# 第二章
# 纳什均衡与一致预期

张维迎 教授
北京大学光华管理学院

## 博弈的基本概念（1）

- 参与人（players)：博弈中决策主体的集合：什么人参与博弈？每个人是什么角色？
- 行动（actions): 每个人有些什么样行动可以选择？在什么时候行动？
- 信息(information)：在博弈中的知识；每个人知道些什么（包括特征、行动等）？
- 战略（strategies)：行动计划；每个人有什么战略可供选择？战略的完备性；

## 博弈的基本概念（2）

- 支付（payoffs)：每个人在不同战略组合下得到些什么？依赖于所有参与人的选择；
- 均衡（equilibrium)：所有参与人最优战略的组合；
- 结果（outcomes)：我们所感兴趣的东西。

## 静态博弈

- 最简单的博弈：所有参与人同时选择行动，并且只选择一次；
- "同时"是一个信息概念，而不一定与日历上的时间一致；

## 囚徒困境（prisoners' dilemma)

- 囚徒困境

| | 坦白 | 不坦白 |
|---|---|---|
| 坦白 | −8，−8 | 0，−10 |
| 不坦白 | −10，0 | −1，−1 |

无论对方如何选择，每个人的最优选择：坦白。
所以，我们可以预测，结果将是（坦白，坦白）

## 占优均衡
### (dominant-strategy equilibrium)

- 一般来说，由于每个参与人的效用依赖于所有人的选择，因此每个人的最优选择（战略）也依赖于所有其他人的选择（战略）。但在上述例子中，一个人的最优选择并不依赖于他人的选择。这样的最优战略，被称为"占优战略"(dominant strategy)。由所有参与人的占优战略构成的战略组合被称为"占优均衡"。
- 占优战略均衡的出现只要求所有人都是理性的，但不要求每个参与人知道其他参与人是否理性。
- 囚徒困境博弈有占优均衡，所以其结果很容易预测。

# 个人理性与集体理性的冲突

- “囚徒困境”表明个人理性与集体理性的冲突。
- 这样的例子很多：寡头竞争，军备竞赛，团队生产中的劳动供给，公共产品的供给，等等；
- 许多的制度就是为解决“囚徒困境”而存在的；

# 公共产品（public goods)

| | 提供 | 不提供 |
|---|---|---|
| 提供 | 4，4 | -1，5 |
| 不提供 | 5，-1 | 0，0 |

无论对方如何选择，每个人的最优选择：不提供。
所以，我们可以预测，结果将是（不提供，不提供）

# 公共产品与税收制度

- 比较私人产品与公共产品的不同：使用上排他性；
- 私人产品是志愿购买的，但公共产品可能需要强制购买；
- 税收制度就是保证公共产品的生产，解决公共产品生产上的“囚徒困境”

# “囚徒困境”的一般表示

| | 合作 | 不合作 |
|---|---|---|
| 合作 | T，T | S，R |
| 不合作 | R，S | P，P |

满足：R>T>P>S; (S+R)<T+T

# 用法律解决“囚徒困境”

| | 合作 | 不合作 |
|---|---|---|
| 合作 | T，T | S，R-*X* |
| 不合作 | R-*X*，S | P，P |

满足：X>R-T

# “智猪博弈”(boxed pigs)

- 有些博弈没有占优均衡，但通过剔除“坏”战略，我们可以预测博弈的结果。如“智猪博弈”

| | 按 | 等待 |
|---|---|---|
| 按 | 3，1 | <u>2</u>，<u>4</u> |
| 等待 | <u>7</u>，－1 | 0，<u>0</u> |

这个博弈中，大猪的最优选择依赖于小猪的选择，但小猪的最优选择与大猪的选择无关。如果大猪知道小猪的理性的，大猪将选择“按”。均衡是“大猪按，小猪等待”。
“劣”战略：无论对方选择什么，如果自己选择A得到的总是收益小于选择B得到的收益，A就是相对于B的劣战略。

# 重复剔除占优均衡

- "重复剔除严格劣战略"(iterated elimination of strictly dominated strategy)的思路：首先找出博弈参与人的劣战略(dominated strategy)（假定存在的话），把这个劣战略剔除后，剩下的是一个不包含已剔除劣战略的新的博弈；然后在剔除这个新的博弈中的劣战略；继续这个过程，直到没有劣战略存在。如果剩下的战略组合是唯一的，这个唯一的战略组合就是"重复剔除占优均衡"(iterated dominance equilibrium)。
- 如果这样的解存在，我们说该博弈是"重复剔除占优可解的"(iterated dominance solvable).

