

其中 $x_0'<0<x_0$，现定义函数

$$V(x,y)=\int_0^y\frac{p(y)}{\varphi(y)}dy+G(x)-G(x_1),$$

其中 $G(x)=\int_0^x g(\xi)d\xi$，$x_1\geqslant x_0$ 为某一实数. 以 V^- 和 V^+分别表示集合

$$\{(x,y)\,|\,V(x,y)<0\}\ \text{和}\ \{(x,y)\,|\,V(x,y)>0\}$$

的一个连通分支，并当 $(x,y)\in V^+$时，记

$$U(x,y)=f(x,y)h(y)[V(x,y)]^{-\beta}[\varphi(y)]^{-1},$$

其中 $\beta>0$ 为一实数.

定理 1. 假设条件 i)—iii) 成立，此外

1° 在V^-中，$f(x,y)$ 保持常号，且在(1)的任何闭轨线上 f 不恒为零；

2° 在 V^+ 中，对固定的 x，$U(x,y)$ 关于 y 单调，且在(1)的任何闭轨线上不为常数. 则方程组(1)至多有一个包围所有奇点的极限环.

证. 在 (x_0',x_0) 中 $g(x)$ 可以有无数个零点，对应系统(1)的无数个奇点，显然这些奇点位于带域 $x_0'\leqslant x\leqslant x_0$ 内部

为确定起见，假设条件 1°中 $f(x,y)\leqslant 0$；2°中，$U(x,y)$ 关于 y 递增. 则在 V^-中

---

* 本项工作得到国家自然科学基金和山东省自然科学基金资助.
1989 年 12 月 1 日收到，1990 年 5 月 7 日收到修改.

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} = -\frac{f(x,y)h(y)p(y)}{\varphi(y)} \geqslant 0 \ (\not\equiv 0), \tag{3}$$

于是由条件 1°知系统(1)的任何极限环必整个位于区域 V^+中．在 V^+中，系统 (1) 等价于

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p(y)}{[V(x,y)]^{\beta}\varphi(y)} = P^*(x,y), \\ \dot{y} &= \frac{-f(x,y)h(y) - g(x)\varphi(y)}{[V(x,y)]^{\beta}\varphi(y)} = Q^*(x,y). \end{aligned} \tag{4}$$

现设系统(4)存在两个包围所有奇点的极限环 Γ_1 和 Γ_2 ($\Gamma_1 \subset \Gamma_2$)．$\Gamma_i$ 在上、下半平面的部分分别记为 $y_i^+(x)$ 和 $y_i^-(x)$ $(i=1,2)$．由于 $\oint_{\Gamma_i} P^*dy - Q^*dx = 0$，因此只要证明

$$\oint_{\Gamma_1} P^*dy - Q^*dx < \oint_{\Gamma_2} P^*dy - Q^*dx, \tag{5}$$

便证明了本定理．

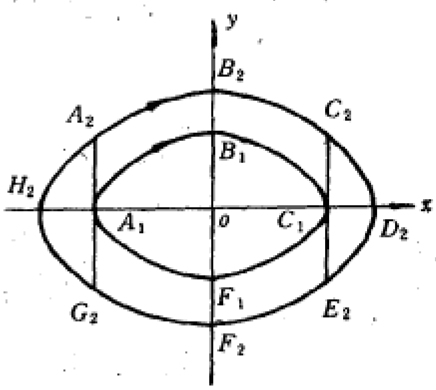

图 1

如图 1,记有向闭曲线 $l = \overline{A_2B_2C_2C_1B_1A_1A_2}$．因对 V^+ 中的任何简单有向闭曲线 L 有

$$\begin{aligned} \oint_L P^*dy - Q^*dx &= \oint_L \frac{f(x,y)h(y)}{[V(x,y)]^{\beta}\varphi(y)}dx + \oint_L \frac{dV}{V^{\beta}} \\ &= \oint_L U(x,y)dx, \end{aligned} \tag{6}$$

