文章编号:0494-0911(2004)04-0022-02 中图分类号:TU196 文献标识码:B

卡尔曼滤波模型的建立及其在施工变形测量中的应用

许国辉[1], 余春林[2]
(1. 广州大学 土木工程学院,广东 广州 510405; 2. 武汉煤矿设计院,湖北 武汉 430079)

Establishment of Kalman Filtering Model and Its Application in Construction Deformation Measurement

XU Guo-hui, YU Chun-lin

摘要: 卡尔曼滤波作为一种动态数据处理方法已在许多测量领域得到应用,就卡尔曼滤波方法在施工变形测量应用中,如何建立滤波模型和精度评定问题进行探讨,提出解决这些问题的方法,并通过一个实例说明这些方法的有效性。

关键词: 卡尔曼滤波;变形测量;滤波模型;单位权方差

卡尔曼滤波模型是动态测量中进行数据处理的常用模型,文献[1]从理论上探讨了卡尔曼滤波在变形测量中的应用方法,但在实际应用中,如何建立具体的滤波模型仍是一个值得探讨的问题。对于施工变形测量,由于受现场条件限制,监测点的多余观测值一般较少,有时甚至没有多余的观测值,因此,在实际应用中还应考虑如何对监测结果进行精度评定。本文先介绍卡尔曼滤波方法,然后就上述问题进行探讨,最后介绍一个应用实例。

一、卡尔曼滤波

离散化后卡尔曼滤波模型的典型形式为[2]

$$X_k = \Phi_{k,k-1}X_{k-1} + \Gamma_{k-1}\Omega_{k-1} \tag{1}$$

$$L_k = B_kX_k + \Delta_k \tag{2}$$

式(1)为卡尔曼滤波状态参数向量的动态方程,式(2)称为观测方程。L_K, X_K 分别为第 k 期监测的观测向量和状态参数向量,Ω_{k-1}为动态噪声,Δ_k 为观测噪声,它们均服从正态分布,$\Phi_{k,k-1}$为状态转移矩阵,B_k, Γ_{k-1}是系数矩阵。

随机模型为

$$\left.\begin{aligned}&E(\Omega_{k-1})=0, E(\Delta_k)=0\\&\mathrm{Cov}(\Omega_k,\Omega_k)=Q_{\Omega_k}, \mathrm{Cov}(\Delta_k,\Delta_k)=Q_{\Delta_k}\\&\mathrm{Cov}(\Omega_k,\Omega_j)=0, \mathrm{Cov}(\Delta_k,\Delta_j)=0, \mathrm{Cov}(\Omega_k,\Delta_j)=0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中,Q_{Ω_k}, Q_{Δ_k}分别为Ω_k 和 Δ_k 的协方差矩阵。状态参数向量的一步预测值 $\hat{X}_{k,k-1}$及其协方差阵 $\hat{Q}_{k,k-1}$为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{X}_{k,k-1}=\Phi_{k,k-1}\hat{X}_{k-1}\\&\hat{Q}_{k,k-1}=\Phi_{k,k-1}\hat{Q}_{k-1}\Phi^{\mathrm{T}}_{k,k-1}+\Gamma_{k-1}\hat{Q}_{\Omega_k}\Gamma^{\mathrm{T}}_{k-1}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

状态参数向量的滤波估值 $\hat{X}_k$ 及其协方差矩阵的递推公式为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{X}_k=\hat{X}_{k,k-1}+J_k\xi_k\\&\hat{Q}_k=\hat{Q}_{k,k-1}-J_kB_k\hat{Q}_{k,k-1}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中,

$$J_k = \hat{Q}_{k,k-1}B_k^{\mathrm{T}}(B_K\hat{Q}_{k,k-1}B_k^{\mathrm{T}} + \hat{Q}_{\Delta_k})^{-1} \tag{6}$$

$$\xi_k = L_k - B_k\hat{X}_{k,k-1} \tag{7}$$

上述各式中,$\hat{Q}_{\Omega_k}$和 $\hat{Q}_{\Delta_k}$分别表示 Q_{Ω_k}和 Q_{Δ_k}的先验值,J_k 为卡尔曼滤波增益矩阵,ξ_k 为预测残差向量,其协方差矩阵为

$$\hat{Q}_{\xi_k} = B_k\hat{Q}_{k,k-1}B_k^{\mathrm{T}} + \hat{Q}_{\Delta_k} \tag{8}$$

二、滤波模型的建立

在变形测量中,常用的卡尔曼滤波模型为($\alpha-\beta$)和($\alpha-\beta-\gamma$)模型[1],这两种模型都是将监测点的变形位移过程看成是一个随机过程。所谓($\alpha-\beta$)滤波模型,是认为在变形测量过程中,监测点位移速度的均值是不变的,并在滤波中将监测点的位置及其位移速度作为状态参数,将位移加速度视作动态噪声,其动态方程为

$$\begin{bmatrix}x_k\\v_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & t_{k-1}\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{k-1}\\v_{k-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}t_{k-1}^2\\t_{k-1}\end{bmatrix}\Omega_{k-1} \tag{9}$$