# 理性共识（common knowledge of rationality)

- (1)Zero-order CKR: 每个人都是理性的，但不知道其他人是否是理性的；
- (2)First-order CKR: 每个人是理性的，并且知道其他每个人也都是理性的，但并不知道其他人是否知道自己是理性的；
- (3)Second-order CKR: (1)+(2)+每个人知道（2）
- Nth-order CKR: R(b)C(b)R(b)……C(b)R is rational,

# 重复剔除与理性共识

- 重复剔除不仅要求每个人是理性的，而且要求每个人知道其他人是理性的，每个人知道每个人知道每个人是理性的，如此等等，即理性是"共同知识"（共识）

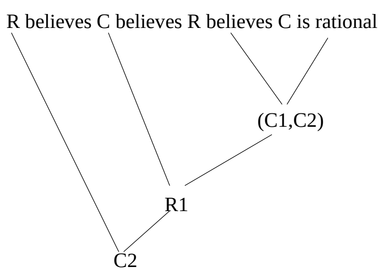
| | C1 | C2 | C3 |
|---|---|---|---|
| R1 | 10,4 | 1, 5 | 98,4 |
| R2 | 9, 9 | 0, 3 | 99,8 |
| R3 | 1,98 | 0,100 | 100,98 |

这个博弈只要求一阶理性共识就可以预测均衡结果。
如果把（下－左）的第一个数字改为11呢？

# 最优选择

- 这个博弈只要求一阶理性共识就可以预测均衡结果：
- 如果R相信C是理性的，R就知道C不会选择C3，所以R的最优选择是R1；
- 如果C相信R是理性的，C就知道R不会选择R2，所以C的最优选择是C2。
- 但要C预期R不会选择R3，需要二阶理性共识；要R不预期C会选择C1，需要三阶理性共识。

# R排除C选择C1




# 好事变坏事？

- 在单人决策中，个人给定选择在所有情况下的收益都增加，一个人的状况不会变得更坏，但博弈中则不同。

| | 左 | 右 |
|---|---|---|
| 上 | -1, 3 | 2, 1 |
| 下 | 0, 2 | 3, 4 |

| | 左 | 右 |
|---|---|---|
| 上 | 1, 3 | 4, 1 |
| 下 | 0, 2 | 3, 4 |

## 选择越多，对理性共识的要求越高

| | C1 | C2 | C3 | C4 |
|---|---|---|---|---|
| R1 | 5，10 | 0，11 | 1，20 | 10，10 |
| R2 | 4，0 | 1，1 | 2，0 | 20，0 |
| R3 | 3，2 | 0，4 | 4，3 | 50，1 |
| R4 | 2，93 | 0，92 | 0，91 | 100，90 |

(1)Zero-order CKR: C not choose C4 for C is rational
(2)1st-order CKR: R not choose R4 for R (b) C
(3)2nd-order CKR: C not choose C1 for C(b)R(b)C
(4)3rd-order CKR: R not choose R1 for R(b)C(b)R(b)C
(5)4th-order CKR: C not choose C3 for C(b) R(b)C(b)R(b)C
(6)5th-order CKR: R not choose R3 for R(b) C(b) R(b)C(b)R(b)C
so, (R2,C2) is an equilibrium

## 不能用重复剔除解的博弈

- 许多博弈没有占优均衡，也没有重复剔除的占优均衡。考虑如下博弈：

| | C1 | C2 | C3 |
|---|---|---|---|
| R1 | 0，4 | 4，0 | 5，3 |
| R2 | 4，0 | 0，4 | 5，3 |
| R3 | 3，5 | 3，5 | 6，6 |

## 可理性化的选择

- Rationalizable strategy: 不能被重复剔除的战略；或者说，可以被合理的信念(belief)所支持的行为；
- 例如：R理性化选择R1：
  - 如果R(b)C 选择C2，
  - 如果R（b）C（b）R会选择R2；
  - 如果R（b）C（b）R（b）C会选择C1；
  - 如果R（b）C（b）R（b）C（b）R会选择R1

## Consistently aligned beliefs (CAB)

- 考虑（R3，C3）：对方不会犯预期错误：R选择R3，如果他认为C会选择C3；C会选择C3，如果他认为R会选择R3。
- CAB：每个人对别人行为的预期（信念）是正确的；
- Harsanyi doctrine: 如果两个理性的人具有相同的信息，他们一定会得出相同的推断和相同的结论；
- Robert Aumann: rational agents cannot agree to disagree.

## 纳什均衡与一致预期

- 纳什均衡：所有参与人的最优战略的组合：给定该战略中别人的选择，没有人有积极性改变自己的选择。
- 一致预期：基于信念的选择是合理的；支持选择的信念是正确的；
- 预期的自我实现：如何所有人认为这个结果会出现，这个结果就会出现。预期是自我实现的，预期不会错误。如果你认为我预期你将选择X，你就真的会选择X。

# 哲学思考

- 如果参与人事前达成一个协议，在不存在外部强制的情况下，每个人都有积极性遵守这个协议，这个协议就是纳什均衡。

# 寻找纳什均衡

| | C1 | C2 | C3 |
|---|---|---|---|
| R1 | 100，100 | 0，0 | 50，101 |
| R2 | 50，0 | 1，1 | 60，0 |
| R3 | 0，300 | 0，0 | 200，200 |

