

基于四阶累积量特征分解的 空间谱估计测向方法*

魏 平 肖先赐 李乐民

(电子科技大学电子工程系 成都 610054)

摘要 传统的空间谱估计测向方法大都是在二阶统计基础上提出的, 而高阶累积量 (cumulant) 及其对应的高阶谱具有更加丰富的信息, 而且对任何谱特性的高斯噪声都有很好的抑制能力. 本文研究了基于四阶累积量特征结构分析的谱估计测向方法, 从累积量的基本定义和性质出发, 导出了基于特征分解的测向算法, 并给出了模拟实验和测向系统外场实验结果. 实验结果显示, 基于四阶累积量方法的性能优于传统谱估计测向方法, 特别是对于未知谱特性的色高斯噪声的情况.

关键词 测向, 空间谱, 高阶累积量, 高阶谱

1 引 言

三阶或三阶以上的统计分析常被叫做高阶统计或高阶分析. 近年来, 高阶分析已经开展并广泛地应用于各类信号处理问题中, 取得了良好的效果. 高阶统计方法中使用最多的是高阶累积量和对应的多维傅里叶变换——高阶谱. 高阶谱分析不仅能显示一个过程的幅度信息, 而且能显示其相位信息. 这是它的很重要的特点. 因为传统的二阶分析方法, 如相关分析, 要丢失信号的相位信息. 高阶统计量的另一个重要特点是它对任何形式的高斯过程的不敏感性. 所以可以有效地从高斯过程中提取出非高斯的信号, 或者有效地抑制高斯噪声. 这一点对于未知谱特性的色高斯噪声的情况显得非常重要和有效. 传统分析方法是假设噪声为高斯白噪声或已知特性的色高斯噪声而进行的. 而实际噪声的分析表明, 其谱特性常常是一种变化而且不易测量的形式. 比如在测向系统中的空间噪声, 其空间相关矩阵便偏离对角阵而表现出相关性. 在这种情况下, 高阶分析对未知色高斯噪声的抑制作用便更为必要.

高阶统计随所使用的统计量不同具有不同的特点, 并且出现了许多优良的性能. 鉴

1993-10-23 收到, 1994-03-29 定稿

* 军事电子预研基金项目资助

魏 平 男, 1966 年生, 副教授, 在职博士生, 目前进行电子工程专业信号分析、高阶谱估计和阵列处理方面的研究.

肖先赐 男, 1933 年生, 教授, 博士生导师, 长期从事谱估计、信号分析、阵列处理和人工神经网络等方面的研究.

李乐民 男, 1932 年生, 教授, 博士生导师, 长期从事数字信号传输和处理、光纤通信和通信网等方面的研究.

于此,高阶分析已成为现代谱分析发展的重要方向之一。在这方面国外已有大量的研究工作并获得进展^[1]。国内也相应开展了一定的研究。

在高级统计量研究中许多情况选用四阶而不选三阶。其主要原因是对于对称分布的随机过程,三阶累积量为零。并且对于一些非对称分布的随机过程,三阶累积量很小而四阶累积量则较大。所以使用四阶分析便是很自然的了。在高级分析中常常使用累积量而不使用高阶矩。这是由于两个原因:一是高阶累积量对高斯过程具有不敏感性;二是高阶累积量在数学形式上有很多好的性质。这两点都是高阶矩不具备的。

高阶累积量可以代替传统的二阶统计,形成高阶处理方法。这样可以保留更丰富的信息,而且还可以不受高斯白噪声假设的限制,适应于许多实际应用情况,获得更好的性能。在谱估计测向有关的方面,Nikias^[2], Mendel^[3], Porat 和 Friendlander^[4] 等人都作了一定的工作。由于高阶分析的复杂性和多样性,高阶分析方法的种类是很多的。本文直接从四阶累积量的定义出发推导了与传统协方差 MUSIC^[5] 方法对应的四阶累积量特征分解方法。给出了完整的公式表达和算法过程。在给出模拟实验结果的同时还报道这种方法应用于空间谱估计测向系统中的情况和外场实验结果。实验表明,高阶统计方法比传统二阶方法具有更好的性能。

2 四阶累积量的公式表达

对于零均值实随机变量,它的四阶累积量由下式给出:

$$\begin{aligned} \text{cum}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & E\{x_1 x_2 x_3 x_4\} - E\{x_1 x_2\}E\{x_3 x_4\} \\ & - E\{x_1 x_3\}E\{x_2 x_4\} - E\{x_1 x_4\}E\{x_2 x_3\}. \end{aligned} \quad (1)$$