($\alpha-\beta-\gamma$)滤波模型则是认为在变形测量过程中,监测点位移加速度的均值是不变的,滤波中将监测

收稿日期: 2002-07-02; 修回日期:2003-05-16
作者简介:许国辉(1960-),男,湖南岳阳人,高级工程师,主要从事工程测量及其数据处理。

点的位置及其位移速度和加速度都作为状态参数，将加速度变化率视作动态噪声，其动态方程为

$$\begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_{k-1} & \frac{1}{2}t_{k-1}^2 \\ 0 & 1 & t_{k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ v_{k-1} \\ a_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6}t_{k-1}^3 \\ \frac{1}{2}t_{k-1}^2 \\ t_{k-1} \end{bmatrix} \Omega_{k-1} \tag{10}$$

式中，x_k，v_k，a_k 分别为监测点的坐标、位移速度和加速度，Ω_{k-1}为动态噪声，t_{k-1}表示时间。

在变形测量中，观测方程一般是已知的，观测噪声的随机模型也可通过一定的方法获得，较难确定的是状态参数的动态方程及动态噪声的随机模型。在样本观测值较多的条件下，一般是先假定状态参数的动态方程为式(9)或式(10)，然后根据样本观测值按时间序列分析方法对动态噪声 Ω_{k-1}的自相关函数进行统计检验[3]，以确定假定的动态方程是否合适。但在施工变形测量中，总的监测期数一般不是很多，这时可采用一种较简单的分析方法，即：在经过若干期监测（总监测期数的$\frac{1}{3}\sim\frac{1}{2}$）后，先计算出监测点各期的坐标位置以及相邻两期之间坐标位移的速度、加速度和加速度变化率，然后对监测点各期间的位移速度和加速度进行分析（例如通过作图进行分析），并按照节省参数的原则建立动态方程。当各期的速度在其平均速度的两侧波动变化，无明显的增、减速迹象时，采用($\alpha-\beta$)模型，并根据各期的加速度估算出动态噪声的方差；当各期的速度有增、减速迹象，而其加速度无明显的增、减速迹象时，则采用($\alpha-\beta-\gamma$)模型，并根据各期加速度的变化率估算出动态噪声的方差。

三、精度评定

当精确已知观测噪声和动态噪声的随机模型时，式(5)之第2式就是状态参数的协方差矩阵，这时不需要专门进行精度评定。但在实际应用中，所采用的先验值 $\hat{Q}_\Omega$ 和 $\hat{Q}_\Delta$ 与其实际值 Q_Ω 和 Q_Δ 可能不完全一致，有时可能相差甚远，这时 $\hat{Q}_\Omega$ 和 $\hat{Q}_\Delta$ 的含义与其说是协方差矩阵不如说是权逆矩阵更为适当，相应地式(5)中的 $\hat{Q}_k$ 就是 $\hat{X}_k$ 的权逆矩阵，而不是 $\hat{X}_k$ 的协方差矩阵，因此有必要计算单位权方差 σ^2 的估计值，以便获得状态参数估值的协方差矩阵。

对于第 k 期滤波，单位权方差 σ^2 可按下式估计[3]

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\xi_k^{\mathrm{T}}\hat{Q}_{\xi_k}^{-1}\xi_k}{n_k} \tag{11}$$

式中，n_k 为第 k 期滤波观测值的个数，$\hat{Q}_{\xi_k}$为 ξ_k 的权逆矩阵，由式(8)计算。这时状态参数向量滤波值的协方差矩阵 $\hat{\hat{Q}}_k$为

$$\hat{\hat{Q}}_k = \hat{\sigma}_k^2\hat{Q}_k \tag{12}$$

显然，若 $\hat{\sigma}_k^2=1$，则 $\hat{Q}_k=\hat{\hat{Q}}_k$，这时说明滤波所采用的先验值 $\hat{Q}_\Omega$ 和 $\hat{Q}_\Delta$ 与其实际值 Q_Ω 和 Q_Δ 吻合得较好。

在施工变形测量中，n_k 往往较小，这时按式(11)求得的 $\hat{\sigma}_k^2$ 可能不稳定。理想的方法是通过平滑求得各期状态参数向量的平滑值，并根据平滑后的残差向量来估计 σ^2，但平滑计算较复杂，其计算量也很大。为了简化计算，同时消除 $\hat{\sigma}_k^2$ 值的不稳定性，可将式(11)计算的各期 $\hat{\sigma}_k^2$ 值，按权（各期观测值的个数）取平均值近似地计算 σ^2 的估值$\hat{\hat{\sigma}}_k^2$。若以 N_k 表示第 k 期以前（包括第 k 期）各期观测值个数之和，W_k 表示第 k 期以前（包括第 k 期）各期 $\xi_k^{\mathrm{T}}\hat{Q}_{\xi_k}^{-1}\xi_k$ 之和，经简单推导可得下列计算公式：

$$\left.\begin{aligned} N_k &= N_{k-1}+n_k \\ W_k &= W_{k-1}+\xi_k^{\mathrm{T}}\hat{Q}_{\xi_k}^{-1}\xi_k \\ \hat{\hat{\sigma}}_k^2 &= W_kN_k^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

