

## 一种基于 QCE-PEG 的 LDPC 码构造方法

张桂华<sup>①②</sup> 姬红兵<sup>①</sup> 欧阳成<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(西安电子科技大学工程学院 西安 710071)

<sup>②</sup>(中国电子科技集团公司第五十四研究所 石家庄 050081)

**摘要:** 为提高 LDPC 码的实用性, 该文提出了一种 QCE-PEG 校验矩阵构造方法, 给出了实现具体步骤和设计实例。该算法将构造过程分解, 结合准循环扩展技术和渐进边增长构造方法的优点, 既能满足度分布对的需要, 又保证了平均围长尽可能大的要求, 提高了 LDPC 编码的速度和性能。仿真结果表明: 用该方法设计的中短长度非正则 LDPC 码, 其性能优于渐进边增长方法构造的 PEG 码, 且设计简单, 编码快速, 便于工程实现, 具有良好的应用前景。

**关键词:** 编码; LDPC 码; 准循环扩展技术; 渐进边增长构造

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)08-1957-04

## A QCE-PEG-Based Algorithm for LDPC Codes Construction

Zhang Gui-hua<sup>①②</sup> Ji Hong-bing<sup>①</sup> Ouyang Cheng<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

<sup>②</sup>(The 54th Research Institute of CETC, Shijiazhuang 050081, China)

**Abstract:** To enable the practicability of the low density parity check codes, a QCE-PEG algorithm is presented, followed by the description of the implementation approach and a design case in detail. The algorithm divides the construction into two processes, combining the Quasi-Cyclic Extension (QCE) method and Progressive Edge-Growth (PEG) technique. It has several advantages such as good degree distribution, long average girth, rapid encoding process and good performance. Simulation result shows that the constructed irregular LDPC codes have good performance, simple and practicable, thus creating good conditions for its wider application.

**Key words:** Codes; LDPC codes; Quasi-Cyclic Extension (QCE); Progressive Edge-Growth (PEG)

### 1 引言

LDPC (Low Density Parity Check) 码和 Turbo 码均具有优秀的性能, 应用越来越广泛<sup>[1,2]</sup>。在码长足够大时, 好的非正则 LDPC 码的性能与香农极限接近, 远远超过同等码率下的正则码<sup>[3]</sup>。然而, 在实际系统中, 码长无法做到无限大, 因此, 如何设计编码简单, 性能优良的有限长非正则 LDPC 码是一个非常值得研究的问题。

目前, LDPC 码的构造算法主要可以分为代数或半代数法<sup>[4,5]</sup>和随机法<sup>[6,7]</sup>两大类。其中, 基于准循环扩展 QCE (Quasi-Cyclic Extension) 技术设计的非规则 RA (Irregular Repeat-Accumulate, IRA) 码, 由于设计简单, 编码快速等优势已被列入到 IEEE802.16e 标准中<sup>[8]</sup>, 然而对 LDPC 校验矩阵的限制会导致误码性能的下降; 而基于 PEG (Progressive Edge-Growth) 构造的 LDPC 码, 性能

优越, 参数选择灵活, 但设计较为复杂, 不便于工程实现。

本文结合上述两种方法的优点, 提出了一种基于 QCE-PEG 的 LDPC 码构造方法。仿真结果表明, 用该方法设计的中短长度的非正则 LDPC 码, 其性能优于 PEG 码, 且具有设计简单, 编码快速等优点, 易于工程实现。

### 2 QCE-PEG 算法

影响 LDPC 码的性能参数归根结底是码的最小汉明距离, 但 LDPC 码最小汉明距离的计算难度很大, 一般采用围长和度分布等来设计并估计 LDPC 码的性能。

围长是 Tanner 图中最短圈的圈长, 一般影响中短长度的 LDPC 码性能, 对于长码而言, 度分布是影响非正则 LDPC 码性能的主要因素之一。例如, 根据优化度精心设计的码长为  $10^6$  的非正则 LDPC 码要比同等长度的 (3, 6) 正则 LDPC 码多出 0.8 dB 左右的性能增益<sup>[9]</sup>。而对于中短码长的 LDPC 码

( $N=500\sim 10000$ ), 也有一定的影响( $<0.2\sim 0.3$  dB)。因此在设计时, 不仅要考虑度分布, 还要考虑围长及围长分布的影响。

