多光子 J-C 模型中频率随时间变化场的压缩效应*

卢道明

(武夷学院 电子工程系,福建 武夷山 354300)

摘 要:利用多光子 J-C 模型,考虑场频率随时间以正弦函数形式作小量变化,在旋波近似下,研究 了二能级原子通过多光子跃迁与单模辐射场相互作用系统中场的压缩效应.利用数值计算方法讨 论了场频率变化的幅值和角频率、以及光场强度对场压缩效应的影响.结果表明:随场频率变化的 幅值增大,场压缩效应增强;随光场初始平均光子数的增加,场压缩效应减弱.场正交分量的均方涨 落随时间的演化受场频率随时间正弦函数形式变化的调制,场频率变化的幅值越大调制作用越强. 关键词:二能级原子;J-C 模型;频率变化场;压缩效应

中图分类号:O431.2 文献标识码:A

A 文章:

0 引言

光场与原子相互作用系统的量子特性研究是量 子光学研究的中心内容.尤其是光场的压缩效应,它 不仅反映了一类非经典特性,而且在超标准量子极 限的高准确度光学测量,超低噪音通信,微弱信号检 测及量子通信等领域有着广泛的应用前景.因此,光 场与原子相互作用系统中光场和原子压缩效应研究 一直受到人们的普遍关注.近年来人们已利用 Jaynes-Cummings(以下简称 J-C)模型^[1]及其拓展 形式对光场与原子相互作用系统中光场和原子的压 缩效应等量子特性作了大量研究[2-6],取得了一系列 有意义的成果.然而在以往关于光场与原子相互作 用系统的研究中,场的频率被认为是常量.事实上, 场频率变化将影响原子与场的相互作用,也将影响 原子和场相互作用系统的量子特性.涉及场频率随 时间变化情况下原子与场相互作用的研究少见报 道. 文献[7] 报道了场频率随时间变化时原子布居数 反转的动力学行为,文献[8]报道了场频率随时间变 化时场熵的演化,但尚未见频率随时间变化场与原 子相互作用系统中场压缩效应的研究报道.本文是 在标准多光子 J-C 模型的基础上,在旋波近似下,对 标准 J-C 模型进行推广,考虑相互作用光场频率随 时间以正弦函数形式作小量变化的情形,用数值计 算的方法研究了场频率变化的幅值和角频率、以及 光场强度对场压缩效应的影响.研究结果表明:随场 频率变化的幅值增大,场压缩效应增强;随光场初始 平均光子数的增加,场压缩效应减弱.场正交分量的 均方涨落随时间的演化受场频率随时间正弦函数形

Tel:0599-5136577 Email:daominglu79@hotmail.com 收稿日期:2008-02-03 修回日期:2008-05-26 **文章编号:**1004-4213(2009)07-1840-6

式变化的调制,场频率变化的幅值越大,调制作用越强.对于弱光场在场频率变化的幅值大于一定值后, 场正交分量的均方涨落将按场频率周期性的变化规 律作一定的周期性演化.

1 系统态矢的演化

考虑一个二能级原子通过多光子跃迁与单模辐 射场相互作用系统,在旋波近似下,系统的哈密顿能 量为

 $H = \omega a^{+} a + \omega_{0} S_{3} + g(S_{+} a^{k} + a^{+k} S_{-})$ (1) 式中取 $\hbar = 1, \omega_{0}$ 是二能级原子的跃迁频率, ω 是辐 射场的频率, 设场的频率为 $\omega = \omega_{01} + f(t), k\omega_{01} = \omega_{0}, \omega_{01}$ 是共振情况下场的频率, k 是跃迁过程中吸收 或发射的光子数, g 是原子与辐射场的耦合系数, f (t)为频率随时间变化的函数.原子与辐射场的耦合 系数可写为^[7]

$$g = g_0 \sqrt{1 + \frac{f(t)}{\omega_{01}}} \tag{2}$$

式中 g_0 为共振情况的耦合系数. S_3 , S_+ 和 S_- 为原子的赝自旋算符.二能级原子的基态用 $\begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}$,激发态用

| 表示,则相应的原子算符可用 Pauli 矩阵表示.

$$\boldsymbol{s}_{3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, 0\\ 0, -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{s}_{+} = \begin{bmatrix} 0, 1\\ 0, 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{s}_{-} = \begin{bmatrix} 0, 0\\ 1, 0 \end{bmatrix}$$
(3)