如果 $\{x(t)\}$ 为零均值四阶实平稳过程,则它的四阶累积量为

$$\begin{aligned} C_{4,x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = & \text{cum}\{x(t), x(t + \tau_1), x(t + \tau_2), x(t + \tau_3)\} \\ = & E\{x(t)x(t + \tau_1)x(t + \tau_2)x(t + \tau_3)\} \\ & - C_{2,x}(\tau_1)C_{2,x}(\tau_2 - \tau_3) \\ & - C_{2,x}(\tau_2)C_{2,x}(\tau_3 - \tau_1) \\ & - C_{2,x}(\tau_3)C_{2,x}(\tau_1 - \tau_2), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $C_{2,x}(\tau) = E\{x(t)x(t + \tau)\}$ 是 $x(t)$ 的二阶累积量,也就是相关函数。

累积量有许多好的数学性质^[1],这给公式推导带来了方便。四阶累积量的三维傅里叶变换叫做三谱 (*trispectrum*):

$$\begin{aligned} S_{3,x}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{4,x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ & \times \exp\left(-j \sum_{i=1}^3 \omega_i \tau_i\right) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \end{aligned} \quad (3)$$

下面用公式表示多传感信号的互高阶累积量。假设 M 个空间实信号,构成向量 \mathbf{X}

$$\mathbf{X}^T = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_M(t)], \quad (4)$$

则 $\forall k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, 3, \dots, M\}$, 空间四阶矩为

$$\mu_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = E\{X_{k_1}(t)X_{k_2}(t)X_{k_3}(t)X_{k_4}(t)\}. \quad (5)$$

空间四阶累积量为

$$\begin{aligned} \kappa_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = & \mu_4(k_1, k_2, k_3, k_4) - \mu_2(k_1, k_2)\mu_2(k_3, k_4) \\ & - \mu_2(k_1, k_3)\mu_2(k_2, k_4) - \mu_2(k_2, k_3)\mu_2(k_1, k_4), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\mu_2(k_1, k_2) = E\{X_{k_1}(t)X_{k_2}(t)\}$ 为空间互相关函数。

如果信号 $X_i(t), i = 1, 2, \dots, M$ 是复解析信号, 则四阶矩和四阶累积量中应有两个量取复共轭来定义, 以保证总不恒为零。定义(5)式可以改写为

$$\mu_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = E\{X_{k_1}(t)X_{k_2}(t)X_{k_3}^*(t)X_{k_4}^*(t)\}. \quad (7)$$

又考虑到对于充分对称分布的信号, $E\{X_{k_1}(t) \cdot X_{k_2}(t)\}$ (无共轭)恒为零, 则四阶累积量为

$$\begin{aligned} \kappa_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = & \mu_4(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ & - \mu_2(k_1, k_3) \cdot \mu_2(k_2, k_4) \\ & - \mu_2(k_1, k_4) \cdot \mu_2(k_2, k_3), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\mu_2(k_1, k_3) = E\{X_{k_1}(t)X_{k_3}^*(t)\}$ 。

当 k_1, k_2, k_3, k_4 分别在 $\{1, 2, 3, \dots, M\}$ 中取各个值时, 构成的空间四阶矩和空间四阶累积量可以写成矩阵形式。其公式可以用 Kronecker 乘积^[6]清楚地表达。

设信号向量 \mathbf{X} 的四阶矩矩阵为 \mathbf{D}_X , 四阶累积量矩阵为 \mathbf{C}_X , 则 $\mu_4(k_1, k_2, k_3, k_4)$ 定义了 \mathbf{D}_X 的第 $[(k_1 - 1) \cdot M + k_3]$ 行第 $[(k_2 - 1) \cdot M + k_4]$ 列的元素。同样地, $\kappa_4(k_1, k_2, k_3, k_4)$ 定义了 \mathbf{C}_X 的第 $[(k_1 - 1) \cdot M + k_3]$ 行第 $[(k_2 - 1) \cdot M + k_4]$ 列元素。 \mathbf{D}_X 和 \mathbf{C}_X 均为 $(M^2 \times M^2)$ 形式的矩阵。矩阵表达式如下:

$$\mathbf{D}_X = E\{(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*)(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*)^H\}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_X = & E\{(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*)(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*)^H\} \\ & - E\{\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*\} \cdot E\{(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*)^H\} \\ & - E\{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H\} \otimes E\{(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^H)^*\}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 \otimes 表示 Kronecker 乘积。