故由条件 2°，

$$\begin{aligned} &\int_{\widehat{A_2B_2C_2}} P^*dy - Q^*dx - \int_{\widehat{A_1B_1C_1}} P^*dy - Q^*dx \\ &= \int_l U(x,y)dx - \int_{\overline{C_2C_1}} P^*dy - \int_{\widehat{A_1A_2}} P^*dy \\ &= \int_{x_{A_1}}^{x_{C_1}} [U(x,y_2^+(x)) - U(x,y_1^+(x))]dx - \int_{\widehat{C_2C_1}} P^*dy - \int_{\overline{A_1A_2}} P^*dy \\ &> -\int_{\widehat{C_2C_1}} P^*dy - \int_{\widehat{A_1A_2}} P^*dy. \end{aligned} \tag{7}$$

同理，

$$\int_{\widehat{E_2F_2G_2}} P^*dy - Q^*dx - \int_{\widehat{C_1F_1A_1}} P^*dy - Q^*dx \geqslant -\int_{\overline{C_1E_2}} P^*dy - \int_{\overline{G_2A_1}} P^*dy, \tag{8}$$

$$\int_{\widehat{C_2D_2E_2}} P^*dy - Q^*dx \geqslant -\int_{\overline{E_2C_2}} P^*dy, \tag{9}$$

$$\int_{\widehat{G_2H_2A_2}} P^*dy - Q^*dx \geqslant -\int_{\overline{A_2G_2}} P^*dy. \tag{10}$$

将(7)—(10) 式相加即得 (5)．证毕．

下面我们讨论系统(1)的某些特殊情形．先讨论:

$$\begin{cases}\dot{x}=|y|^r y,\\ \dot{y}=-f(x,\ y)|y|^{\alpha}y-g(x),\end{cases} \tag{11}$$

其中实数 $r>-1$，$\alpha>-1$。

定理 2. 假设存在 $x_0'<0<x_0\leqslant x_1$，使得

1) $xg(x)>0$，$x\in(x_0',x_0)$；

2) $f(x,\ y)[G(x)-G(x_1)]\geqslant 0$；

而等号不能在整条闭轨线上成立；

3) $y\dfrac{\partial f}{\partial y}\geqslant 0$。

则方程组(11)至多有一个包围所有奇点的极限环。

证. 在定理 1 中取

$$p(y)=|y|^r y,\ h(y)=|y|^{\alpha}y,\ \varphi(y)\equiv 1$$

在 $U(x,y)$ 中取 $\beta=\dfrac{\alpha+1}{r+2}$，则由 $V(x,y)$ 的形式知，在 $V(x,y)\leqslant 0$ 中有 $G(x)-G(x_1)\leqslant 0$，由条件 2) 有 $f(x,\ y)\leqslant 0$，故定理 1 的条件 1°成立。

若 $\alpha\geqslant 0$，则在 V^+中

$$[U(x,y)]_y'=V^{-\frac{\alpha+r+3}{r+2}}\Big[|y|^{\alpha}y\frac{\partial f}{\partial y}V(x,\ y)+(\alpha+1)|y|^{\alpha}f(x,y)(G(x)-G(x_1))\Big]\geqslant 0,$$

故定理 1 的条件 2°成立。结论得证。

若 $-1<\alpha<0$，则上式无意义，此时作平行 x 轴且与 x 轴距离为 ε 的两条直线，与 Γ_2，Γ_1 相交如上图 2.

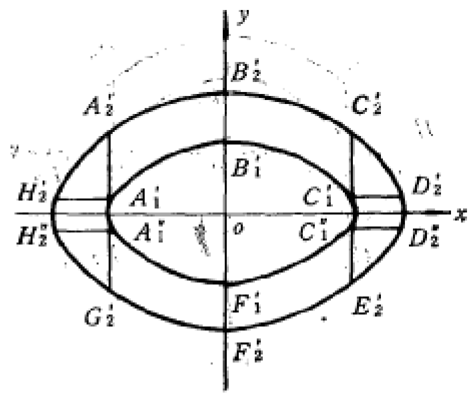

图 2

同第一种情形一样可得

$$\int_{\widehat{A_2'B_2'C_2'}}P^*dy-Q^*dx-\int_{\widehat{A_1'B_1'C_1'}}P^*dy-Q^*dx\geqslant-\int_{\overline{C_2'C_1'}}P^*dy-\int_{\overline{A_1'A_2'}}P^*dy, \tag{7$'$}$$