由于度数小的变量节点(尤其是度为 2 的变量节点)对于 LDPC 码在低信噪比下的性能影响较大, 且由小度数变量节点组成的圈在迭代译码中与外界进行信息交换的能力较弱, 产生不可检测错误的概率较大, 设计时应使度数小的变量节点构成的圈尽可能大。因此, 在设计 LDPC 码的校验矩阵时, 本文提出一种 QCE-PEG 构造方法, 根据变量节点的度数分两种情况进行, 具体描述如下。

**情况 1** 对于度为 2 和 3 的变量节点, 由于该类变量节点通常占全部变量节点的 80%左右, 在设计校验矩阵时应重点保护, 本文采用 QCE 法, 可以方便地设计其围长。

**情况 2** 对于度数大于 3 的变量节点, 由于该类变量节点的度分布比较零散, 且所占比例较小, 采用 PEG 法依次添加到扩展以后的校验矩阵中, 从而既能严格满足优化度分布对的要求, 又能使其平均围长尽可能大。

综上, 利用 QCE-PEG 算法构造  $M\times N$  阶校验矩阵的步骤如下。

**步骤 1** 根据度分布多项式计算度为 2 和 3 的变量节点的个数, 分别记为  $N_2$  和  $N_3$ ;

**步骤 2** 构造一个  $M'$  行,  $N'_2 + N'_3$  列的基矩阵  $H'$ , 其中,  $M' = M/n$ ,  $N'_2 = \lfloor N_2/n \rfloor$ ,  $N'_3 = \lfloor N_3/n \rfloor$ ,  $\lfloor \cdot \rfloor$  代表取整运算,  $n$  为一正整数, 称为扩展因子;

**步骤 3** 将基矩阵中的每一条边重复  $n$  次, 从而得到扩展后的矩阵;

**步骤 4** 用 PEG 法将剩下的变量节点依次添加到扩展后的矩阵中, 从而完成最终校验矩阵的构造。

### 3 基矩阵构造

QCE-PEG 算法首先采用 QCE 法构造度为 2 和 3 的变量节点, 然后将剩余变量节点通过 PEG 法依次添加到扩展以后的校验矩阵中。因此, 该算法的关键在于基矩阵的构造, 下面从构造模型和偏移量的设置两方面进行阐述。

#### 3.1 构造模型

首先将基矩阵写成  $H' = [H'_3 | H'_2]$  的形式, 其中

$$H'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

基矩阵中的数字称为偏移量, 它代表扩展时单位阵循环右移的次数,  $-1$  代表零矩阵,  $0$  代表单位阵。 $H'_2$  扩展后对应的 Tanner 图如图 1 所示, 可看成由  $n$  个圈首尾相连组成的罗圈环,  $n$  为扩展因子。由于  $H'_2$  中的第 1 列的第 1 个元素为 0, 最后一个元素为  $-1$ , 因此, 扩展后对应的 Tanner 图就有  $n$  个度为 2 的变量节点的两条边分别连接到本层和下一层的校验节点上。 $V_i = (v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^n)$  代表某一组待扩展的度为 3 的变量节点,  $i \leq N'_3$ 。

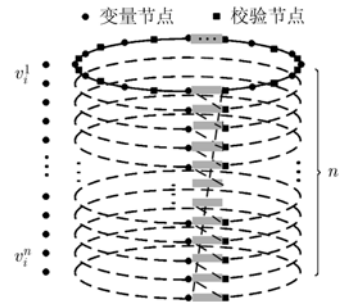


图 1 基矩阵构造模型

基于上述模型, 即可在添加度为 3 的变量节点时方便地对其围长进行控制, 例如当  $V_i$  连接到的 3 条边  $(e_i^1, e_i^2, e_i^3)$  上设置的 3 个偏移量  $(f(e_i^1), f(e_i^2), f(e_i^3)) = (0, 4, 8)$  时,  $v_i^1$  的 3 条边将分别连接到第 1, 第 5 和第 9 层的校验节点上。而通过准循环移位扩展后,  $v_i^m$  的 3 条边将分别连接到  $\text{mod}((m+0, m+4, m+8), n)$  层的校验节点上, 其中  $n$  是扩展因子,  $m = 1, 2, \dots, n$ 。

在上述构造过程中, 偏移量的设置将直接影响所设计的 LDPC 的性能。若偏移量设置不当, 很可能导致低重码字<sup>[3]</sup>的形成。

例如, 当  $n = 12$  时, 对于两组度为 3 的变量节点  $V_1 = (v_1^1, v_1^2, \dots, v_1^{12})$  和  $V_2 = (v_2^1, v_2^2, \dots, v_2^{12})$ , 若其偏移量设置为  $(f(e_1^1), f(e_1^2), f(e_1^3)) = (0, 4, 8)$  和  $(f(e_2^1), f(e_2^2), f(e_2^3)) = (1, 5, 9)$ , 则通过 QCE 方法扩展后,  $v_1^1$  的 3 条边和  $v_2^4$  的 3 条边将分别连接到同一层的校验节点上, 如图 2 所示, 从而导致了低重码字的形成。因此, 需要进一步分析偏移量的设置问题。