通过运算可得系统的时间演化算符为

^{*}福建省自然科学基金(T0650013)资助

$$|\varphi_{1}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\theta}{2} \exp(-\frac{|\alpha|^{2}}{2}) \frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}} \exp(-i(n+\frac{k}{2})\omega t) (\cos\Omega^{+}t - i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}}) |n\rangle - i\sum_{n=0}^{\infty} g\sin\frac{\theta}{2} \exp(-i\varphi) \cdot \exp(-\frac{|\alpha|^{2}}{2}) \frac{\alpha^{n+k}}{\sqrt{(n+k)!}} \exp(-i(n+\frac{3k}{2})\omega t) [\frac{(n+k)!}{n!}]^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}} |n\rangle \\ |\varphi_{2}\rangle = \sum_{n=k}^{\infty} \exp(-\frac{|\alpha|^{2}}{2}) \frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}} \exp\{-i[(n-\frac{k}{2})\omega t + \varphi]\} \sin\frac{\theta}{2} [\cos\Omega^{-}t + i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin(\Omega^{-}t)}{\Omega^{-}}] |n\rangle - i\sum_{n=0}^{\infty} g\cos\frac{\theta}{2} \cdot \exp[-i(n-\frac{k}{2})\omega t] [\frac{(n+k)!}{\Omega^{+}} \exp(-\frac{|\alpha|^{2}}{2}) \frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}} |n+k\rangle$$

$$(5)$$

式中

$$\Omega^{+} = \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{2} + g^{2} \frac{(n+k)!}{n!} \right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\Omega^{-} = \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{2} + g^{2} \frac{n!}{(n-k)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

2 光场的压缩效应

为了研究光场的压缩效应,定义光场的两个正 交分量

$$U_{1} = \frac{1}{2} (a e^{i\omega t} + a^{+} e^{-i\omega t})$$
$$U_{2} = \frac{1}{2i} (a e^{i\omega t} - a^{+} e^{-i\omega t})$$
(6)

它们满足对易关系和测不准关系

 $\begin{bmatrix} U_1, U_2 \end{bmatrix} = i/2 \langle (\Delta U_1)^2 (\Delta U_2)^2 \rangle \ge 1/16$ (7) 对于给定的状态,定义 $Q_i = (\Delta U_i)^2 - 4^{-1}, (j=1,2)$ 若 Q_j (0 则称光场的 U_j (j=1,2)分量被压缩. 利用式(6)可得

$$Q_{1} = \frac{1}{4} \left(\left\langle a^{2} e^{2i\omega t} + a^{+2} e^{-2i\omega t} \right\rangle + 2 \left\langle a^{+} a \right\rangle - \left\langle a e^{i\omega t} + a^{+} e^{-i\omega t} \right\rangle^{2} \right)$$

$$Q_{2} = \frac{1}{4} \left(-\left\langle a^{2} e^{2i\omega t} + a^{+2} e^{-2i\omega t} \right\rangle + 2 \left\langle a^{+} a \right\rangle + \left\langle a e^{i\omega t} - a^{+} e^{-i\omega t} \right\rangle^{2} \right)$$
(8)

利用式(5)可计算 Q1,Q2 随时间的演化.

3 讨论

为简单起见,设原子初始时刻处于激发态,即 sin($\theta/2$)=0,光场取 $\alpha = |\alpha| \exp(i\beta), |\alpha| = \sqrt{n_0}, n_0$ 为光场平均光子数, β 为光场位相因子.设f(t) = usin(wt), u为场频率变化的幅值,w为变化的角频 率,则有

$$\Delta = -ku\sin(wt), g = g_0 \sqrt{1 + u\sin(wt)/\omega_{01}}$$

$$|\varphi_1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp[-i(n + \frac{k}{2})\omega t] [\cos(\Omega^+ t) - i\frac{\Delta}{2}\frac{\sin(\Omega^+ t)}{\Omega^+}]|n\rangle$$

$$|\varphi_2\rangle = -i\sum_{n=0}^{\infty} g\exp[-i(n - \frac{k}{2})\omega t] [\frac{(n+k)!}{n!}]^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\Omega^+ t)}{\Omega^+} \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n+k\rangle$$
(9)

