第 33 卷 第 5 期　昆明理工大学学报(理工版) http://www.kustjournal.com/　Vol. 33 No. 5
2008 年 10 月　Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology)　Oct. 2008

基于最小度约束下的最小生成树算法

孙小军[1],金　涛[2],焦森林[2]
(1. 宝鸡文理学院 数学系,陕西 宝鸡 721013; 2. 西安电子科技大学 理学院,陕西 西安 710071)

摘要:针对网络设计和组合优化中的度约束最小生成树问题,通过引入分裂图以及分裂数的概念,给出了网络 G 关于 v_0 的最小度支撑树的最小度等于分裂数的结论. 并在此基础上提出了一种关于 v_0 的最小度约束条件下的最小生成树算法,最后对算法的正确性给出了证明. 算例表明了算法的有效性.

关键词:度约束;最小生成树
中图分类号:TP393　**文献标识码**:A　**文章编号**:1007-855X(2008)05-0041-04

An Algorithm for Minimum Spanning Tree Problem Based on Minimum Degree Constraint

SUN Xiao-jun[1], JIN Tao[2], JIAO Sen-lin[2]
(1. Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji, Shannxi 721007, China;
2. School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: The concepts of divided graph and divided number are introduced to handle the degree-constrained minimum spanning tree problem in network design and optimization. It is concluded that the minimum degree of the minimum-degree constrained spanning tree about v_0 point in the network equal to divided number. Based on the above conclusion, a new algorithm for the minimum-degree constrained spanning tree about v_0 point is proposed. The correctness and effectiveness is proved through an example.

Key words: degree-constraint; minimum spanning tree

0 引 言

最小生成树(Minimum Spanning Tree,MST)问题是网络优化、运筹学、组合优化等领域中的一个重要的问题. 20 世纪 50 年代后期,Rosenstiehl,Prim 和 Kruskal 先后给出求解这一问题的算法以来,人们对这个问题的研究兴趣一直很浓厚,相关的理论也被应用到更多的领域[1,2]. 但由于研究领域的不同,在实际应用中对最小生成树问题就产生了各种各样的限制,如对生成树中各顶点的度数加以限制,即不得超过预先给定的数值,这使得问题的性质变得截然不同,这种带有顶点度约束的最小生成树问题正是下文要探讨的一类度约束最小生成树问题. 度约束最小生成树[3](Degree-Constrained Minimum Spanning Tree,DCMST)问题自 1980 年由 Narula 和 Ho 提出以来,一直都是相关领域研究的热点. 目前,关于这个问题的研究已有较多的成果[4~6].

本文首先通过引入一个图 $G(V,E)$ 关于它的某个顶点 v_0 的分裂图以及分裂数的概念,给出了网络 $G(V,E,W)$ 关于 v_0 的最小度支撑树的最小度就等于分裂数的结论;其次提出了一种求网络 $G(V,E,W)$ 关于 v_0 的最小度约束条件下的最小生成树的启发式算法.

收稿日期:2007-10-18. **基金项目**:陕西省自然科学基础研究计划项目(项目编号:2006A12);宝鸡文理学院院级科研项目(项目编号:Zk0693).

第一作者简介:孙小军(1978-),男,硕士,讲师. 主要研究方向:网络优化. **E-mail**:bwlsxj@163.com

1 相关的概念、定理[7~9]及问题的数学模型

规定:下文中涉及到的图均指简单的连通图，涉及到的网络均指简单的连通无向网络.

1.1 相关概念和定理

为方便起见,用 $G(V,E)$ 表示一个简单的连通图,简记为 G,其中 $V(G)$ 表示图的顶点集,简记为 V, $E(G)$ 表示图的边集,简记为 E;用 $G(V,E,W)$ 表示一个简单的连通无向网络,其中 W 表示权函数.

定义1 设 $G(V,E,W)$ 是连通的无向网络,v_0 是特别指定的一个顶点,k 为给定的一个正整数,如果 T 是 G 的一个支撑树且 $d_T(v_0)=k$,则称 T 为 G 的 k 度限制支撑树. 其中 G 中权最小的 k 度限制支撑树称为 G 的最小 k 度限制树.

