

# 谱峰搜索的神经网络实现

林 盛 殷勤业

(西安交通大学信息与控制工程系 西安 710049)

**摘要** 本文提出了谱峰搜索的神经网络方法。作为一个线性规划问题,通过构造适当的代价函数把谱峰搜索与 Hopfield 线性规划网络联系起来。网络中神经元的个数与参数空间搜索的分辨率无关,而与传感器阵列中传感器的个数成线性关系,因此神经元的个数并不要求很多。理论分析和仿真实验证明,该方法实际上与 MUSIC 方法或 RD (实数域波达方向估计)法是等价的。

**关键词** 波达方向估计,神经网络,谱估计

## 1 引 言

在阵列信号处理中,到达波方向(DOA)的估计问题一直是人们广泛感兴趣的问题。近年来,基于阵列协方差矩阵特征分解的特征结构法成为学术界讨论的一个热点,MUSIC 方法和最小范数法是这种方法的两个代表<sup>[1,2]</sup>。特征结构法是通过协方差矩阵的特征分解来划分信号子空间和噪声子空间,然后利用它们之间的正交性来估计到达波方向参数的,因此使得角度分辨率得到了很大的提高。在精确的阵列协方差矩阵的情况下,特征结构法可以在实际角度位置产生无偏的谱峰,而不受信噪比和方向角间隔的影响,这一特性是最大熵(ME)法、线性预测(LP)法等所不具备的<sup>[3,4]</sup>。

特征结构法主要包括两个过程:协方差阵的特征分解和谱峰搜索。对于一个  $N \times N$  的矩阵来说,特征分解的运算量为  $O(N^3)$ ,若假设参数空间被离散化为  $P$  个量化级,信号源的个数为  $K$  个,那么谱峰搜索的运算量为  $O(PNK)$ ,所以当  $P$  很大时,即参数空间的搜索要求较细时,谱峰搜索的运算量将占主要地位。由此可以看出,虽然特征结构法可以得到渐近无偏的参数估计,但其庞大的运算量使得用传统的代数方法无法得到实时的估计结果,尤其对于实际中的二维和三维问题,这种方法几乎无法应用。

近年来,随着神经网络理论的发展,人们开始研究用神经网络的方法来解决 DOA 估计问题。这种方法主要可分为两类:一是利用神经网络分别实现 DOA 估计中运算量庞大的部分<sup>[5,6]</sup>,另一类是把 DOA 估计做为一个优化问题映射到神经网络上<sup>[7]</sup>。后一种方法避免了特征分解和谱峰搜索运算,然而可以证明,在不限网络中输出为 1 的神

1994-02-01 收到,1994-07-12 定稿

\* 国家自然科学基金、跨世纪优秀人才专项基金资助课题

林 盛 男,1969 年生,博士生,主要从事阵列信号处理、谱估计、神经网络等方面的研究工作。

殷勤业 男,1950 年生,教授、博士生导师,现主要从事阵列信号处理、自适应信号处理、谱估计、神经网络、时频分析等方面的研究工作。

经元个数的条件下,这种方法是不正确的<sup>[9]</sup>. 因此,谱峰搜索问题一直没有得到很好的解决.

保持特征结构法所具有的高分辨率的特性并同时克服算法运算的复杂性,乃是人们所希望得到的结果. 本文中,我们把谱峰搜索做为一个线性规划问题,根据最小方差准则与 Hopfield 线性规划网络联系起来,因而提出了谱峰搜索的神经网络方法. 由于线性规划问题的解空间总是凸的,所以可以保证网络得到问题的最优解.