$$\int_{\widehat{E_2'F_2'G_2'}}P^*dy-Q^*dx-\int_{\widehat{C_1''F_1'A_1''}}P^*dy-Q^*dx\geqslant-\int_{\overline{C_1''E_2'}}P^*dy-\int_{\overline{G_2'A_1''}}P^*dy, \tag{8$'$}$$

$$\int_{\widehat{C_2'D_2'}}P^*dy-Q^*dx\geqslant-\int_{\overline{C_1'C_2'}}P^*dy+\int_{\overline{D_2'C_1'}}Q^*dx, \tag{9$'$}$$

$$\int_{\widehat{D_2''E_2'}}P^*dy-Q^*dx\geqslant-\int_{\overline{E_2'C_1''}}P^*dy+\int_{\overline{C_1''D_2''}}Q^*dx, \tag{9$''$}$$

$$\int_{\widehat{G_2'H_2''}}P^*dy-Q^*dx\geqslant-\int_{\overline{A_1''G_2'}}P^*dy+\int_{\overline{H_2''A_1''}}Q^*dx, \tag{10$'$}$$

$$\int_{\widehat{H_2'A_2'}}P^*dy-Q^*dx\geqslant-\int_{\overline{A_2'A_1'}}P^*dy+\int_{\overline{A_1'H_2'}}Q^*dx. \tag{10$''$}$$

将(7)′—(9)′,(9)″,(10)′和(10)″相加，并令 $\varepsilon\to 0$，由条件 2° 即得(5)。证毕。

对方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = h(y), \\ \dot{y} = -f(x)h(y) - g(x). \end{cases} \tag{12}$$

其中 $h(y) = |y|^{\alpha}\operatorname{sgn} y$，$\alpha > 0$，由定理 2 直接可得 $\left(\beta = \dfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)$.

推论 1. 假设存在 $x_0' < 0 < x_0 \leqslant x_1$，使得

1) $xg(x) > 0$，$x \overline{\in} (x_0', x_0)$，

2) $f(x)[G(x) - G(x_1)] \geqslant 0$. 而等号不能在 x 轴的任何区间上恒成立，

则方程组(12)至多有一个包围所有奇点的极限环.

注. 本推论即文[3]定理 1，但证法不同.

下面仍讨论方程组(11).

定理 3. 假设存在 $x_1' \leqslant x_0' < 0 < x_0 \leqslant x_1$，使得

1) $xg(x) > 0$，$x \overline{\in} (x_0', x_0)$；

2) $f(x,y) \leqslant 0$，$\forall y$ 及 $x \in (x_1', x_1)$，

而等号不能在整条闭轨线上成立；

$$f(x,y) \geqslant 0 \ (\not\equiv 0),\ \forall y \ 及\ x \overline{\in} [x_1', x_1];$$

3) $y \dfrac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$；

4) $G(x_1') = G(x_1) \geqslant \sup\{G(x) \mid g(x) = 0\}$.

则方程组(11)至多有一个极限环，若存在必包围所有奇点.

证. 由条件 1)和 4)，

$$\begin{aligned} &G(x) - G(x_1) \leqslant 0,\ 当\ x \in [x_1', x_1], \\ &G(x) - G(x_1) \geqslant 0,\ 当\ x \overline{\in} [x_1', x_1]. \end{aligned} \tag{13}$$

于是，由条件 2)，

$$f(x,y)\ [G(x) - G(x_1)] \geqslant 0 \ (\not\equiv 0),$$

故定理 2 的条件满足. 此外，由(13)式、条件1)和 $V(x,y)$ 的形式知，闭曲线 $V(x,y) = 0$ 的最左点在 $(x_1', 0)$，最右点在 $(x_1, 0)$. 且系统(11)的所有奇点均在 $V(x,y) \leqslant 0$ 中，在其中(3)式成立，故系统(11)若有极限环必包围闭曲线 $V(x,y) = 0$. 从而包围系统(11)的所有奇点，由定理 2，这样的极限环至多只有一个. 证毕.