以上定义了空间四阶矩矩阵和空间四阶累积量矩阵。它们的主要性质可以从文献[1, 6]中得到。

3 基于四阶累积量特征分解的测向算法

设空间有 D 个信源, M 个天线阵元 ($M > D$); 信道特性一致; 信号与噪声不相关; 信号间两两相关系数不为 1。第 m 个阵元的输出信号为

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^D s_k(t)a_m(\theta_k) + n_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (11)$$

其中 θ_k 为第 k 个辐射源方向, $a_m(\theta_k)$ 是第 m 阵元对 θ_k 方向的阵元结构系数, $s_k(t)$ 为第 k 个信源信号, $n_m(t)$ 是第 m 通道噪声。(11)式的矩阵形如下:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N}, \quad (12)$$

其中

$$\mathbf{X}^T = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)],$$

$$\mathbf{S}^T = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_D(t)],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T &= [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)], \\ \mathbf{A} &= [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_D)], \\ \mathbf{a}(\theta) &= [a_1(\theta), a_2(\theta), \dots, a_M(\theta)]^T. \end{aligned}$$

不难求出输出信号的四阶矩矩阵为

$$\mathbf{D}_x = E\{(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*)(\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^*)^H\} \quad (13)$$

根据 Kronecker 乘积的性质^[6], 再将(12)式代入得:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^* &= (\mathbf{AS} + \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{AS} + \mathbf{N})^* \\ &= (\mathbf{AS}) \otimes (\mathbf{AS})^* + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^* \\ &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^*)(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*) + (\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*). \end{aligned} \quad (14)$$

(14)式代入(13)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_x &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^*) E\{(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)^H\} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^*)^H \\ &\quad + E\{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*)(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*)^H\}. \end{aligned} \quad (15)$$

令

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^*, \\ \mathbf{D}_s &= E\{(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)^H\}, \\ \mathbf{D}_n &= E\{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*)(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*)^H\}. \end{aligned}$$

这里 \mathcal{A} 是高阶阵元系数矩阵, $\mathbf{D}_s, \mathbf{D}_n$ 分别是信源和噪声的空间四阶矩矩阵, 这样(15)式可写成

$$\mathbf{D}_x = \mathcal{A} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathcal{A}^H + \mathbf{D}_n. \quad (16)$$

用与以上推导四阶矩矩阵(16)式相类似的方法, 从(10)式出发可以推得 \mathbf{X} 矩阵的空间四阶累积量矩阵:

$$\mathbf{C}_x = \mathcal{A} \cdot \mathbf{C}_s \cdot \mathcal{A}^H + \mathbf{C}_n, \quad (17)$$

其中 \mathbf{C}_s 和 \mathbf{C}_n 分别为信源与噪声的空间四阶累积量矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_s &= E\{(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)^H\} - E\{(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)\} \cdot E\{(\mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^*)^H\} \\ &\quad - E\{\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^H\} \otimes E\{\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^H\}^*, \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n &= E\{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*)(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*)^H\} - E\{\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*\} \cdot E\{(\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}^*)^H\} \\ &\quad - E\{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^H\} \otimes E\{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^H\}^*. \end{aligned} \quad (18b)$$

下面通过(17)式考察矩阵 \mathbf{C}_x 的秩. 假设噪声为高斯噪声, 无论是白噪声还是谱特性未知的色噪声, 理论上由(18b)式定义的 \mathbf{C}_n 应恒为 0 矩阵. 由于噪声偏离高斯或有限数据长度运算精度的原因, \mathbf{C}_n 是不恒为 0 的小量. 阵元结构系数矩阵 \mathbf{A} 在 $M > D$ 与 θ_k 互不等 ($k = 1, 2, \dots, D$) 时为列满秩阵, 即

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = D. \quad (19)$$

再考虑 Kronecker 积性质, 有

$$\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^*) = D^2. \quad (20)$$

由信源间两两不完全相干和矩阵理论可推出:

$$\text{rank}(\mathcal{A} \cdot \mathbf{C}_s \cdot \mathcal{A}^H) = D^2. \quad (21)$$

