系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
9 (2) (1989), 138—147

有 效 解 的 刻 划

李 师 正
(山东师范大学数学系，济南)

§1. 引 言

对于多目标问题有效解的刻划，已有许多工作，在[3]中推广了[5]中单目标凸规划的极优解的 Fritz John 型必要条件，在 Slater 型条件假定下，进一步给出了多目标非可微凸规划有效解的必要条件(本文(7)，(8))。[2]在假定 Slater 型条件成立时，证明类似于[3]的条件(本文(9)，(10))可成为有效解的充要条件。

考虑问题

$$\text{(P)} \qquad \min\{f(x) \mid x \in D\},$$

其中 $f(x) := (f_1(x), \cdots, f_n(x))$，$D := C \cap \{x \mid g(x) \leqslant 0\}$，$g(x) := (g_1(x), \cdots, g_m(x))$，$C$ 为局部凸线性拓扑空间 X 中非空凸集，f_i，g_k，$i = 1, \cdots, n$，$k = 1, \cdots, m$ 为 X 上的连续实凸函数。

以下记 $\mathbf{R}$ 为实数空间，$\mathbf{R}^n$ 为 n 维实欧氏空间，$\mathbf{R}^n_+$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中非负向量锥，$\operatorname{int}\mathbf{R}^n_+$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中坐标皆正的向量集。$y \in \mathbf{R}^n_+$ 记为 $y \geqslant 0$；$y \in \operatorname{int}\mathbf{R}^n_+$ 记为 $y > 0$。$\langle a, b\rangle$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中内积，$\langle x^*, x\rangle$ 表示泛函 x^* 在 x 的值。$x_0 \in D$ 称为 (P) 的有效解，如果不存在 $x \in D$，使 $f(x) \leqslant f(x_0)$，$f(x) \neq f(x_0)$。

设 $\alpha \in \operatorname{int}\mathbf{R}^n_+$，如果存在 $\beta \in \mathbf{R}^m_+$，$x_0 \in C$，对一切 $x \in C$ 和 $y^* \in \mathbf{R}^m_+$，有

$$L_\alpha(x_0, y^*) \leqslant L_\alpha(x_0, \beta) \leqslant L_\alpha(x, \beta), \tag{1}$$

其中

$$L_\alpha(x, y^*) := \langle \alpha, f(x)\rangle + \langle y^*, g(x)\rangle, \tag{2}$$

则称 (x_0, β) 为 L_α 的一个鞍点。如果 (x_0, β) 为 L_α 的一个鞍点，则 x_0 为有效解[1,p.86]；反之，设 x_0 为 (P) 的有效解，如有相应的 α，β 使(1)成立，则称 (P) 在 x_0 关于 α 成立鞍点准则[7]。鞍点准则是关于 (P) 的某种正则性的条件。

本文首先找出 (P) 在有效解 x_0 关于某 $\alpha \in \operatorname{int}\mathbf{R}^n_+$ 成立鞍点准则的充要条件，然后证明有效解与[2，3]中条件等价，当且仅当 (P) 在 x_0 关于 α 鞍点准则成立。这样，就使[2,3]中论及的结论落到实处。对于[2]中提及的对偶问题，我们找出使[2]中相应结果成立的充要条件，并加以改进。

1988 年 5 月 12 日收到，1988 年 8 月 1 日收到修改稿。

§2. 鞍点准则

引理 2.1. (P) 在有效解 x_0 关于某 $\alpha\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^p$ 成立鞍点准则,当且仅当存在 $\beta\in\mathbf{R}_+^m$,使对所有 $x\in C$,有

$$\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle\leqslant\langle\alpha,\ f(x)\rangle+\langle\beta,\ g(x)\rangle. \tag{3}$$

证. 如(1)成立,由于 $g(x_0)\leqslant 0$, $\langle\beta,\ g(x_0)\rangle\leqslant 0$. 当取 $y^*=0$ 时,由(1)之左不等式,得 $\langle\beta,\ g(x_0)\rangle\geqslant 0$. 故 $\langle\beta,\ g(x_0)\rangle=0$. 再由(1)之右不等式,得 (3). 反之,由(3)中 x 代之 x_0, 则 $\langle\beta,\ g(x_0)\rangle\geqslant 0$. 由于 $\langle\beta,\ g(x_0)\rangle\leqslant 0$, 从而 $\langle\beta, g(x_0)\rangle=0$, 由此得(1)之右不等式,又因 $y^*\in\mathbf{R}_+^m$, $\langle y^*,\ g(x_0)\rangle\leqslant 0$, 得(1)之左不等式. 证毕.

引进集合 V, 函数 $D:V\to 2^C$ 及 φ_α: $V\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$.

$$V:=\{y\in\mathbf{R}_m \mid \text{存在 } x\in C,\ \text{使 } g(x)\leqslant y\}. \tag{4}$$

$$D(y):=\{x\mid x\in C,\ g(x)\leqslant y\},\ y\in V. \tag{5}$$

$$\varphi_\alpha(y):=\operatorname{Inf}\{\langle\alpha,\ f(x)\rangle\mid x\in D(y)\},\ y\in V(\alpha\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^p).$$

如果 (P) 有可行解 x_0, 则 $0\in V\neq\phi$. 易见 V 为凸集, 且 $y\in\mathbf{R}_+^m\Longrightarrow g(x_0)\leqslant 0\leqslant y$, 故 $\mathbf{R}_+^m\subseteq V$. $\forall y\in V$, $D(y)$ 为 X 中非空凸集. 显然, $D(0)=D$; $\forall x\in C$ 有 $x\in D(g(x))$, $g(x)\in V$; V 中 $y_1\leqslant y_2\Longrightarrow D(y_1)\subseteq D(y_2)$ 且 $\varphi_\alpha(y_1)\geqslant\varphi_\alpha(y_2)$.