## 2 问题的提出

谱峰搜索问题可以描述为<sup>[1,9]</sup>: 寻找一组参数  $\{\theta_1, \dots, \theta_k\}$  使得约束:

$$\text{span}\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k\} = \text{span}\{\mathbf{A}_0\} \quad (1)$$

或

$$\text{span}\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{2k}\} = \text{span}\{\mathbf{D}_0\} \quad (2)$$

得到满足,其中  $k$  是源的个数;

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_k)], \\ \mathbf{D}_0 &= [\mathbf{d}_1(\theta_1), \mathbf{d}_1(\theta_2), \dots, \mathbf{d}_1(\theta_k), \mathbf{d}_2(\theta_1), \mathbf{d}_2(\theta_2), \dots, \mathbf{d}_2(\theta_k)], \\ \mathbf{a}(\theta) &= [1 \exp(-j\omega_0\tau(\theta)) \cdots \exp(-j(P-1)\omega_0\tau(\theta))]^T, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(\theta) &= [1 \cos(\omega_0\tau(\theta)) \cdots \cos(M-1)\omega_0\tau(\theta) \\ &\quad \cos(\omega_0\tau(\theta, \alpha)) \cos(2\omega_0\tau(\theta, \alpha)) \\ &\quad \cdots \cos(N\omega_0\tau(\theta, \alpha))]^T, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2(\theta) &= [0 - \sin(\omega_0\tau(\theta)) \cdots - \sin(M-1)\omega_0\tau(\theta) \\ &\quad \sin(\omega_0\tau(\theta, \alpha)) \sin(2\omega_0\tau(\theta, \alpha)) \\ &\quad \cdots \sin(N\omega_0\tau(\theta, \alpha))]^T; \end{aligned} \quad (5)$$

$\mathbf{V}_i (i = 1, 2, \dots, k)$  是  $P$  维的复特征向量;  $\mathbf{U}_i (i = 1, 2, \dots, 2k)$  是  $q$  维的实特征向量. 这里  $N, M$  和  $P, q$  都是整数, 且  $N \geq 1, M \geq 2, q = M + N \geq 2k + 1, P \geq k + 1$ ,  $\tau(\theta)$  和  $\tau(\theta, \alpha)$  是  $\theta$  的函数,  $\alpha$  是常数<sup>[1,2,9]</sup>. 比较典型的 MUSIC 方法和我们提出的 RD 方法所定义的谱估计表达式分别为<sup>[1,9]</sup>

$$P_m(\hat{\theta}) = 1/\mathbf{a}^H(\hat{\theta})(\mathbf{I} - \mathbf{V}_E \mathbf{V}_E^H) \mathbf{a}(\hat{\theta}) \quad (6)$$

和

$$P_r(\hat{\theta}) = 1/[\mathbf{d}_1^T(\hat{\theta})(\mathbf{I} - \mathbf{U}_E \mathbf{U}_E^T) \mathbf{d}_1(\hat{\theta}) + \mathbf{d}_2^T(\hat{\theta})(\mathbf{I} - \mathbf{U}_E \mathbf{U}_E^T) \mathbf{d}_2(\hat{\theta})], \quad (7)$$

其中  $\mathbf{V}_E = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_k]$ ,  $\mathbf{U}_E = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{2k}]$ , 它们是通过  $P_m(\theta)$  或  $P_r(\theta)$  的最大的  $k$  个极值点所对应的  $\theta$  来确定参数  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$  的.

## 3 Hopfield 线性规划网络

考虑 Hopfield 线性规划网络的能量函数<sup>[10,11]</sup>:

$$E = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}) + \sum_i F(\mathbf{D}_i \cdot \mathbf{V} - \mathbf{B}_i) + \sum_i 1/R \int_0^{v_i} g^{-1}(V) dV, \quad (8)$$

其中  $f(x) = dF(x)/dx$ ;  $\mathbf{A} = [A_1, A_2, \dots, A_M]$ , 代表网络中变量放大器的输入电流;  $\mathbf{B} = [B_1, B_2, \dots, B_N]^T$ , 表示约束放大器的输入电流;  $\mathbf{D}_i = [D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{iM}]$ , 表示网络的连接权向量;  $\mathbf{V} = [V_1, V_2, \dots, V_M]^T$ , 表示网络变量放大器的输出; 这里  $M, N$  分别是神经网络中变量放大器和约束放大器的个数。变量放大器的输入输出关系由  $V_i = g(u_i)$  来定义; 约束放大器的输入输出关系由  $\varphi_j = f(x_j)$  来描述。令  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ,  $f(x) = \mu x$ ,  $g(x) = \beta x$ , 其中  $\mu, \beta$  是常数, 它们控制网络的收敛速度。如果  $\mu\beta R$  足够大, 那么(8)式可以简化为<sup>[11]</sup>

$$E = \sum_i (\mathbf{D}_i \cdot \mathbf{V} - B_i)^2 = \|\mathbf{D} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{E}\|^2, \quad (9)$$