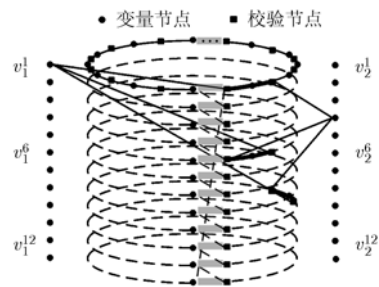


图 2 低重码字的形成

### 3.2 偏移量的设置

为了避免低重码字的形成,并使得由度为 2 和 3 的变量节点组成的圈尽可能大,则需要在设置偏移量时加上如下两个限制条件。

条件 1 对于某一组变量节点  $V_i$ , 若

$$(f_{i,m_1}^1, f_{i,m_2}^2, f_{i,m_3}^3) = \text{mod}((f(e_i^1) + m, f(e_i^2) + m, f(e_i^3) + m), n) \quad (2)$$

则当  $m_1 \neq m_2$  时, 有

$$|f_{i,m_1}^\alpha - f_{i,m_2}^\beta| + |f_{i,m_1}^\gamma - f_{i,m_2}^\eta| \geq d \quad (3)$$

条件 2 对于任意两组变量节点  $V_i$  和  $V_j$ , 有

$$|f_{i,m}^\alpha - f(e_j^\beta)| + |f_{i,m}^\gamma - f(e_j^\eta)| \geq d \quad (4)$$

在上述两个条件中,  $\alpha, \beta, \gamma, \eta$  均从 (1, 2, 3) 中任意取值,  $m = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $n$  为扩展因子,  $d$  为差分因子, 表示任意两条边连接到的校验节点所在的层之间的差值, 其取值是和码长以及度为 3 的变量节点个数有关的, 不可能取的太大。

条件 1 保证了由同一组度为 3 和度为 2 的变量节点组成的圈尽可能大且分布均匀, 条件 2 保证了由不同组度为 3 和度为 2 的变量节点组成的圈尽可能大且分布均匀。为了使得偏移量满足上述两个限制条件, 本文设计了一种简单而有效的递推方法, 具体步骤如下:

步骤 1 初始化, 令  $f(e_1^1) = 0$ ,  $f(e_1^2) = d$ ,  $\varphi(e_1) = 2d$ ,  $f(e_1^3) = 3d$ ,  $i=2$ ,  $k=1$ , 其中  $\varphi(e_i)$  表示第  $i$  个变量节点上的第 2 和第 3 个偏移量之差;

步骤 2 判断  $i \leq N'_3$  是否成立, 若成立则进入下一步, 否则跳出循环;

步骤 3 判断  $k \leq i-1$  是否成立, 若成立则进入下一步, 否则令:  $f(e_i^2) = \varphi(e_{i-1}) + d$ ,  $\varphi(e_i) = f(e_i^2) + d$ ,  $f(e_i^3) = f(e_i^2) + \varphi(e_i)$ ,  $f(e_i^1) = 0$ ;  $i=i+1$ , 返回步骤 2;

步骤 4 判断  $\varphi(e_{i-1}) + d = f(e_k^3)$  是否成立, 若成立则进入下一步, 否则: 令  $k=k+1$ , 返回步骤 3;

步骤 5 令  $f(e_i^2) = \varphi(e_{i-1}) + 2d$ ,  $\varphi(e_i) = f(e_i^2) + d$ ,  $f(e_i^3) = f(e_i^2) + \varphi(e_i)$ ,  $f(e_i^1) = 0$ ,  $i=i+1$ , 返回步骤 2。

需要注意的是, 差分因子  $d$  的选取应使得基矩阵中第  $N'_3$  个度为 3 变量节点的第 3 条边上的偏移量  $f(e_{N'_3}^3)$  与扩展因子  $n$  之间满足如下关系:

$$f(e_{N'_3}^3) \leq (n-d)/2 \quad (5)$$

从迭代过程可以看出, 对于任意一组度为 3 的变量节点  $V_i$ ,  $i \leq N'_3$ ,  $\exists k_2, k_3$  使得  $f_{i,k_2}^2 = f_{i,k_3}^3 = 0$ ; 在区间  $[0, k_3-1]$ ,  $[k_3, k_2-1]$ ,  $[k_2, n-1]$  中,  $f_{i,m}^1$ ,  $f_{i,m}^2$ ,  $f_{i,m}^3$  均为  $m$  的单调增函数; 且对应于 3 个区间分别