# 纳什均衡：举例

- 广告博弈

企业2

企业1

| 战略 | 做广告 | 不做广告 |
|---|---|---|
| 做广告 | 4，4 | 15，1 |
| 不做广告 | 1，15 | 10，10 |

- 纳什均衡：（做广告，做广告）

# 利用纳什均衡寻租

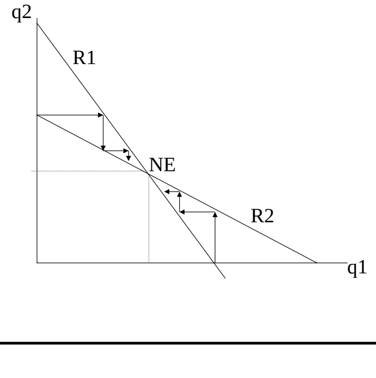
- 考虑股票市场融资的例子：设想企业价值是100，现在发行的流通股为100股，每股价值1元。现在假定经理想筹集100元，投资价值只有50元。有人买新股吗？
- 假定每一股配4股，价格为0.25元。如果股东不接受配股：原来一股1元的价值就变成0.3元（=150/500）；如果接受配股，他持有的股票的价值是1.5元；因为配股的成本是1元，所以他的最优选择是接受配股。

# 所有权配置与等级结构

- 考虑团队生产：让其中的一个人变成所有者

| | 工作 | 偷懒 |
|---|---|---|
| 工作 | 6，6 | 0，8 |
| 偷懒 | 8，0 | 2，2 |

# 纳什均衡与学习过程



# 双寡头竞争：Cournot博弈

- 两个企业同时选择产量，价格由市场决定；
- 假定需求函数为 $P(Q)=a-(q_1+q_2)$
  其中 $q_1$为企业1的产量，$q_2$为企业2的产量
- 假定成本函数为：$C(q_i)=c_iq_i$
- 那么，利润函数为：

$$\Pi_1=q_1P(Q)-cq_1=q_1(a-q_1-q_2-c)$$
$$\Pi_2=q_2P(Q)-cq_2=q_2(a-q_1-q_2-c)$$

# 双寡头竞争（续）

- 企业最大化利润的一阶条件为：

$$q_1=R_1(q_2)=\frac{a-c}{2}-\frac{q_2}{2}$$
$$q_2=R_2(q_2)=\frac{a-c}{2}-\frac{q_1}{2}$$

- 纳什均衡产量：$q_1^{NE}=q_2^{NE}=\dfrac{a-c}{3}$
- 纳什均衡利润为 $\Pi_1^{NE}=\Pi_2^{NE}=\dfrac{(a-c)^2}{9}$

# 垄断产量和垄断利润

- 垄断企业的目标函数：

$$\Pi_M=QP(Q)-Qc=Q(a-Q-c)$$

- 垄断产量：$Q_M=\dfrac{a-c}{2}$
- 垄断利润：$\Pi_M=\dfrac{(a-c)^2}{4}$

# 划拳博弈

| | 老虎 | 鸡 | 虫 | 杠子 |
|---|---|---|---|---|
| 老虎 | 0，0 | 1，-1 | 0，0 | -1，1 |
| 鸡 | -1，1 | 0，0 | 1，-1 | 0，0 |
| 虫 | 0，0 | -1，1 | 0，0 | 1，-1 |
| 杠子 | 1，-1 | 0，0 | -1，1 | 0，0 |

# 混合战略纳什均衡

- 有些博弈没有“纯战略”纳什均衡，但有混合战略纳什均衡，如监督博弈。

| | 偷懒 | 不偷懒 |
|---|---|---|
| 监督 | 1，－1 | －1，2 |
| 不监督 | －2，3 | 2，2 |

给定工人偷懒，老板的最优选择是监督；给定老板监督，工人的最优选择是不偷懒；给定工人不偷懒，老板的最优选择是不监督；给定老板不监督，工人的最优选择是偷懒；如此循环。

# 纳什均衡的存在性问题

- 每一个有限博弈至少存在一个纳什均衡（纯战略或混合战略）；
- 如果一个博弈存在两个纯战略纳什均衡，那么，一定存在第三个混合战略纳什均衡。

# 风险与均衡

- 由于纳什均衡要求理性共识和一致预期，当人们可能犯小小的错误时，纳什均衡不一定被选择。如下面这个博弈中，多数人将选择“下”而不是“上”。

| | 左 | 右 |
|---|---|---|
| 上 | 8, 10 | -1000,9 |
| 下 | 7, 6 | 6, 5 |

只要B有千分之一的概念错误地选择右，A将选择下；如果B怀疑A怀疑自己可能犯错误，B将选择右。所以，出现的不是纳什均衡

# 有问题的纳什均衡？

| | C1 | C2 | C3 |
|---|---|---|---|
| R1 | $\boxed{2，2}$ | 3，1 | 0，2 |
| R2 | 1，3 | 2，2 | 3，2 |
| R3 | 2，0 | 2，3 | 2，2 |