其中  $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T, \dots, \mathbf{D}_N^T]^T$ ,  $\|\cdot\|$  表示 2-范数。

#### 4 代价函数的构造及网络参数的选取

(1)和(2)式实际上还可以化简为等价的两个问题:

$$\min_{\theta} \|\mathbf{P}_v \mathbf{a}(\theta) - \mathbf{a}(\theta)\|^2 \quad (10)$$

和

$$\min_{\theta} \{\|\mathbf{P}_r \mathbf{d}_1(\theta) - \mathbf{d}_1(\theta)\|^2 + \|\mathbf{P}_r \mathbf{d}_2(\theta) - \mathbf{d}_2(\theta)\|^2\}, \quad (11)$$

其中  $\mathbf{P}_v = \mathbf{V}_E (\mathbf{V}_E^H \mathbf{V}_E)^{-1} \mathbf{V}_E^H = \mathbf{V}_E \mathbf{V}_E^H$ ,  $\mathbf{P}_r = \mathbf{U}_E (\mathbf{U}_E^T \mathbf{U}_E)^{-1} \mathbf{U}_E^T = \mathbf{U}_E \mathbf{U}_E^T$ 。

令  $\mathbf{P}_v = \mathbf{P}_r + j\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{a}_r(\theta) + j\mathbf{a}_i(\theta)$ , 则(10)式可写为

$$\begin{aligned} & \min_{\theta} \|\mathbf{P}_v \mathbf{a}(\theta) - \mathbf{a}(\theta)\|^2 \\ &= \min_{\theta} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{P}_r & -\mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_i & \mathbf{P}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r(\theta) \\ \mathbf{a}_i(\theta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r(\theta) \\ \mathbf{a}_i(\theta) \end{bmatrix} \right\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

比较(9)和(12)两式, 对于问题(1)式可以选取网络的参数为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_r & -\mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_i & \mathbf{P}_r \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{B}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r(\theta) \\ \mathbf{a}_i(\theta) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

对于(11)式则可重写为

$$\begin{aligned} & \min_{\theta} \{\|\mathbf{P}_r \mathbf{d}_1(\theta) - \mathbf{d}_1(\theta)\|^2 + \|\mathbf{P}_r \mathbf{d}_2(\theta) - \mathbf{d}_2(\theta)\|^2\} \\ &= \min_{\theta} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{P}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1(\theta) \\ \mathbf{d}_2(\theta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1(\theta) \\ \mathbf{d}_2(\theta) \end{bmatrix} \right\|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

因此, 对于(2)式所描述的问题网络的参数可以选为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_r \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{B}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1(\theta) \\ \mathbf{d}_2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

从上面的分析可以看到,若参数  $\theta_0$  是我们所要求解的参数  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$  中的一个,那么网络稳态时的输出  $\mathbf{V}^*$  与  $\mathbf{B}(\theta_0)$  一定是相等的. 因此,我们可以不断改变  $\theta$  的值,如果网络的输出  $\mathbf{V}^*$  与  $\mathbf{B}(\theta)$  足够接近,那么这时的  $\theta$  值就是所求的参数之一. 为了说明问题,定义  $\theta$  参数谱为

$$S(\theta) = 1/\|\mathbf{V}^* - \mathbf{B}(\theta)\|^2 \quad (18)$$

这种方法的运算量主要集中在投影矩阵  $\mathbf{P}_s$  和  $\mathbf{P}_n$  的求解上. 为了比较方便,假设在波达方向估计中传感器阵列由  $N$  个传感器组成,那么在已知特征向量  $\mathbf{V}_i (i = 1, 2, \dots, k)$  和  $\mathbf{U}_i (i = 1, 2, \dots, 2k)$  的情况下,得到  $\mathbf{P}_s$  所需的运算量为  $O(KN^2)$ ,  $\mathbf{P}_n$  所需的运算量也为  $O(KN^2)$ , 其中  $K$  为源的个数. 对于用一般代数方法进行谱峰搜索所需运算量则为  $O(PNK)$ , 其中  $P$  为参数空间所需离散化的级数. 一般情况下,  $P$  要比  $N$  大得多,因此,本方法在一定程度上降低了谱峰搜索的运算量.