若系统(11)只有一奇点，则有

推论 2. 假设存在 $x_1' < 0 < x_1$，使得

1) $xg(x) > 0$，$x \neq 0$；

2) $f(x,y) \leqslant 0 \ (\not\equiv 0)$，$\forall y$ 及 $x \in (x_1', x_1)$，

且无论 $\alpha > 0$ 多么小，总存在 $\bar{x} \in (-\alpha, \alpha)$，使对任何 y，$f(\bar{x}, y) < 0$，

$$f(x,\ y) \geqslant 0 \ (\not\equiv 0),\ \forall y \ 及\ x \overline{\in} [x_1',\ x_1];$$

3) $y \dfrac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$；

4) $G(x_1') = G(x_1)$.

则方程组(11)至多有一个极限环，若存在必为稳定的单重环.

本推论可由定理 3 得到，后一结论的理由见本文末. 这一结论实际上对定理 3 也成立.

H. B. Медведев[6] 曾给出如下定理(即[4]的定理 6.12):

定理. 设在方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x}^{k+1} + g(x) = 0$$

中 k 为偶数，且

1) $xg(x) > 0$, $x \neq 0$;

2) 存在 $x_1 < 0 < x_2$, 使 $f(x_1) = f(x_2) = 0$;

$f(x) < 0$, 当 $x \in (x_1, x_2)$,

$f(x) > 0$, 当 $x \notin [x_1, x_2]$;

3) $G(x_1) = G(x_2)$;

4) $G(\pm\infty) = +\infty$.

则方程组

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -f(x)y^{k+1} - g(x)$$

至多有一个极限环，若存在必为稳定的单重环.

这个定理显然可从本文推论 2 得到，而且从推论 2 可见，这个定理的条件 4) 可以取消，条件 2)也可放宽为 $f(x)$ 允许有无穷多个零点.

例. 讨论微分方程组

$$\dot{x} = y, \cdots, \dot{y} = -(x^2 - \beta)|y|^\alpha y - (x^3 - x), \tag{14}$$

其中参数 $\beta \geqslant 2$, $\alpha > -1$.

当 $\alpha = 0$ 时，(14)是一个三次微分系统，对任何实数 $\alpha > -1$, 系统(14)有且只有三个奇点 $O(0,0)$, $A(1,0)$ 和 $B(-1,0)$.

李继彬[1]，索光俭和沈伯骞[2]等都研究过 $\alpha = 0$ 时的系统 (14). 例如文[2]定理 1 证明: $\alpha = 0$, $\beta > 2$ 时系统(14)至多有一个包围奇点 O, A, B 的极限环.

将定理 3 用于系统(14)，我们得到: 当 $\alpha > -1$, $\beta \geqslant 2$ 时系统(14)至多有一个极限环. 若存在必包围系统(14)的所有奇点 O, A, B. 由此还可知，系统(14)必不存在分别包围奇点 O, A, 或 B 的极限环.

最后我们指出，对于方程组(1)极限环的唯一性问题，除了上面用到的比较

$$\oint_{\Gamma_i} P^* dy - Q^* dx$$

这一方法之外，还可用 Liénard 首创的比较某个函数的全微分的积分的方法来讨论. 具体做法是作函数

$$V(x, y) = \int_0^y \frac{P(y)}{\varphi(y)} dy + G(x) - G(x_1), \tag{2}$$

再作函数

$$W(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\beta} V^{1-\beta}, & \text{当 } \beta \neq 1, \\ \ln V, & \text{当 } \beta=1.\end{cases}$$

然后沿着系统(1)计算 $\frac{dW}{dt}$ 得

$$dW=-\frac{f(x, y) h(y)}{[V(x, y)]^{\beta} \varphi(y)} dx=-U(x, y) dx$$

由于对任何闭曲线 Γ_i 有 $\oint_{\Gamma_i} dW=0$，于是比较 $\oint_{\Gamma_i} dW$ 便可获得系统(14)的极限环的唯一性．而由(6)式知，比较 $\oint_{\Gamma_i} dW$，实际上就是比较 $\oint_{\Gamma_i} P^* dy-Q^* dx$.