引理 2.2. 设 (P) 有可行解 x_0, 则 φ_α: $V\to\bar{\mathbf{R}}:=\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ 是凸函数.

证. 由于 $x_0\in D$, 故 $0\in V\neq\phi$. 设 $y_1,\ y_2\in V$, $a+b=1$, $a>0$, $b>0$, 则有 $ay_1+by_2\in V$, 因设 $x_1\in D(y_1)$, $x_2\in D(y_2)$, 则

$$g(ax_1+bx_2)\leqslant ag(x_1)+bg(x_2)\leqslant ay_1+by_2,$$

即知 $ax_1+bx_2\in D(ay_1+by_2)$, $ay_1+by_2\in V$.

$$\varphi_\alpha(ay_1+by_2)\leqslant\langle\alpha,\ f(ax_1+bx_2)\rangle\leqslant a\langle\alpha,\ f(x_1)\rangle+b\langle\alpha,\ f(x_2)\rangle.$$

固定 x_1, 让 x_2 取遍 $D(y_2)$, 则

$$\varphi_\alpha(ay_1+by_2)-a\langle\alpha,\ f(x_1)\rangle\leqslant b\langle\alpha,\ f(x_2)\rangle,$$

$$\begin{aligned}b\varphi_\alpha(y_2)&=b\inf\{\langle\alpha,\ f(x_2)\rangle\mid x_2\in D(y_2)\}\\&\geqslant\varphi_\alpha(ay_1+by_2)-a\langle\alpha,\ f(x_1)\rangle.\end{aligned}$$

同样,由于 $a\langle\alpha,\ f(x_1)\rangle\geqslant\varphi_\alpha(ay_1+by_2)-b\varphi_\alpha(y_2)$, 得

$$\begin{aligned}a\varphi_\alpha(y_1)&=a\inf\{\langle\alpha,\ f(x_1)\rangle\mid x_1\in D(y_1)\}\\&\geqslant\varphi_\alpha(ay_1+by_2)-b\varphi_\alpha(y_2).\end{aligned}$$

$$\varphi_\alpha(ay_1+by_2)\leqslant a\varphi_\alpha(y_1)+b\varphi_\alpha(y_2).$$

证毕.

定理 2.3. 问题 (P) 在有效解 x_0 关于某 $\alpha\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^p$ 成立鞍点准则当且仅当

1) $\varphi_\alpha(0)=\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle$;

2) $\partial\varphi_\alpha(0)\neq\phi$, 其中 $\partial\varphi_\alpha(0)=\{y^*\in\mathbf{R}^m\mid\langle y^*,\ y\rangle\leqslant\varphi_\alpha(y)-\varphi_\alpha(0),\ \forall y\in V\}$ 为 $\varphi_\alpha(y)$ 在 0 点的次微分.

证. **充分性.** 由 2), 存在 $\bar{y}^*\in\partial\varphi_\alpha(0)$, 对 $\forall y\in V$, 有 $\langle\bar{y}^*,y\rangle\leqslant\varphi_\alpha(y)-\varphi_\alpha(0)$. 现 $\forall y'\in\mathbf{R}_+^m\subseteq V$, 显然 $D(0)\subseteq D(y')$, 故 $\varphi_\alpha(y')\leqslant\varphi_\alpha(0)$, $\langle\bar{y}^*,\ y'\rangle\leqslant\varphi_\alpha(y')-$

$\varphi_\alpha(0)\leqslant 0$. 由此可知 $\bar{y}^*\leqslant 0$. 令 $\beta:=-\bar{y}^*\geqslant 0$. $\forall x_1\in C$, 显然 $g(x_1)\in V$, 于是,

$$\begin{aligned}\langle-\beta,\ g(x_1)\rangle&=\langle\bar{y}^*,\ g(x_1)\rangle\leqslant\varphi_\alpha(g(x_1))-\varphi_\alpha(0)\\&=\inf\{\langle\alpha,\ f(x)\rangle\mid x\in D(g(x_1))\}-\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle\\&\leqslant\langle\alpha,\ f(x_1)\rangle-\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle,\\\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle&\leqslant\langle\alpha,\ f(x_1)\rangle+\langle\beta,\ g(x_1)\rangle.\end{aligned}$$

由引理 2.1, (P) 在 x_0 关于 α 适合鞍点准则.