对 \mathbf{C}_x 进行特征分解, 其特征值按从小到大排列为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$, 设对应的特征向量为 $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_M$. 在(17)式中由于(21)式和 \mathbf{C}_n 为小量的原因可以得出结论: \mathbf{C}_x

应有 D^2 个大的特征值 $\lambda_i, (i = 1, 2, \dots, D^2)$ 和 $M^2 - D^2$ 个最小的特征值 $\lambda_i, (i = D^2 + 1, D^2 + 2, \dots, M^2)$ 。最小特征值对应的特征向量张成的空间定义为噪声子空间, 即

$$Q_n = \text{span}(\mu_{D^2+1}, \mu_{D^2+2}, \dots, \mu_{M^2}). \quad (22)$$

同时定义信号子空间为

$$Q_s = \text{span}\{\mathbf{a}(\theta_1) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_D) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_D)\}. \quad (23)$$

与传统协方差 MUSIC 方法^[5]相同的原理, 可以得到正交条件:

$$\mathcal{A}^H \mu_i = 0, (i = D^2 + 1, D^2 + 2, \dots, M^2) \quad (24)$$

或

$$Q_n \perp Q_s. \quad (25)$$

定义噪声矩阵 E_n :

$$E_n = [\mu_{D^2+1}, \mu_{D^2+2}, \dots, \mu_{M^2}]. \quad (26)$$

基于四阶累积量矩阵的空间谱定义为

$$P(\theta) = \|E_n^H \cdot [\mathbf{a}(\theta) \otimes \mathbf{a}^*(\theta)]\|_2^2, \quad (27)$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 是二范数。所以由于在辐射源方向上具有正交方程(24)式或(25)式, 故该方向上谱值得取得极大值。

至此, 我们从四阶累积量的定义和基本性质出发, 直接推导了基于四阶统计特征分解的测向算法。推导的结果与 B. Porat 和 B. Friedlander^[4] 的结果本质上是一致的, 但本文的导出过程更为明显。根据上面推导的方法, 测向算法过程应为如下步骤:

- (1) 根据各阵元收到的信号构造复解析形式, 从而得到矩阵 \mathbf{X} ;
- (2) 由定义(10)式求矩阵 \mathbf{X} 的四阶累积量矩阵 \mathbf{C}_x ;
- (3) 对 \mathbf{C}_x 进行特征分解;
- (4) 从 \mathbf{C}_x 的特征值中判断辐射源数目 D ;
- (5) 求得噪声矩阵(26)式, 从而计算四阶累积量的空间谱(27)式;
- (6) 搜索谱峰就可以得到信源方向。

4 模拟实验和系统外场实验结果

模拟实验在各不同条件下进行了多次。这里举出一组典型的实验结果。实验条件是: 8 阵元均匀圆阵; 2 信源位于 90° 和 100° 位置; 信源信号相干系数为 0.5; 噪声与信

表 1

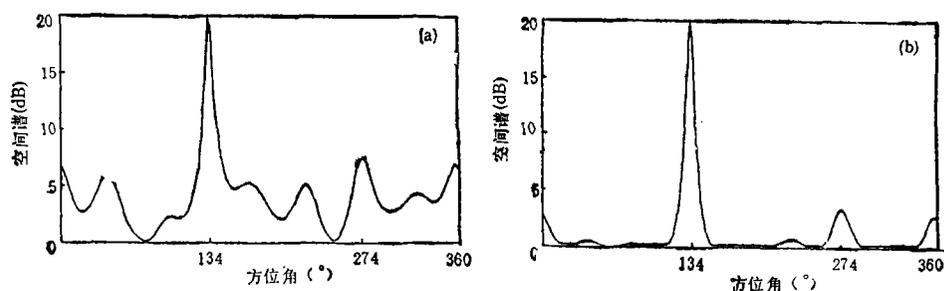
项 目	协方差 MUSIC	本文方法
测向失败比率 ^(注1)	56%	1%
测向运算时间 ^(注2) (s)	0.1	6.5
正确分辨时统计均值($^\circ$)	90.78, 99.30	90.29, 99.45
统计标准偏差($^\circ$)	1.73	1.01