我们还要指出，若补充条件：f_y'，$\varphi'(y)$，$h'(y)$ 连续，又可用 Bendixson-Dulac 判据来研究方程组(1)的极限环的唯一性．事实上，对方程组(1)作函数(2)，然后取 Dulac 函数

$$B(x, y)=\frac{1}{[V(x, y)]^{\beta} \varphi(y)} \tag{15}$$

计得，

$$\operatorname{div}[B(x, y) P(y), B(x, y)(-f(x, y) h(y)-g(x) \varphi(y))]=-[U(x, y)]_y'. \tag{16}$$

于是若将本文定理 1 的条件 2°改为：在 V^+中，$[U(x, y)]_y'$ 保号，且在(1)的任何闭轨线上不恒为零，则立即得到极限环的唯一性．例如，对系统(14)可取 Dulac 函数

$$\begin{aligned} B(x, y) &=[V(x, y)]^{-\frac{\alpha+1}{2}} \\ &=\left[\int_0^y y dy+\int_0^x\left(x^3-x\right) dx-\int_0^{x_1}\left(x^3-x\right) dx\right]^{-\frac{\alpha+1}{2}} \\ &=\left[\frac{1}{2} y^2+\frac{1}{4} x^4-\frac{1}{2} x^2-\frac{1}{4} x_1^4+\frac{1}{2} x_1^2\right]^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $x_1=\sqrt{\beta}$，这个函数对系统(14)的一切参数 $\alpha>-1$，$\beta \geqslant 2$ 均适用．特别地，对文[2]讨论的情形 $\alpha=0$，$\beta>2$，在(17)中取 $\alpha=0$，则

$$4 B(x, y)=\left[2 y^2+x^4-2 x^2-\beta^2-2 \beta\right]^{-\frac{1}{2}}$$

便是文[2]证明它的定理 1 时，使用的 Dulac 函数．

此外，还可用 Levinson 和 Smith 首创的计算发散量的积分的方法来讨论方程组(1)的极限环的唯一性(其根据是相邻两个极限环 $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$，必有不同的稳定性)．方法是先将方程组(1)化为(4)，则

$$\oint_{\Gamma} \operatorname{div}(P^*, Q^*) dt=-\oint_{\Gamma}[U(x, y)]_y' dt$$

于是在条件 $[U(x, y)]_y' \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) 下，而等号不能在任何闭轨线上恒成立，即可得极限环的唯一性．而且极限环若存在必为稳定(不稳定)的单重环．

由此可见，在一定条件下，上述四种证明极限环唯一性的方法是相通的，虽然依据各不相同．

参 考 文 献

[1] 李继彬，平面三次系统的一类极限环分布，中国科学，7(1984)，586—596.
[2] 索光俭，沈伯骞，系统 $\dot{x}=y$，$\dot{y}=x(1-x^2)+(\alpha-x^2)y$ $(2<\alpha<2.5)$ 恰存在一个极限环包含三个奇点，数学研究与评论，1(1987)，156.
[3] 韩茂安，一类方程包围多个奇点的极限环的存在性和唯一性，应用数学学报，2(1991)，192—196.
[4] 叶彦谦，极限环论，上海科技出版社，1984.
[5] 张芷芬，微分方程定性理论，科学出版社，北京，1985.
[6] Н. В. Медведев, *Изв. Вузов. Мат.*, 2(1965).

A SUFFICIENT CONDITION FOR THE UNIQUENESS OF A CLASS OF LIMIT CYCLES

Zhou Yu-Rong

(*Department of Applied Mathematics, Shandong Institute of Mining and Technology,* Taian 271019)

ABSTRACT

In this paper, by use of a type of auxiliary functions, the uniqueness of limit cycles surronding multiple singular points is investigated for the system

$$\dot{x}=p(y),$$
$$\dot{y}=-f(x,y)h(y)-g(x)\varphi(y),$$

and a simple sufficient condition for the uniqueness is obtained. Moreover, the relations between some usual methods for proving the uniqueness of limit cycles is presented, and the method for structuring Dulac function for the system is studied.