定义2 设 $G(V,E,W)$ 是一个简单的连通无向网络,v_0 是图中指定的一个顶点,在这个网络的所有支撑树中找出使得 v_0 的度最小的那些支撑树,并且在所找的这些支撑树中权最小的那个支撑树就叫做网络 $G(V,E,W)$ 关于 v_0 的最小度约束条件下的最小生成树.

定义3 设 $G(V,E)$ 是一个简单的连通无向图,v_0 是图中指定的一个顶点,称 $G-v_0$ 为图 $G(V,E)$ 关于 v_0 的分裂图,简记为 $L_{v_0}(G)$,其中 $G-v_0$ 表示从图 $G(V,E)$ 中去掉 v_0 以及与 v_0 相关的边后所得到的新图.

定义4 设 $L_{v_0}(G)$ 是图 $G(V,E)$ 关于 v_0 的分裂图,不妨设 $L_{v_0}(G)$ 有 t 个连通分支,则称 t 为图 $G(V,E)$ 关于 v_0 的分裂数,用 $G_i(V_i,E_i)$,$i=1,2,\cdots,t$ 来表示分裂图 $L_{v_0}(G)$ 的 t 个连通分支.

定理1 设 N 表示图 $G(V,E)$ 的所有支撑树的集合,即 $N=\{T|\ T$ 是图 G 的支撑树$\}$,则 $\min\limits_{T\in N} d_T(v_0)=t$. 其中 $d_T(v_0)$ 表示顶点 v_0 在 T 中的度.

定理2 设 T 是 G 的 k 度限制支撑树,则 T 是 G 的最小 k 度限制树当且仅当下面3个条件同时成立:

(1) 对于 G 中任何两条与 v_0 关联的边,所产生的 T 的可行交换都是不可改进的,即 T 通过这类可行交换得到的新的 k 度支撑树 T' 满足 $W(T')\geq W(T)$;

(2) 对于 G 中任何两条不与 v_0 关联的边所产生的 T 的可行交换都是不可改进的;

(3) 对于 T 的任何两个可行交换$(+e_1,-f_1)$和$(+e_2,-f_2)$,若 e_1,f_2 与 v_0 关联,e_2,f_1 不与 v_0 关联,则有 $W(f_1)+W(f_2)\leq W(e_1)+W(e_2)$.

1.2 度约束最小生成树的数学模型

连通图 $G(V,E,W)$,其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是顶点的有限集合,E 是边的有限集合,$W=(w_{ij})_{n\times n}$ 表示权矩阵,且 $w_{ij}=w_{ji}, w_{ii}=+\infty$,并设各顶点的度约束为 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 DCMST 问题的数学模型为:

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}\leq b_i & (2)\\ \sum\limits_{i,j\in S} x_{ij}\leq |S|-1,\ \forall S\subset V, S\neq\phi & (3)\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=n-1 & (4)\\ x_{ij}\in\{0,1\},i,j\in V \end{cases}$$

这里,变量 $x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{边}(i,j)\text{在最优树中}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$,$|S|$ 为集合 S 中所含图 G 的顶点个数,约束(2)位度限制,约束(3)(4)保证了所得的是一棵生成树.

2 网络 $G(V,E,W)$ 关于 v_0 的最小度约束条件下的最小生成树算法及证明

2.1 算 法

Step0 求图 $G(V,E)$ 关于 v_0 的分裂图 $L_{v_0}(G)$,同时得到分裂数 t. 分裂图 $L_{v_0}(G)$ 的 t 个连通分支记为

$G_i(V_i,E_i)$, $i = 1,2,\cdots,t$. 令 $T = T(V,E)$,其中 V 是 G 的顶点集,$E = \phi$,置 $k = 1$.

Step1　若 $k \le t$,转 Step2;否则,停止,T 就是所求的网络 $G(V,E,W)$ 关于 v_0 的最小度约束条件下的最小生成树;

Step2　求 G_k 的最小树 T_k,在集合 $\{e \mid e = v_0 v_j, v_j \in V_k\}$ 中取权值最小的边记作 e_k. 令 $E = E \cup E(T_k) \cup \{e_k\}$, $T = T(V,E)$ 置 $k = k + 1$,转 Step1.