必要性 设 (P) 在 x_0 关于 α 适合鞍点准则, 则由引理 2.1, (3) 成立. $\forall x\in D=D(0)$, 即 $g(x)\leqslant 0$, $x\in C$, 则 (3) 中 $\beta\in\mathbf{R}^m_+$ 推出 $\langle\beta,\ g(x)\rangle\leqslant 0$. 因而, $\forall x\in D$, 总有

$$\langle\alpha,f(x_0)\rangle\leqslant\langle\alpha,f(x)\rangle+\langle\beta,\ g(x)\rangle\leqslant\langle\alpha,f(x)\rangle,$$

于是 $\varphi_\alpha(0)=\inf\{\langle\alpha,\ f(x)\rangle\mid g(x)\leqslant 0,\ x\in C\}=\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle$, 条件 1) 成立.

取任意的 $y\in V$, 则对 $x\in C$, 使 $y\geqslant g(x)$. 由 (3),

$$\langle-\beta,\ y\rangle\leqslant-\langle\beta,\ g(x)\rangle\leqslant\langle\alpha,\ f(x)\rangle-\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle,$$

得

$$\langle\alpha,\ f(x)\rangle\geqslant\langle-\beta,\ y\rangle+\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle,$$

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(y)&=\inf\{\langle\alpha,\ f(x)\rangle\mid g(x)\leqslant y,\ x\in C\}\\&\geqslant\langle-\beta,\ y\rangle+\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle=\langle-\beta,\ y\rangle+\varphi_\alpha(0),\end{aligned}$$

即 $-\beta\in\partial\varphi_\alpha(0)\neq\phi$. 条件 2) 成立. 证毕.

引理 2.4[4,Th.23.4] 设 φ 为 $\mathbf{R}^m$ 上的正常 (proper) 凸函数,即 $\forall y\in\mathbf{R}^m$, $\varphi(y)>-\infty$, 且至少有一个 y_0, 使 $\varphi(y_0)<+\infty$, 则 $\partial\varphi(y)$ 非空有界当且仅当 $y\in\operatorname{int}(\operatorname{dom}\varphi)$, 其中 $\operatorname{dom}\varphi=\{y\in\mathbf{R}^m\mid\varphi(y)<+\infty\}$.

推论 2.5. 如果 0 是 V 的内点, x_0 是 (P) 的有效解, $\alpha\in\operatorname{int}\mathbf{R}^s_+$, 且适合

$$\varphi_\alpha(0)=\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle,$$

则 (P) 在 x_0 关于 α 适合鞍点准则.

证. 首先证明这时 $\forall y\in V$, 有 $\varphi_\alpha(y)>-\infty$. 若不然,设 $\bar{y}\in V$, $\varphi_\alpha(\bar{y})=-\infty$. 由于 0 是 V 的内点,取 $k>0$ 充分小,使 $-k\bar{y}\in V$, 则

$$\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle=\varphi_\alpha(0)\leqslant\frac{1}{1+k}\varphi_\alpha(-k\bar{y})+\frac{k}{1+k}\varphi_\alpha(\bar{y})=-\infty,$$

矛盾. 扩充定义 $\bar{\varphi}_\alpha:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$:

$$\bar{\varphi}_\alpha(y)=\begin{cases}\varphi_\alpha(y), & y\in V;\\ +\infty, & y\bar{\in}V.\end{cases}$$

$\bar{\varphi}_\alpha$ 是凸函数. 事实上, $\forall y_1,\ y_2\in\mathbf{R}^m$, $a>0$, $b>0$, $a+b=1$, 则当 $y_1,\ y_2\in V$ 时, 由引理 2.2 及 $\bar{\varphi}_\alpha(y_i)=\varphi_\alpha(y_i)$, $i=1,\ 2$, 有

$$\bar{\varphi}_\alpha(ay_1+by_2)\leqslant a\bar{\varphi}_\alpha(y_1)+b\bar{\varphi}_\alpha(y_2).\tag{6}$$

当 $y_1\bar{\in}V$ 或 $y_2\bar{\in}V$ 时, $\bar{\varphi}_\alpha(y_1)$ 或 $\bar{\varphi}_\alpha(y_2)$ 为$+\infty$, 仍有 (6) 式. 当 $ay_1+by_2\bar{\in}V$ 时,由 V 为凸集推出 $y_1\bar{\in}V$ 或 $y_2\bar{\in}V$, 也有(6)式.

$\bar{\varphi}_\alpha$ 是正常凸函数. 由于 $\bar{\varphi}_\alpha(0)=\varphi_\alpha(0)=\langle\alpha,f(x_0)\rangle<+\infty$, 故 $\bar{\varphi}_\alpha$ 不恒为$+\infty$. 另一方面,假如有 $\bar{y}\in\mathbf{R}^m$, 使 $\bar{\varphi}_\alpha(\bar{y})=-\infty\neq+\infty$, 故 $\bar{y}\in V$, 与本证明的首段矛盾

(因这时推出 $\varphi_a(\bar{y}) = \bar{\varphi}_a(\bar{y}) = -\infty$).

显然 dom $\bar{\varphi}_a = V$, $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} \bar{\varphi}_a)$, 由引理 2.4, $\partial\bar{\varphi}_a(0) \neq \phi$, 即存在 $y^* \in \mathrm{R}^m$, 使 $\forall y \in \mathrm{R}^m$, $\langle y^*, y\rangle \leqslant \bar{\varphi}_a(y) - \bar{\varphi}_a(0)$. 特别, $\forall y \in V$, $\langle y^*, y\rangle \leqslant \varphi_a(y) - \varphi(0)$, 即 $y^* \in \partial\varphi_a(0) \neq \phi$. 由定理 2.3, (P) 关于 α 在 x_0 适合鞍点准则. 证毕.