有,  $f_{i,m}^1 < f_{i,m}^2 < f_{i,m}^3$ ,  $f_{i,m}^3 < f_{i,m}^1 < f_{i,m}^2$ ,  $f_{i,m}^2 < f_{i,m}^3 < f_{i,m}^1$ ; 因此对于  $\forall m_1, \exists m_3 \neq m_2 \neq m_1$  使得  $f_{i,m_1}^1 = f_{i,m_2}^2 = f_{i,m_3}^3$  成立; 又有:

$$\text{mod}((f_{i,m}^2 - f_{i,m}^1), n) = pd \quad (6)$$

$$\text{mod}((f_{i,m}^3 - f_{i,m}^2), n) = (p+1)d \quad (7)$$

$$\text{mod}((f_{i,m}^3 - f_{i,m}^1), n) = (2p+1)d \quad (8)$$

其中  $p$  为一正整数, 所以  $f_{i,m_1}^2$ ,  $f_{i,m_1}^3$ ,  $f_{i,m_2}^1$ ,  $f_{i,m_2}^3$ ,  $f_{i,m_3}^1$ ,  $f_{i,m_3}^2$  之间两两相差至少为  $d$ , 即条件 1 满足。

对于任意两组度为 3 的变量节点  $V_i$  和  $V_j$ , 设  $i < j$ , 将  $f(e_i^1)$ ,  $f(e_j^2)$  和  $f(e_j^3)$  的值固定, 通过改变  $m$  使  $f_{i,m}^1$ ,  $f_{i,m}^2$  和  $f_{i,m}^3$  在  $[0, n-1]$  间变化,  $\exists m > 0$  使得  $f_{i,m}^\alpha = f(e_j^\beta)$  成立,  $\alpha, \beta \in (1, 2, 3)$ ; 同时:

$$\text{mod}((f_{j,m}^2 - f_{j,m}^1), n) = qd \quad (9)$$

$$\text{mod}((f_{j,m}^3 - f_{j,m}^2), n) = (q+1)d \quad (10)$$

$$\text{mod}((f_{j,m}^3 - f_{j,m}^1), n) = (2q+1)d \quad (11)$$

其中  $q$  为一正整数,  $q \geq (p+2)d$  且  $q \neq (2p+1)d$ 。

因此  $f_{i,m}^1$ ,  $f_{i,m}^2$ ,  $f_{i,m}^3$ ,  $f(e_j^1)$ ,  $f(e_j^2)$ ,  $f(e_j^3)$  中除去  $f_{i,m}^\alpha$  和  $f(e_j^\beta)$  的其他 4 个数之间两两相差至少为  $d$ ; 同理  $i > j$  的情况是一样的, 即条件 2 满足; 所以用上述方法得到的偏移量能够同时满足两个限制条件。

用上述方法构造的基矩阵通过 QCE 法扩展可以使得由度为 2 和 3 的变量节点组成的圈尽可能大且分布均匀, 从而达到对其重点保护的的目的。在此基础上, 再用 PEG 法将剩下的变量节点添加到扩展后的检验矩阵中, 从而使最终的 LDPC 码在平均围长尽可能大的同时满足优化度分布对的要求。

## 4 仿真实验与分析

仿真信道为 AWGN 信道, 采用标准和积译码算法, 最大迭代次数为 100。1/2 码率下 PEG 码和 QCE-PEG 码的码长均为 2304, 度分布多项式均为  $\lambda(x) = 0.2449x + 0.2449x^2 + 0.0510x^4 + 0.4592x^{14}$ ,  $\rho(x) = 0.8163x^7 + 0.1837x^8$ , 其中度为 2 的变量节点有 1152 个, 度为 3 的变量节点有 768 个。首先选择扩展因子  $n = 96$ , 构造一个  $(M', N') = (12, 20)$  的基矩阵, 其中有 12 列度为 2 的变量节点和 8 列度为 3 的变量节点, 选择差分因子  $d = 1$ , 设计出的基矩阵如表 1 所示。

通过 QCE 技术将表 1 所示基矩阵进行扩展, 再将剩下的变量节点用 PEG 算法添加到扩展后的矩阵中即可得到最终的校验矩阵。3 种码之间的性能对比图如图 3 所示 ( $N = 2304$ ,  $K = 1152$ )。