2.2 算法的证明

定理 3　算法中得到的 T 是网络 $G(V,E,W)$ 关于 v_0 的最小度约束条件下的最小生成树.

证明　由网络 $G(V,E,W)$ 是简单的连通无向网络的假设,该算法得到的 T 是一个使得 v_0 的度最小的支撑树.

定理 2 中的(1) 成立,因为任取 T 的一个可行交换$(+e, -f)$,其中 e,f 都与 v_0 关联,不妨设 $e = v_0 v_i$, $f = v_0 v_j$,则得到一个新的 k 度支撑树 $T' = T + e - f$,显然 $d_{T'}(v_0) = t$,因为$(+e, -f)$ 是可行交换,由 Step0 可知,一定存在某个正整数 k,其中 $1 \le k \le t$,使得 $v_i \in V_k$ 且 $v_j \in V_k$,由算法 Step2 中 e_k 的取法可知 $W(e) \ge W(f)$,即 $W(T') \ge W(T)$,所以可行交换$(+e, -f)$ 是不可改进的.

定理 2 中的(2) 成立. 因为任取 T 的一个可行交换$(+e, -f)$,其中 e,f 都不与 v_0 关联,得到一个新的 k 度支撑树 $T' = T + e - f$,显然 $d_{T'}(v_0) = t$,由 Step0 可知,一定存在某个正整数 k,其中 $1 \le k \le t$,使得 $e \in E(G_k)$ 且 $f \in E(G_k)$. 由算法 Step2 中 T_k 的取法可知 $W(e) \ge W(f)$,即 $W(T') \ge W(T)$,所以可行交换$(+e, -f)$ 是不可改进的.

定理 2 中的(3) 成立. 因为不存在这样的可行交换$(+e, -f)$,其中 e,f 一个与 v_0 关联而另一个不与 v_0 关联. 假设存在,不妨设 $T' = T + e - f$,则有 $d_{T'}(v_0) \ne t$,即 T' 不是 v_0 的最小度支撑树.

综上所述,该算法中得到的 T 就是网络 $G(V,E,W)$ 关于 v_0 的最小度约束条件下的最小生成树.

3 算 例

下面以一个含 9 个节点的简单连通无向网络 G 为例,求其关于 v_0 的最小度约束条件下的最小生成树,以说明新算法的执行过程:

Step0　求图 $G(V,E)$ 关于 v_0 的分裂图 $L_{v_0}(G)$,它有 2 个连通分支 G_1、G_2,同时可知分裂数 $t = 2$,令 $k = 1$,令 $T = (V,E)$ 其中 V 是 G 的顶点集,$E = \phi$,其中 G_1、G_2 如图 2,图 3 所示(此时 T 为空图).

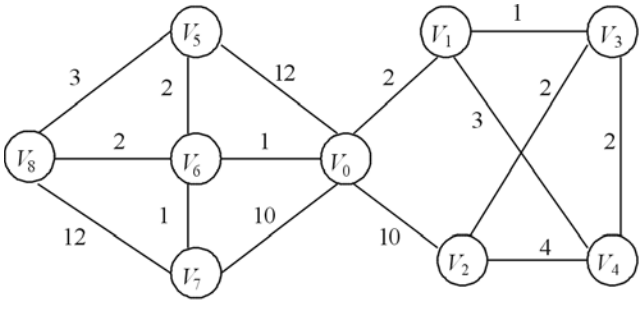

图1　网络拓扑
Fig.1　Network topology

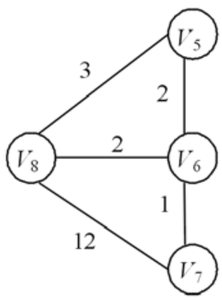

图2　连通分支 G_1
Fig.2　Connected branch G_1

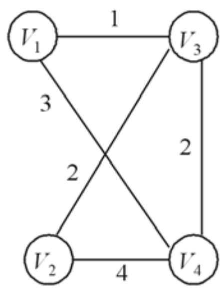

图3　连通分支 G_2
Fig.3　Connected branch G_2

Step1　此时 $k = 1$, $k \le t$,转 Step2.