## 5 谱峰搜索的神经网络方法与 MUSIC 及 RD 方法之间的关系

从(9),(10),(11)式中可以看出,(10)式的最小方差解为

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \text{Re}((\mathbf{P}_s)^+ \mathbf{a}(\theta)) \\ \text{Im}((\mathbf{P}_s)^+ \mathbf{a}(\theta)) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

(11)式的最小方差解为

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} (\mathbf{P}_s)^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{P}_n)^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1(\theta) \\ \mathbf{d}_2(\theta) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中  $(\mathbf{P}_s)^+ = \mathbf{P}_s$ ,  $(\mathbf{P}_n)^+ = \mathbf{P}_n$ , 分别为  $\mathbf{P}_s$  和  $\mathbf{P}_n$  的伪逆. 把(14)和(19)式代入(18)式中,可得

$$\begin{aligned} S(\theta) &= 1/\|\mathbf{P}_s \mathbf{a}(\theta) - \mathbf{a}(\theta)\|^2 \\ &= 1/\mathbf{a}^H(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{V}_E \mathbf{V}_E^H) \mathbf{a}(\theta) = P_m(\theta). \end{aligned} \quad (21)$$

同样把(17)和(20)式代入到(18)式中,则有

$$\begin{aligned} S(\theta) &= 1/\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{P}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1(\theta) \\ \mathbf{d}_2(\theta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1(\theta) \\ \mathbf{d}_2(\theta) \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= 1/[\|\mathbf{P}_s \mathbf{d}_1(\theta) - \mathbf{d}_1(\theta)\|^2 + \|\mathbf{P}_n \mathbf{d}_2(\theta) - \mathbf{d}_2(\theta)\|^2] \\ &= 1/\mathbf{d}_1^T(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_s) \mathbf{d}_1(\theta) + \mathbf{d}_2^T(\theta)(\mathbf{I} - \mathbf{P}_n) \mathbf{d}_2(\theta) \\ &= P_s(\theta). \end{aligned} \quad (22)$$

所以本文中讨论的谱峰搜索神经网络方法实际上在复数情况下与 MUSIC 方法是等价的,而在实数情况下,与 RD 方法是等价的,然而它却充分利用了神经网络强大的集体运算能力,使得 DOA 估计的实时实现成为可能.

## 6 实验结果

为了验证本文方法的有效性及其与 MUSIC 和 RD 方法之间的关系,我们作了一系列仿真实验. 在实验中,传感器的个数为 10, 因此网络中神经元的个数为 40 个; 传感器

之间的间距为二分之一源的中心波长,两个非相关窄带源的人射角分别为  $30^\circ$  和  $37^\circ$ , 快拍数为 100,  $\text{SNR} = 5.0\text{dB}$ . 对于 MUSIC 方法,阵列是线性等间距排布的. 对于 RD 方法,则  $\alpha = 20^\circ$ , 两个子阵列的传感器个数均为 5 个.