从图 3 可以看出, QCE-PEG 码和 PEG 码的性能均好于 IEEE802.16e 标准中的 IRA 码, 约有 0.2

表1 用QCE-PEG法构造的1/2码率下的基矩阵

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3	-1	-1	18	-1	-1	-1	19	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	9	-1	-1	-1	-1	16	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3	-1	-1	13	-1	23	14	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
5	0	-1	-1	0	-1	-1	-1	39	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
6	-1	0	-1	-1	-1	-1	33	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
7	-1	-1	0	-1	0	29	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1
8	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1	-1
9	1	-1	-1	8	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1	-1
10	-1	4	-1	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	-1
11	-1	-1	6	-1	11	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0
12	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0

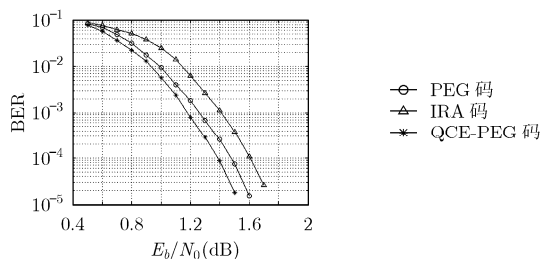


图3 1/2码率下的BER性能曲线图

dB 左右的性能提高。QCE-PEG 码与 PEG 码相比，前者不仅在性能上优于后者，其设计也更为简单，编码复杂度则与 IEEE802.16e 标准中的 IRA 码相当，各项指标均优于普通的 PEG 码。

## 5 结束语

本文结合 QCE 和 PEG 算法的特点，提出了一种基于 QCE-PEG 的 LDPC 码构造方法。该方法设计的校验矩阵，围长较大且分布均匀，同时能够满足优化度分布的要求。实验表明，中短长度的 QCE-PEG 码，其性能不仅优于 PEG 码，且其设计简单，编码快速，有着良好的应用前景。

## 参考文献

- [1] 张桂华, 桑会平, 姬红兵. 基于 FPGA 的 Turbo 码译码算法实现 [J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(8): 1584-1587.  
Zhang Gui-hua, Sang Hui-ping, and Ji Hong-bing. Implementation of Turbo codes decoding algorithm on FPGA. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(8): 1584-1587.
- [2] 张桂华, 张善旭, 李颖. 高吞吐量低存储量的 LDPC 码译码器 FPGA 实现 [J]. 西安电子科技大学学报, 2008, 35(3): 427-432.  
Zhang Gui-hua, Zhang Shan-xu, and Li Ying. FPGA implementation of a high-throughput memory-efficient LDPC decoder. *Journal of Xidian University*, 2008, 35(3): 427-432.

- [3] Chung Sae-Young, Forney G D, Richardson T J, and Urbanke R. On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit [J]. *IEEE Communications Letters*, 2001, 5(2): 58-60.
- [4] Zhang Yi-fei and Ryan W E. Structured IRA codes: Performance analysis and construction [J]. *IEEE Trans. on Communications*, 2007, 55(5): 837-844.
- [5] Chen Jing-hu, Tanner R M, Zhang Jun tan, and Fossorier M P C. Construction of irregular LDPC codes by quasi-cyclic extension [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2007, 53(4): 1479-1483.
- [6] Hu Xiao-yu, Eleftheriou E, and Arnold D M. Regular and irregular progressive edge-growth Tanner graphs [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2005, 51(1): 386-398.
- [7] Campello J and Modha D S. Extended bit-filling and LDPC code design [C]. Proc. IEEE Globecom, San Antonio, TX, Nov. 2001: 985-989.
- [8] IEEE Standard 802.16 Working Group. IEEE Standard for Local and Metro Politan Area Networks — Part16: Air Interface for Fixed and Mobile Broadband Wireless Access Systems Amendment2: Physical and Medium Access Control Layers for Combined Fixed and Mobile Operation in Licensed Bands and Corrigendum 1. 2006, Piscataway, NJ: IEEE Press.
- [9] Yue Guo-sen, Lu Ben, and Wang Xiao-dong. Analysis and design of finite-length LDPC codes [J]. *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 2007, 56(3): 1321-1332.

- 张桂华: 男, 1973 年生, 博士生, 高级工程师, 研究方向为航天测控、信号与信息处理。  
姬红兵: 男, 1963 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为微弱信号检测、模式识别。  
欧阳成: 男, 1985 年生, 硕士生, 研究方向为微弱信号检测、信道编码。