推论 2.6. 如果有 $\hat{x} \in C$, 使 $g(\hat{x}) \in \operatorname{int}(-\mathrm{R}^m_+)$, x_0 是 (P) 的有效解, $\alpha \in \operatorname{int}\mathrm{R}^n_+$, 且适合 $\varphi_a(0) = \langle \alpha, f(x_0)\rangle$, 则 (P) 在 x_0 关于 α 适合鞍点准则.

证. 由 V 的定义,知 $g(\hat{x}) \in V$. $\forall y \in \operatorname{int}\mathrm{R}^m_+$, 则 $g(\hat{x}) + y > g(\hat{x})$, $g(\hat{x}) + y \in V$, 因而 $g(\hat{x}) + \operatorname{int}\mathrm{R}^m_+ \subseteq V$. 而 $0 = g(\hat{x}) + (-g(\hat{x})) \in g(\hat{x}) + \operatorname{int}\mathrm{R}^m_+$, 即 0 是 V 的内点. 由推论 2.5 得证. 证毕.

§3. 有效解的充要条件

[3] 中得出有效解的必要条件为

引理 3.1[3,Th.3.4]. 设 x_0 为 (P) 的有效解,且 Slater 型条件 (K) 成立:

(K): 对每个 $i = 1, \cdots, m$, 存在 $x_i \in C$, 使对于 $k = 1, \cdots, m$, 有

$$g_k(x_i) < 0,$$

且当 $j \neq i$ 时, $f_j(x_i) < f_j(x_0)$.

则有 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) > 0$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m) \geqslant 0$, 使(见[3]中(2),(3))

$$0 = \beta_k g_k(x_0), \quad k = 1, \cdots, m \tag{7}$$

$$0 \in \langle \alpha, \partial f(x_0)\rangle + \langle \beta, \partial g(x_0)\rangle + N_C(x_0), \tag{8}$$

其中次微分 $\partial f(x_0) = \{T: X \to \mathrm{R}^n$ 为线性映射 $| T(x - x_0) \leqslant f(x) - f(x_0),$

$\forall x \in X\} = \{(T_1, \cdots, T_n) \in X^* \times \cdots \times X^* | \langle T_i, x - x_0\rangle \leqslant f_i(x) - f_i(x_0),$

$$i = 1, \cdots, n\} = (\partial f_1(x_0), \cdots, \partial f_n(x_0)),$$

$$N_C(x_0) = \{x^* \in X^* | \langle x^*, x - x_0\rangle \leqslant 0, \ \forall x \in C\}$$

为 C 在 x_0 的外法锥,

$$\langle \alpha, \partial f(x_0)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \partial f_i(x_0), \quad \langle \beta, \partial g(x_0)\rangle = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \partial g_k(x_0).$$

[2] 在条件 (K) 的前题下,证明了有效解的一个充要条件:

引理 3.2[2,Th.3.1]. 设 (P) 有条件 (K) 成立. (P) 的可行解 x_0 为有效解, 当且仅当存在 $\bar{\alpha} \in A$, $\bar{\beta} \in B$, 使(见[2]中 (3a),(3b) 式):

$$0 \in \partial f(x_0)\bar{\alpha} + \partial g(x_0)\bar{\beta} + \bar{N}_C(x_0), \tag{9}$$

$$g(x_0)\bar{\beta} = 0, \tag{10}$$

其中 $A: = \{\alpha = (\alpha_{ij})_{n\times n} | \alpha_{ij} \geqslant 0, \ \alpha_{jj} = 1, \ i, \ j = 1, \cdots, n\}$,

$B: = \{\beta = (\beta_{ij})_{m\times n} | \beta_{ij} \geqslant 0, \ i = 1, \cdots, m, \ j = 1, \cdots, n\}$,

$\bar{N}_C(x_0): = (N_C(x_0), \cdots, N_C(x_0))_{1\times n}$ ((9),(10) 中乘法按矩阵乘法进行).

首先,我们证明条件(7),(8)与(9),(10)等价. 其次证明(7), (8)作为有效解的充分条件是无附加前题条件的(如不要 Slater 条件 (K)), 因而改进了 [2, 3] 的结果. 最后,证明(7), (8) 成为有效解的必要条件(因而是充要条件)当且仅当 (P) 在 x_0 关于该

$\alpha \in \text{int}\, \mathbf{R}_+^n$ 适合鞍点准则.

定理 3.3. 设 x_0 为 (P) 的可行解,则存在 $\alpha \in \text{int}\, \mathbf{R}_+^n$, $\beta \in \mathbf{R}_+^m$, 使(7),(8)成立当且仅当存在 $\bar{\alpha} \in A$, $\bar{\beta} \in B$, 使(9), (10) 成立.