由式(9)计算得出

$$\langle a e^{i\omega t} - a^+ e^{-i\omega t} \rangle = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n+1}}{n!} \{ \left[\cos(\Omega^+ t) \cos(\Omega_1^+ t) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \frac{\sin(\Omega^+ t) \sin(\Omega_1^+ t)}{\Omega^+ \Omega_1^+} \right] \times \\ \sin\beta + \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\sin(\Omega^+ t) \cos(\Omega_1^+ t)}{\Omega^+} - \frac{\cos(\Omega^+ t) \sin(\Omega_1^+ t)}{\Omega_1^+} \right) \cos\beta \} + 2ig^2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n+1}}{n!} \frac{(n+1+k)!}{(n+1)!} \cdot$$

$$\frac{\sin(\Omega^{+}t)\sin(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}\Omega^{+}}\sin\beta$$

$$\langle ae^{i\omega t} + a^{+}e^{-i\omega t} \rangle = 2\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|a|^{2})\frac{|a|^{2n+1}}{n!} \{\left[\cos(\Omega^{+}t)\cos(\Omega^{+}t) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{2}\frac{\sin(\Omega^{+}t)\sin(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}\Omega^{+}}\right]\right] \times$$

$$\cos\beta - \frac{\Delta}{2} \left[\frac{\sin(\Omega^{+}t)\cos(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}} - \frac{\cos\Omega^{+}t\sin(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}}\right]\sin\beta + 2g^{2}\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|a|^{2})\frac{|a|^{2n+1}}{n!}\frac{(n+1+k)!}{(n+1)!} \cdot$$

$$\frac{\sin(\Omega^{+}t)\sin(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}\Omega^{+}}\cos\beta$$

$$\langle a^{2}e^{2i\omega t} + a^{+2}e^{-2i\omega t} \rangle = 2\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|a|^{2})\frac{|a|^{2n+2}}{n!} \{\left[\cos(\Omega^{+}t)\cos(\Omega^{+}t) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{2}\frac{\sin(\Omega^{+}t)\sin(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}\Omega^{+}}\right] \times$$

$$\cos2\beta - \frac{\Delta}{2} \left[\frac{\sin(\Omega^{+}t)\cos(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}} - \frac{\cos(\Omega^{+}t)\sin(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}}\right]\sin2\beta + 2g^{2}\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|a|^{2})\frac{|a|^{2n+2}}{n!} \cdot$$

$$\frac{(n+2+k)!}{(n+2)!}\frac{\sin(\Omega^{+}t)\sin(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}\Omega^{+}}\cos2\beta$$

$$\langle a^{+}a \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|a|^{2})\frac{|a|^{2n}}{n!}(n(\cos^{2}\Omega^{+}t) + \left[\frac{\Delta}{2}\frac{\sin(\Omega^{+}t)}{\Omega^{+}}\right]^{2} + g^{2}\frac{(n+k)!}{n!}(n+k)(\frac{\sin\Omega^{+}t}{\Omega^{+}})^{2})$$

$$(10)$$

$$\Omega^{+} = \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{2} + g^{2} \frac{(n+k)!}{n!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Omega_{1}^{+} = \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{2} + g^{2} \frac{(n+k+1)!}{(n+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Omega_{2}^{+} = \left[\left(\frac{\Delta}{2}\right)^{2} + g^{2} \frac{(n+k+2)!}{(n+2)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

利用式(10)可计算 Q_1 , Q_2 随时间的演化. 由式 (8)和(10)可见当 $\beta \rightarrow (\pi/2) + \beta$, $Q_1 \rightarrow Q_2$, 因此 Q_1 和 Q_2 压缩情况相似. 为简单起见取 $\beta = 0$, 讨论 Q_1 随时 间的演化. 由式(10)可见, 取 $\beta = 0$ 时, 随场频率变化 的幅值 u 的增大, 失谐量 Δ 增大, $(\Delta/2)^2/(\Omega^+ \Omega_1^+)$ 和 $(\Delta/2)^2/(\Omega^+ \Omega_2^+)$ 也增大, 式(12)中 Q_1 第一项随 $(\Delta/2)^2/(\Omega^+ \Omega_2^+)$ 一次方增大, 而第三项随 $(\Delta/2)^2/(\Omega^+ \Omega_2^+)$