注 1: 测向失败定义为误差大于 $\pm 7^\circ$ 或完全不能分辨。

注 2: 运算是在高速处理单片 TMS320C25 上进行的。

号不相关;噪声为高斯色噪声,其谱特性是模拟信号时任意假设的,这一假设对测向算法而言为未知;信噪比为 3dB;数据点数为每次 256 点;每组 100 次 Monte Carlo 测试。将协方差 MUSIC 方法与本文方法在上述完全相同的条件下进行比较。实验结果如表 1 所示。

外场实验是在空间谱估计测向系统实验模型上进行的。系统由 8 元均匀圆阵, 8 信道接收机, 高速信号处理机和微机构成。圆阵天线直径为 3m。算法在处理单片 TMS 320C25 上实现, 运算以 16 位定点和 16/4 位浮点格式为主。图 1 给出了协方差 MUSIC 和本文对同一测量数据得到的空间谱。这是一个典型的结果。实验条件是: 单信号位于 134° 位置; 256 点测量数据; 信号频率为 166MHz, 带宽为 25kHz; 实验在城市进行, 背景干扰信号主要位于 274° 和 358° 两个位置。由图 1 可以看出四阶累积量方法与传统协方差方法相比, 谱峰更为突出和准确, 空间噪声得到了更好的抑制, 从而可以获得更高的精度和分辨力。其代价是运算更为复杂, 运算量至少增加了一个数量级。由于高速处理技术的发展, 准实时测向运算采用这种方法是能够实现的。



(a) 传统协方差 MUSIC 方法 (b) 本文方法

图 1 外场实验中典型的空间谱(单源位于 134°)

实验中通过对实测空间噪声的分析, 得到结论: 实测的空间噪声常常是有色的, 而且其谱特性随不同测试而不规则地变化。例如对某次实验得到噪声矩阵进行相关。如果空间噪声是不相关的, 那么相关矩阵应是良好的对角阵, 而实测情况却不是这样的。下面 8 个复值数据是相关矩阵第一行的某次测量运算结果:

$$\begin{aligned} & 8.2, 2.7 + 0.6j, 0.6 + 3.0j, 2.3 - 3.2j, -5.1 + 3.3j, \\ & -5.8 + 1.6j, -9.0 + 1.2j, 2.1 + 1.6j. \end{aligned}$$

可以看到, 空间噪声是相关的。根据高阶分析抑制色高斯噪声的特点, 基于四阶累积量的本文方法比传统二阶方法在测向系统中能达到更好的结果。这是上面实验结果的解释。

5 结 束 语

本文从四阶矩和四阶累积量的定义出发, 推导了基于四阶累积量矩阵特征分解的方法。理论分析说明, 该方法更充分地利用了高阶信息, 并对未知色高斯噪声具有更强的抑

制能力。模拟实验和测向系统外场实验表明, 本方法在测向精度和分辨力等方面都比传统协方差 MUSIC 方法更优良。

参 考 文 献

- [1] Mendel J M. Proc. IEEE, 1991, 79 (3): 278—805.
- [2] Pan P, Nikias C L. Harmonic decomposition methods in cumulant domains. Proc. Int. Conf. ASSP. New York: April 1988, 2356—2359.
- [3] Swami A, Mendel J M. IEEE Trans. on SP, 1991, SP-39 (5): 1099—1109.
- [4] Porat B, Friendlander B. IEEE Trans. on SP, 1991, SP-39 (6): 2016—2024.
- [5] Schmidt R O. IEEE Trans. on AP, 1986, AP-34 (3): 276—280.
- [6] Brewer J W. IEEE Trans. on CAS, 1987, CAS-25 (9): 772—781.

THE FOURTH-ORDER CUMULANTS BASED SPECTRAL ESTIMATION METHOD AND ITS APPLICATION TO DIRECTION-FINDING

Wei Ping Xiao Xianci Li Lemin

(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

Abstract Traditional approaches of spatial spectral estimation are usually based on the second-order statistics. The higher-order cumulants and the poly-spectrum have more information and are capable to reduce the Gaussian noises. In this paper, a kind of spectrum estimation method for direction-finding is presented based on the eigen-structure analysis of the fourth-order cumulants. The algorithm is derived and its performance is illustrated by both the computer simulations and the experiments of the direction-finding system. The obtained results demonstrate that the fourthorder cumulant-based method outperforms the traditional direction-finding method, especially when the noise is unknown coloured one.

Key words Direction-finding, Spatial spectrum, High-order cumulants, Poly-spectra