证. 设(7),(8)成立. 取 $\bar{\alpha}_{ij} := \alpha_i/\alpha_j$, $i, j = 1, \cdots, n$, 则 $\bar{\alpha} := (\bar{\alpha}_{ij}) \in A$. 取 $\bar{\beta}_{ij} := \beta_i/\alpha_j$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, 则 $\bar{\beta} := (\bar{\beta}_{ij}) \in B$. 由(8),

$$0 \in \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \partial f_i(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \partial g_i(x_0) + N_C(x_0),$$

$N_C(x_0)$ 为顶点是 0 的凸锥,上式两端乘 $1/\alpha_j > 0$,

$$\begin{aligned} 0 &\in \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \partial f_i(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i}{\alpha_j} \partial g_i(x_0) + N_C(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_{ij} \partial f_i(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\beta}_{ij} \partial g_i(x_0) + N_C(x_0), \end{aligned}$$

$j = 1, \cdots, n$. 于是,有

$$\begin{aligned} 0 \in (\partial f_1(x_0), \cdots, \partial f_n(x_0)) &\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} \cdots \bar{\alpha}_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{\alpha}_{n1} \cdots \bar{\alpha}_{nn} \end{pmatrix} \\ + (\partial g_1(x_0), \cdots, \partial g_m(x_0)) &\begin{pmatrix} \bar{\beta}_{11} \cdots \bar{\beta}_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \bar{\beta}_{m1} \cdots \bar{\beta}_{mn} \end{pmatrix} \\ + (N_C(x_0), \cdots, N_C(x_0)) & \\ = \partial f(x_0) \bar{\alpha} + \partial g(x_0) \bar{\beta} + \bar{N}_C(x_0). & \end{aligned}$$

即有(9)式. 由 (7), $g_i(x_0)\beta_i = 0$, $i = 1, \cdots, m$. 于是 $g_i(x_0)\bar{\beta}_{ij} = g_i(x_0)\beta_i/\alpha_j = 0$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, 得(10).

反之,设有 $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_{ij})_{n\times n} \in A$, $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_{ij})_{m\times n} \in B$, 使 (9), (10) 成立. 取

$$\alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_{1j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_{nj} \right),$$

$$\beta := (\beta_1, \cdots, \beta_m) = \left(\sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_{1j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_{mj} \right),$$

由于 $\bar{\alpha}_{ij} \geqslant 0$, $\bar{\alpha}_{jj} = 1$, $i, j = 1, \cdots, n$ 及 $\bar{\beta}_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, 可知 $\alpha \in \text{int}\mathbf{R}_+^n$, $\beta \in \mathbf{R}_+^m$. 由(9)式,即有

$$\begin{aligned} 0 \in (\partial f_1(x_0), \cdots, \partial f_n(x_0)) &\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} \cdots \bar{\alpha}_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \bar{\alpha}_{n1} \cdots \bar{\alpha}_{nn} \end{pmatrix} \\ + (\partial g_1(x_0), \cdots, \partial g_m(x_0)) &\begin{pmatrix} \bar{\beta}_{11} \cdots \bar{\beta}_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \bar{\beta}_{m1} \cdots \bar{\beta}_{mn} \end{pmatrix} \\ + (N_C(x_0), \cdots, N_C(x_0)). & \end{aligned}$$

上式右乘向量 $\varepsilon=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$，得

$$
\begin{aligned}
0\in&(\partial f_1(x_0),\cdots,\partial f_n(x_0))\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_{11}+\cdots+\bar{\alpha}_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \bar{\alpha}_{n1}+\cdots+\bar{\alpha}_{nn}\end{pmatrix}\\
&+(\partial g_1(x_0),\cdots,\partial g_m(x_0))\begin{pmatrix}\bar{\beta}_{11}+\cdots+\bar{\beta}_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \bar{\beta}_{m1}+\cdots+\bar{\beta}_{mn}\end{pmatrix}\\
&+(N_C(x_0)+\cdots+N_C(x_0))\\
=&(\partial f_1(x_0),\cdots,\partial f_n(x_0))\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\\
&+(\alpha g_1(x_0),\cdots,\partial g_m(x_0))\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}+N_C(x_0)\\
=&\langle\alpha,\partial f(x_0)\rangle+\langle\beta,\partial g(x_0)\rangle+N_C(x_0),
\end{aligned}
$$

这里由于 $N_C(x_0)$ 为凸锥，故有 $N_C(x_0)+\cdots+N_C(x_0)=N_C(x_0)$，于是推出 (8) 式。另外，由 (10)，

$$g(x_0)\bar{\beta}=0,$$

两端仍右乘 $\varepsilon=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$，得

$$\langle\beta,g(x_0)\rangle=g(x_0)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}=g(x_0)\bar{\beta}\varepsilon=0.$$

由于 $\beta\geqslant 0$，$g(x_0)\leqslant 0$，于是上式推出每个加项 $\beta_k g_k(x_0)=0$，$k=1,\cdots,m$，即 (7) 式成立。证毕。

定理 3.4. 设 x_0 为 (P) 的可行解，如有 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_m)\in\mathbf{R}_+^m$，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathrm{int}\mathbf{R}_+^n$，使(7)，(8)成立，则 x_0 为 (P) 的有效解。

证. 由 (8)，存在 $x_i^*\in\partial f_i(x_0)$，$i=1,\cdots,n$，$y_k^*\in\partial g_k(x_0)$，$k=1,\cdots,m$，使

$$-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^*-\sum_{k=1}^{m}\beta_k y_k^*\in N_C(x_0).\tag{11}$$