 $(\Omega^+ \Omega_1^+)$ 二次方增大,因此随 u 的增大, Q_1 将减小. 3.1 场频率变化的幅值 u 对压缩效应的影响

为了研究场频率变化幅值 u 的变化对压缩效应 的影响.通过数值计算,取 $k = 3, w = g_0, \omega_{01} =$ 1 000 g_0 ,光场平均光子数 $n_0 = 1.0, u$ 分别取 $0, g_0$, 10.0 g_0 ,20.0 g_0 ,40.0 g_0 ,80.0 g_0 时, Q_1 的演化曲 线见图 1.为了比较起见,各图均画了 $Q_1 = 0$ 的横 线.图 1(a)中 u = 0,表示场频率为常量且等于原子 本征跃迁频率的情况.从图 1 可见:当频率变化的幅 值 u较小时,场频率变化对场压缩效应影响很小.随 场频率变化的幅值 u的增大,场频率变化对压缩效 应的影响逐渐增强,压缩区域加大,压缩深度加深. 幅值 u大于一定值后,还出现两个压缩区域.表明随









图 1 $n_0 = 1.0, u$ 取不同值时 Q_1 随时间 g_0 t 的演化

Fig. 1 The evolution of the field Q_1 with different values of u where $n_0 = 1.0$ 场频率变化的幅值 u 的增大,压缩效应增强.图 1 (e),(f)还表明Q1的演化受场频率随时间正弦函数 形式变化的调制,场频率振荡的幅值 u 越大调制作 用越强,幅值 u 大于一定值后,Q 将按场频率周期 性的变化规律作准周期性演化,曲线峰值周期性出 现,其周期为 $t=\pi/w$.

3.2 场频率变化的角频率 w 对压缩效应的影响

为了研究场频率变化的角频率 w 的变化对压 缩效应的影响. 取 $k=3, \omega_0 = 1 000 g_0$, 光场平均光 子数 $n_0 = 1.0, u = 80.0 g_0, w$ 分别取 g_0 和 2 g_0 时, Q₁的演化曲线见图 2. 从图 2 可见:Q₁的演化受场频 率随时间正弦函数形式变化的调制.Q1的演化具有 一定的周期性,曲线峰值周期性出现,其周期为 t=



图 2 n₀=1.0,u=80.0 g₀,w取不同值时 Q₁随 时间 got 的演化



 π/w . 场频率变化的角频率 w 增大一倍, Q 准周期 性的演化频率也增大一倍.

3.3 光场强度对压缩效应的影响

为了研究光场强度的变化对压缩效应的影响. 取 $k=3, \omega_{01}=1$ 000 $g_0, u=80.0$ $g_0, w=1g_0,$ 光场 平均光子数 n_0 分别取 0.5,1,5,10 时, Q_1 的演化曲 线见图 3. 从图 3 可见: 随光场平均光子数 no 的逐渐 增大,压缩区域逐渐缩小,压缩深度逐渐变小.光场 平均光子数 n₀的值大于一定值后压缩效应消失.k $=3, \omega_{01}=1 \ 000 \ g_0, u=80.0 \ g_0, w=1g_0, n_0=20, u$ 分别取 0 和 40 g_0 时, Q_1 的演化曲线见图 4. 图 4 表 明对于强光场场频率随时间的变化对 Q₁的演化的 影响可忽略,光场不出现压缩效应.概括以上特点, 表明随光场平均光子数 n₀的增大,压缩效应减弱, 光场平均光子数 no 的值大于一定值后压缩效应消失.





图 3 $w=g_0$, $u=80.0g_0$, n_0 取不同值时 Q_1 随时间 g_0 t 的演化

Fig. 3 The evolution of the field Q_1 with different values of n_0 where $w = g_0$ and $u = 80.0g_0$



图 4 $n_0 = 20.0$, u 取不同值时 Q_1 随时间 g_0 t 的演化 Fig. 4 The evolution of the field Q_1 with different values of u where $n_0 = 20.0$

4 结论

本文在标准多光子 J-C 模型的基础上,在旋波 近似下,对标准 J-C 模型进行推广,考虑相互作用光 场频率随时间以正弦函数形式作小量变化的情形, 利用数值计算方法研究了二能级原子通过多光子跃 迁与单模辐射场相互作用系统中场的压缩效应.研 究结果表明:随场频率正弦函数形式变化的幅值增 大,场压缩效应增强;随光场平均光子数的增加,场 压缩效应减弱.表明增大频率变化的幅值和减小光 场平均光子数对产生光场的压缩效应有利.场正交 分量的均方涨落随时间的演化受场频率随时间正弦 函数形式变化的调制,场频率变化的幅值越大调制 作用越强.对于光场平均光子数较小的弱光场在场 频率变化的幅值大于一定值后,场正交分量的均方 涨落将按场频率周期性的变化规律作准周期性演 化,场频率变化的角频率增大一倍,场正交分量的均 方涨落准周期性演化频率也增大一倍.