Step2　求 G_1 的最小生成树 T_1,且求得 $e_1 = v_0 v_6$, $E = E \cup E(T_1) \cup \{e_1\}$, $T = (V,E)$.

令 $k = k + 1$,转 Step1.

Step1　此时 $k = 2$, $k \le t$,转 Step2.

Step2　求 G_2 的最小生成树 T_2,且求得 $e_2 = v_0 v_1$, $E = E \cup E(T_2) \cup \{e_2\}$, $T = (V,E)$. 令 $k = k + 1$,转 Step1(此时的 T 如图 5 所示).

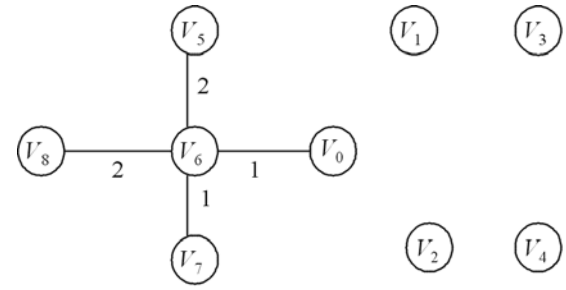

图4 G_1的最小生成树T_1
Fig.4 Minimum spanning tree of network G_1

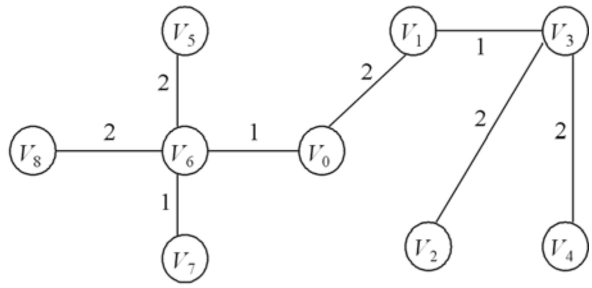

图5 G的最小生成树
Fig.5 Minimum spanning tree of network G

Step1 此时 $k = 3, k > t$,停止,T 就是所求的网络 $G(V,E,W)$ 关于 v_0 的最小度约束条件下的最小生成树,其中 $d_T(v_0) = 2, W(T) = 13$.

4 结 语

度约束最小生成树问题是一个 NP - hard 问题,求解的复杂度与度约束及图的连接状态有关. 本文给出的网络 $G(V,E,W)$ 关于 v_0 的最小度约束条件下的最小生成树算法是颇为有效的启发式算法,利用它能改进 k - 度限制最小树的算法,文中的算例也充分表明了此算法在求解度约束最小树问题中的有效性.

参考文献:

[1] WANG Guang - rong, GU Nai - jie. An Efficient Parallel Minimum Spanning Tree Algorithm on Message Passing Parallel Machine[J]. Journal of software, 2000, 11(7): 889 - 898.
[2] 孙小军,刘三阳,焦建民. 基于最小树权矩阵法的改进算法[J]. 计算机工程与设计,2005,26 (12):3274 - 3275.
[3] NARULA S C, HO C A. Degree - constrained minimum spanning tree[J]. Computers and Operations Research, 1980, 7(4): 239 - 249.
[4] 宁爱兵,马良. 度约束最小生成树(DCMST)的竞争决策算法[J]. 系统工程学报,2005, 20(6):630 - 634.
[5] 廖飞雄,马良. 求解度约束最小生成树的一种启发式算法[J]. 上海理工大学学报,2007,29(2):142 - 144.
[6] 赵玲,刘三阳. 基于蚂蚁搜索度约束最小生成树的改进算法[J]. 计算机仿真,2006,23(10):164 - 167.
[7] 谢政,李建平. 网络算法与复杂度理论[M]. 北京:国防科技大学出版社,1995:31 - 41.
[8] 谢金星,邢文训. 网络优化[M]. 北京:清华大学出版社,2000:58 - 66.
[9] DOUGLAS B, WWEST. Introduction to Grapf Theory(图论导引)[M]. 李建中,骆吉洲,译. 北京:机械工业出版社,2006:63 - 67.