对每个 $x\in C$，有 $\left\langle\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^*+\sum\limits_{k=1}^{m}\beta_k y_k^*,\ x-x_0\right\rangle\geqslant 0$. 因为 $\langle x_i^*,\ x-x_0\rangle\leqslant f_i(x)-f_i(x_0)$，$\langle y_k^*,\ x-x_0\rangle\leqslant g_k(x)-g_k(x_0)$，$i=1,\cdots,n$，$k=1,\cdots,m$，故对所有

$x \in C$，有

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(f_i(x)-f_i(x_0))+\sum_{k=1}^{m}\beta_k(g_k(x)-g_k(x_0))$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n}\langle \alpha_i x_i^*,\ x-x_0\rangle+\sum_{k=1}^{m}\langle \beta_k y_k^*,\ x-x_0\rangle$$

$$=\left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^*+\sum_{k=1}^{m}\beta_k y_k^*,\ x-x_0\right\rangle \geqslant 0.$$

又由(7)，$\forall x\in C$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)+\sum_{k=1}^{m}\beta_k g_k(x)\geqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0)+\sum_{k=1}^{m}\beta_k g_k(x_0)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0). \tag{12}$$

任取 (P) 的可行解 x'，如果 $f(x')\leqslant f(x_0)$，$f(x')\neq f(x_0)$，即 $f_i(x')\leqslant f_i(x_0)$，$i=1,\cdots,n$，但有 i_0，使 $f_{i_0}(x')<f_{i_0}(x_0)$．由于 $\alpha_i>0$，$i=1,\cdots,n$，故

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x')<\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0).$$

又由

$$\sum_{k=1}^{m}\beta_k g_k(x')\leqslant 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x')+\sum_{k=1}^{m}\beta_k g_k(x')\leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x')<\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0),$$

与(12)矛盾．故 x_0 为有效解．证毕．

因而(7)，(8)(或(9)，(10))是有效解的充分条件，同时在某些假定下(如条件 (K))也是必要的．那么，自然要问：(7)，(8)与有效解何时等价？以下给出等价的充要条件．

定理 3.5. 设 $X=\mathbf{R}^p$，x_0 为 (P) 的有效解，则存在 $\alpha\in \operatorname{int}\mathbf{R}^n_+$ 和 $\beta\in\mathbf{R}^m_+$，使(7)，(8)成立当且仅当 (P) 在 x_0 关于 α 成立鞍点准则．

证．首先，设有 α,β 使 (7)，(8) 成立，由 (8)，存在 $x_i^*\in\partial f_i(x_0)$，$y_k^*\in\partial g_k(x_0)$，$i=1,\cdots,n$，$k=1,\cdots,m$，使(11)成立，与定理 3.4 证明相同，可得 (12)．于是，可知 $\forall x\in C$，有

$$\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle\leqslant\langle\alpha,\ f(x)\rangle+\langle\beta,\ g(x)\rangle.$$

由引理 2.1，知 (P) 在 x_0 关于 α 适合鞍点准则．

反之，设 (P) 在 x_0 关于 α 适合鞍点准则，则由引理 2.1，存在 $\beta\in\mathbf{R}^m_+$，使 (3) 式成立．在(3)中，令 $x=x_0$，得 $\langle\beta,g(x_0)\rangle\geqslant 0$．由于 $g(x_0)\leqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，故 $\langle\beta,g(x_0)\rangle=0$．因而有(7)，又由(3)和 $\langle\beta,\ g(x_0)\rangle=0$，知 $\forall x\in C$，

$$\langle\alpha,\ f(x)-f(x_0)\rangle+\langle\beta,\ g(x)-g(x_0)\rangle\geqslant 0.$$

即函数 $\varphi(x):=\langle\alpha,\ f(x)\rangle+\langle\beta,\ g(x)\rangle+\delta_C(x)$ 在 x_0 取得极小，其中

$$\delta_C(x)=\begin{cases}0, & x\in C,\\ +\infty, & x\bar{\in} C\end{cases}$$

为C的指示函数． 由于各f_i，g_k连续，$\mathrm{dom}(f_i)=\mathrm{dom}(g_k)=X$，由 [4，§23] 或 [6，p.77，p.97]，

$$\begin{aligned}0&\in\partial(\langle\alpha,\ f(x)\rangle+\langle\beta,\ g(x)\rangle+\delta_C(x))_{x=x_0}\\ &=\langle\alpha,\ \partial f(x_0)\rangle+\langle\beta,\ \partial g(x_0)\rangle+N_C(x_0),\end{aligned}\tag{13}$$

这时 $N_C(x_0)=\partial\delta_C(x_0)$，得 (8)．证毕．

推论 3.6. 设 $X=\mathbf{R}^p$，x_0为 (P) 的有效解,则以下结论等价:

1) 存在 $\alpha\in\mathrm{int}\,\mathbf{R}^s_+$，$\beta\in\mathbf{R}^m_+$，使(7)，(8)成立；

2) 存在 $\bar{\alpha}\in A$，$\bar{\beta}\in B$，使(9)，(10)成立；

3) (P) 关于某 $\alpha\in\mathrm{int}\,\mathbf{R}^s_+$ 在x_0成立鞍点准则；

4) 存在 $\alpha\in\mathrm{int}\,\mathbf{R}^s_+$，使 $\varphi_\alpha(0)=\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle$，$\partial\varphi_\alpha(0)\neq\phi$.