参考文献

- [1] JAYNES E T , CUMMINGS F W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser[J]. Proc IEEE, 1963, 51:89-109.
- [2] ZHOU P, HU Z L, PENG J S. Effect of atomic coherence on the collapses and revivals in some generalized Jaynes-Cummings models[J]. J Mod Opt, 1992, 39(1): 39-62.

[3] GUO Hong, PENG Jin-sheng. The relations of atomic dipole squeezing and two mode radiation field squeezing in a generalizeded two mode Jaynes Cummings model [J]. Acta optica sinica, 1998, 18(2):135-140.
 郭红,彭金生. 双模 Jaynes-Cummings 模型中原子偶极压缩与

双模光场压缩间的关联[J].光学学报,1998,18(2):135-140.

- [4] ZHAN You-bang. Atomic dipole squeezing in off-resonance two-photon Jaynes-Cummings model [J]. Acta Physica Sinica, 1994,43(6):31.
 詹佑邦.非共振双光子 Jaynes-Cummings 模型中原子的偶极压 缩[J].物理学报,1994,43(6):31.
- [5] WANG Xiao-guang, YU Rong-jin, YU Hua. Antibunching effect in the time-dependent Jaynes-Cumming model [J]. Acta photonica sinica, 1998, 27(4): 304-308.
 王晓光,于荣金,于桦. 依赖于时间的 Jaynes-Cummings 模型中的反聚束效应[J]. 光子学报, 1998, 27(4): 304-308.
- [6] NIE Yi-you, LIU San-qiu, SHEN Shi-hua, et al. Atomic squeezing effects in a two-photon process under strong coherent field of initial state[J]. Acta photonica sinica, 1999, 28 (11): 1066-1070.

聂义有,刘三秋,申世华,等.强场作用下二能级原子双光子过 程中原子的压缩效应[J].光子学报,1999,28(11):1066-1070.

- [7] XU Jing-ping, YANG Ya-ping. The interactions between an atom and a field with a time-varying frequency [J]. Acta Physica Sinica, 2004, 53(7):2139-2144.
 许静平,羊亚平.场频率变化时原子与场的相互作用[J].物理 学报, 2004, 53(7):2139-2144.
- [8] LU Dao-ming. Evolution of field entropy with a time-varying

frequency in the multiphoton Jaynes-Gummings model[J]. *Acta photonica sinica*, 2007, **36**(11): 2142-2147.

卢道明.原子与频率随时间变化场相互作用系统中场熵的演化 [J].光子学报,2007,36(11):2142-2147.

Squeezing Effects of Field with a Time-Varying Frequency in the Multiphoton Jaynes-Cummings Model

LU Dao-Ming

(Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan, Fujian, 354300, China)

Abstract: Using the multiphoton Jaynes-Cummings model, the squeezing effect of the field in the system of a two-level atom interacting with the single mode coherent field through mutiphoton transition was studied. The frequency of the field varying with time in the form of sine was considered. The influences of amplitude and angular frequency of the field-frequency variation on squeezing effects of the field were discussed by numerical calculations. The influences of mean photon number of the field on squeezing effects of the field were also discussed. Calculation results indicate that the squeezing effects of field strengthens with the increase of the amplitude u of field-frequency variation and weaken with the increase of mean photon number of the field. The time-evolution behavior of quadrature squeezing function Q_1 is modulated by the field-frequency variation, and when the amplitude u of field-frequency variation is larger than a fixed value, the time-evolution of quadrature squeezing function Q_1 will display quasi-periodicity oscillation behavior. Its oscillation frequency agrees with the angular frequency of field-frequency variation. **Key words**: Two-level atom; Jaynes-Commings model; Field with time-varying frequency; Squeezing effect



LU Dao-ming was born in 1963 and received his M. S. degree in department of physics from Nanjing University in 1988. He is a professor of physics in Wuyi University. His main research focuses on quantum optics.