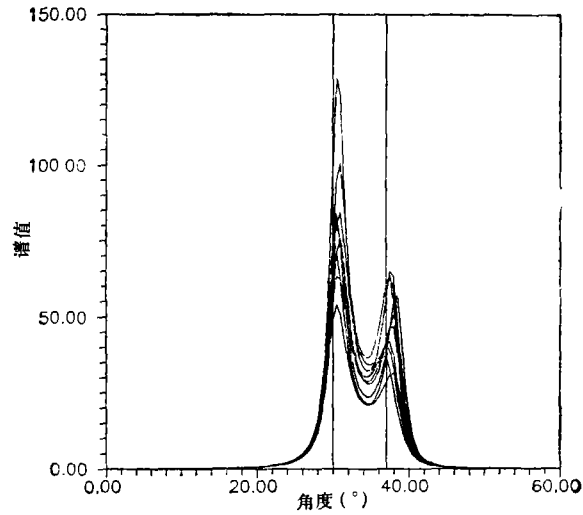


图 1 标准 MUSIC 方法

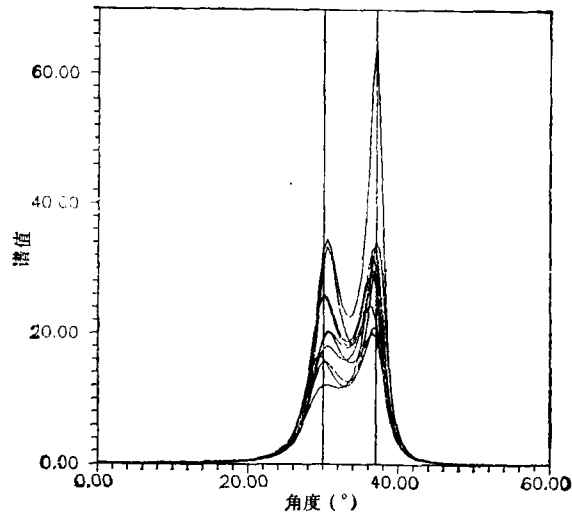


图 2 RD 方法

图 1 和图 2 分别是用本文方法实现 MUSIC 方法和 RD 法中谱峰搜索所得到的结果. 由于用代数方法所得到的结果与图 1 和图 2 所示结果差别太小,从图上看不出差别,故省略.

## 7 结 束 语

本文首次提出了用神经网络的方法来解决 DOA 估计中谱峰搜索问题,其最大的特点是充分利用了 Hopfield 线性规划网络的集体运算能力,克服了谱峰搜索的复杂性,同时保持了特征结构法的优点。

### 参 考 文 献

- [1] Schmidt R O. IEEE Trans. on AP, 1986, 34(3):276—280.
- [2] Kumaresan R, Tufts D W. IEEE Trans. on AES, 1983, AES-19(1):134—139.
- [3] Stoica P, Nehorai A. IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(5):720—741.
- [4] Stoica P, Nehorai A. MUSIC, Maximum Likelihood and Cramer-Rao Bound: Further Results and Comparison. IEEE Proc. ASSP, Glasgow: 1989, 2605—2608.
- [5] Kung S Y, Diamantaras K I. A Neural Network Learning Algorithm for Adaptive Principal Component Extraction (APEX). Proc. ICASSP, Albuquerque, New Mexico: 1990, 861—864.
- [6] Lin Sheng, Yin Qinye. Adaptive Principal Component Analysis via Neural Networks. IEEE International Conference on Signal Processing, China, 1993, 1224—1227.
- [7] Jha S, Durrani T. IEEE Trans. on SMC. 1991, SMC-21(5):1192—1201.
- [8] Lin Sheng, Yin Qinye. Performance Analysis of Hopfield Neural Networks for DOA Estimation. IEEE Proc. ISCAS, London: May 1994.
- [9] Lin Sheng, Yin Qinye. Bearing Estimation Without Using Complex Transform. IEEE Proc. ISCAS, Chicago: May 1993.
- [10] Tank D W, Hopfield J J. IEEE Trans. on CAS, 1986, CAS-33(5):533—541.
- [11] 杨宗凯,殷勤业,邹理和. 电路与系统学报, 1990,2(2): 97—107.

## APPROACH FOR APPROXIMATION OF SIGNAL SUBSPACE VIA NEURAL NETWORKS

Lin Sheng      Yin Qinye

(Department of Information & Control Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

**Abstract** A neural method to solve the orthogonality search problem arising in direction-of-arrival (DOA) estimation is proposed. The problem is mapped onto the energy function of the neural network as a linear programming problem. The most important feature of this method hinges upon the fact that the number of neurons in the network is linearly dependent on the number of sensors in the sensor array, rather than the discretization levels of parameter space. Theoretical analysis and simulation results show that the performance of the neural method is exactly equivalent to that of the standard MUSIC method or the real domain DOA estimation method.

**Key words** DOA estimation, Neural networks, Spectral estimation