证．定理 3.3 推出 1)$\Longleftrightarrow$2)；定理 3.5 推出 1)$\Longleftrightarrow$3)；定理 2.3 推出 3)$\Longleftrightarrow$4)．证毕．

推论 3.7. 设 $X=\mathbf{R}^p$，x_0为 (P) 的可行解,则以下结论等价:

1) 存在 $\alpha\in\mathrm{int}\,\mathbf{R}^s_+$，$\beta\in\mathbf{R}^m_+$，使(7)，(8)成立；

2) 存在 $\bar{\alpha}\in A$，$\bar{\beta}\in B$，使(9)，(10)成立；

3) x_0为 (P) 的有效解，(P) 关于某 $\alpha\in\mathrm{int}\mathbf{R}^s_+$ 在x_0成立鞍点准则；

4) x_0为 (P) 的有效解,存在 $\alpha\in\mathrm{int}\mathbf{R}^s_+$，使 $\varphi_\alpha(0)=\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle$，$\partial\varphi_\alpha(0)\neq\phi$.

证．定理 3.3 推出 1)$\Longleftrightarrow$2)．定理 2.3 推出 3)$\Longleftrightarrow$4)．定理 3.5 推出 3)$\Longrightarrow$1)．下证 1)$\Longrightarrow$3)：由定理 3.4 知，x_0为有效解．由定理 3.5 推出 (P) 在x_0关于α成立鞍点准则．证毕．

定理 3.8. 设 $X=\mathbf{R}^p$，x_0为 (P) 的有效解,且有 $\alpha\in\mathrm{int}\mathbf{R}^s_+$，$\varphi_\alpha(0)=\langle\alpha,\ f(x_0)\rangle$．如果 0 是$V$的内点,特别如果存在 $\hat{x}\in C$，使 $g(\hat{x})\in\mathrm{int}(-\mathbf{R}^m_+)$，则有 $\beta\in\mathbf{R}^m_+$，使 (7)，(8) 成立．

证． 由推论 2.5 及 2.6，(P) 在x_0关于α成立鞍点准则，又由定理 3.5 推出存在 $\beta\in\mathbf{R}^m_+$，使(7)，(8)成立．证毕．

§4. 对偶问题

[2]中引入了 (P) 的 Wolfe 型对偶问题:

(D)　　$$\max[f(x)+f(x)\otimes'\alpha+g(x)\beta],$$

其中 $(x;\alpha,\ \beta)$ 适合 $0\in\partial f(x)\alpha+\partial g(x)\beta+\bar{N}_C(x)$，$x\in C$，$\alpha\in A$，$\beta\in B$ (见 (9)，(10))，

$$f(x)\otimes'\alpha:=((f(x)\otimes'\alpha)_j)_{1\times s},$$

$$(f(x)\otimes'\alpha)_j:=\sum_{i\neq j}^{s}f_i(x)\alpha_{ij}.$$

实际上，$f(x)\otimes'\alpha=(f_1(x),\cdots,f_n(x))\begin{pmatrix}0 & \alpha_{12}\cdots\alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & 0\cdots\alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}\cdots 0\end{pmatrix}=f(x)(\alpha-E)$，其中 E 为 $n\times n$ 单位矩阵. 于是，(D) 的目标函数可简化为

$$f(x)+f(x)\otimes'\alpha+g(x)\beta=f(x)E+f(x)(\alpha-E)+g(x)\beta$$
$$=f(x)\alpha+g(x)\beta. \tag{14}$$

[2] 中已证

引理 4.1[2,Th.4.1]. 设 $\bar{x}$ 为 (P) 的可行解，如果 $(x;\alpha,\beta)$ 是 (D) 的可行解，则

$$(f(\bar{x})\alpha=)f(\bar{x})+f(\bar{x})\otimes'\alpha\geqslant f(x)+f(x)\otimes'\alpha+g(x)\beta.$$

引理 4.2[2,Th.4.2]. 设 (P) 适合 Slater 条件，如果 $\bar{x}$ 为 (P) 的有效解，则存在 $\bar{\alpha}\in A$，$\bar{\beta}\in B$，使 $(\bar{x};\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 为 (D) 的可行解. 同时，如解 $(\bar{x};\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 是 (D) 的有效解，则

$$\min(\mathrm{P})_{\bar{x}}+f(\bar{x})\otimes'\bar{\alpha}=\max(\mathrm{D})_{\bar{x}}.$$

引理 4.3[2,Th.4.3]. 设 (P) 适合 Slater 条件，$\bar{x}$ 为 (P) 的可行解，$(\bar{x};\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 是 (D) 的可行解，且 $(f(\bar{x})\bar{\alpha}=)f(\bar{x})+f(\bar{x})\otimes'\bar{\alpha}=\max(\mathrm{D})_{\bar{x}}$，则 $\bar{x}$ 是 (P) 的有效解.

我们以下试图改进引理 4.2 及 4.3.

定理 4.4. 设 $X=\mathbf{R}^p$，$\bar{x}$ 为 (P) 的有效解，则存在 $\bar{\alpha}\in A$，$\bar{\beta}\in B$，使 $(\bar{x};\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 为 (D) 的可行解且 $f(\bar{x})\bar{\alpha}$ 等于对应目标函数值的充要条件为 (P) 在 $\bar{x}$ 关于某 $\alpha\in\mathrm{int}\mathbf{R}^n_+$ 成立鞍点准则.

证. 设 (P) 在 $\bar{x}$ 关于 α 成立鞍点准则，由定理 3.5，存在 $\beta\in\mathbf{R}^m_+$，使(7)，(8)成立. 由定理 3.3，存在 $\bar{\alpha}\in A$，$\bar{\beta}\in B$，使(9)，(10)成立，即 $(\bar{x};\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 是 (D) 的可行解. 由(10)，$f(\bar{x})\bar{\alpha}=f(\bar{x})\bar{\alpha}+g(\bar{x})\bar{\beta}$，即 $f(\bar{x})\bar{\alpha}$ 等于 $(\bar{x};\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 的目标函数值 (见 (14)).

反之，设存在 $\bar{\alpha}\in A$，$\bar{\beta}\in B$，使 $(\bar{x};\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 是 (D) 的可行解，因而得 (9) 式. 且由于 $f(\bar{x})\bar{\alpha}$ 等于 $(\bar{x};\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 的目标值 $f(\bar{x})\bar{\alpha}+g(\bar{x})\bar{\beta}$，又得 $g(\bar{x})\bar{\beta}=0$，即 (10). 由定理 3.3，存在 $\alpha\in\mathrm{int}\mathbf{R}^n_+$，$\beta\in\mathbf{R}^m_+$，使(7)，(8)成立，又由定理 3.5，得知 (P) 在 $\bar{x}$ 关于 α 成立鞍点准则. 证毕.

此外，利用定理 3.4，可以改进[2]中定理4.3(即本文引理 4.3)，去掉附加的 Slater 条件，得到 (P) 的有效解的一个判别方法.

定理 4.5. 设 $\bar{x}$ 为 (P) 的可行解，$(\bar{x};\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 是 (D) 的可行解，后者的目标函数值等于 $f(\bar{x})\bar{\alpha}$，则 $\bar{x}$ 为 (P) 的有效解.

证. 由于 $(\bar{x};\bar{\alpha},\bar{\beta})$ 是 (D) 的可行解，因而(9)成立. 又由条件

$$f(\bar{x})\bar{\alpha}=f(\bar{x})\bar{\alpha}+g(\bar{x})\bar{\beta},$$

得 $g(\bar{x})\bar{\beta}=0$，即(10)成立. 由定理 3.3，存在 $\alpha\in\mathrm{int}\mathbf{R}^n_+$，$\beta\in\mathbf{R}^m_+$，使(7)，(8)成立，又由定理 3.4，$\bar{x}$ 为 (P) 的有效解. 证毕.

附注 定理 3.5 及由它得出的推论 3.6, 3.7，定理 3.8，4.4 均假定 $X=\mathbf{R}^p$，这不是一个本质的前提，是为了直接利用[4]的结论保证 (13)式成立. 实际上，当 X 为更广泛的空间时，(13) 式仍能成立(见 [6] p. 77，p. 97)，因而相应的上述各命题均可相应加以推广.

参 考 文 献

[1] Arrow, K. J., Hurwicz, L. and Uzawa, H., Studies in Linear and Nonlinear Programming, Stanford Univ., 1958.

[2] Lai, H. C., and Ho, C. P., Duality theorem of nondifferentiable convex multiobjective programming, *J. Optim. Theory Appl.*, **50**(1986), 407—420.

[3] Kanniappan, P., Necessary conditions for optimization of nondifferentiable convex multiobjective programming, *J. Optim. Theory Appl.*, **40**(1983), 167—174.

[4] Rockafellar, R. T., Convex Analysis, Princeton Univ, Press, 1970.

[5] Schechter, R. T., More on subgradient duality, *J. Math. Anal. Appl.*, **71** (1979), 251—262.

[6] Tiel, J. V., Convex Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1984.

[7] 李师正,线性拓扑空间中向量凸规划的鞍点定理,运筹学杂志, **2**: 1(1983), 60—61.

[8] 李师正,有序向量空间中凸规划成立鞍点准则的充要条件,系统科学与数学, **7** (1987), 322—328.

CHARACTERIZATION OF EFFICIENT SOLUTIONS

Li Shi-Zheng

(Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan)

ABSTRACT

This paper considers a multiobjective programming problem (P). First we prove that the problem satisfies the saddle point criteria at an efficient solution x_0 for $\alpha \in \operatorname{int} R^*_+$ iff $\varphi_\alpha(0) = \langle \alpha, f(x_0) \rangle$, $\partial\varphi_\alpha(0) \neq \phi$. Next we prove that the conditions((7), (8) in this paper) of [3] are equivalent to conditions ((9), (10) in this paper) of [2], that they are also sufficient conditions for the efficient solutions, and that an efficient solution of (P) is equivalent to (7) and (8) iff (P) satisfies the saddle point criteria. Finally we consider Wolfe-type dual problem and prove that a dual property in [2] is equivalent to satisf action of the saddle point criteria.