当 $k=1$ 时，取 $N_0=0$，$W_0=0$。由于 $\hat{\sigma}_k^2$ 是σ^2 的无偏估计，因此$\hat{\hat{\sigma}}_k^2$ 也是 σ^2 的无偏估计。

四、算 例

本算例为广州市新增步桥的施工变形监测。为了监测新增步桥的施工对其附近老增步桥的影响，在老增步桥上共布设了8个监测点，采用边角交会法和极坐标法进行了28期平面位移监测。每期监测时，各监测点的观测值数量一般为2~4个，最多时为6个观测值。

为了建立滤波模型，先按静态数据处理方法计算出前10期各点的坐标，然后根据各点的坐标值计算其在相邻两期之间的位移速度和加速度。通过作图分析，各点的速度都在其平均速度的两侧波动变化，没有明显的增、减速迹象，所以8个监测点均采用($\alpha-\beta$)滤波模型。状态参数的初始值由前两期观测结果确定，从第3期开始进行滤波处理。在滤波过程中，大部分监测点在各期滤波时其单位权方差值$\hat{\hat{\sigma}}_k^2$ 比较稳定，只有少部分监测点在最初几期

（下转第42页）

理论与实践说明:

1. 卵形曲线测量的坐标检验是从套切几何结构特征到点位坐标的检验全过程。实践证明,这种检验全过程反映卵形曲线检验不只是一般数据的比较,而是整个线型结构规律和参数关系的全面分析。由此可见检验全过程是提供可靠卵形曲线空间点位数据的基础。

2. 应用实例。$R_1 : R_2 > 38$,$\Delta p : R_1 \approx 0.004$,$M$ 点的坐标拟合误差 $\Delta x \leqslant 0.1$ mm,$\Delta y \leqslant 0.6$ mm。坐标检验提供的这种高精度的卵形曲线的标准点位坐标,得益于卵形曲线数学模型的应用,得益于浮动拟合参数和中插回旋曲线长度联合调整措施的采用,其结果不仅解决卵形曲线的某些应用限制[3],同时有效地保证卵形曲线空间点位数据的准确性。

3. 卵形曲线测量的坐标检验有利于路线设计与测量数据检验相结合。实践证明,卵形曲线测量的坐标检验全过程所涉及的技术思路可应用于“以曲为主”的路线勘测设计。

参考文献:

[1] 张坤宜.交通土木工程测量[M].北京:人民交通出版社,2000.246-258.

[2] 张坤宜.同向缓和复曲线数学模型的探讨[J].北京:公路,1999,(9).

[3] 张廷楷,张金水.道路勘测设计[M].上海:同济大学出版社,1998.88.

(上接第 23 页)

滤波时,其单位权方差值有些波动,但随着滤波期数的增多而渐趋稳定。例如,1 号测点在前 10 期滤波时,$\hat{\sigma}_k^2$ 值在 0.22 ~ 1.57 mm 之间波动(见表 1),第 10 期之后 $\hat{\sigma}_k^2$ 值稳定在 1.05 ~ 1.65 mm 之间。由此可见,当各期参与滤波的观测值较少时,滤波的总期数不宜太少,以保证精度评定结果的可靠性。

表 1 1 号测点各期滤波的单位权方差值

监测期数	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
单位权方差/mm	0.43	0.22	0.25	0.34	0.69	0.74	1.57	1.46	1.32	1.21	1.11	1.05	1.13
监测期数	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
单位权方差/mm	1.19	1.25	1.19	1.13	1.15	1.19	1.60	1.65	1.59	1.53	1.56	1.53	1.53

表 2 各点第 28 期滤波的单位权方差

点 名	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\sigma}_k^2$/mm	1.53	0.87	0.94	1.49	0.93	1.31	1.40	1.14

表 2 是第 28 期(最后一期)滤波时各点的单位权方差 $\hat{\sigma}_k^2$ 的计算值,根据表 2 中结果可得出以下结论:

1. 各点的单位权方差值 $\hat{\sigma}_k^2$ 在 0.8 ~ 1.5 mm 之间,与其理论值1 mm相差很小,说明按本文所介绍的方法建立滤波模型是可行的,其模型基本能反映监测点的实际变形情况;

2. 各点的单位权方差值均不等于其理论值 1 mm,因此,在应用卡尔曼滤波方法进行数据处理时,有必要计算单位权方差值。

参考文献:

[1] 刘大杰,于正林. 动态测量系统与卡尔曼滤波[J].测绘学报,1988,17(4):254-262.

[2] 崔希璋,於宗俦,陶本藻,等. 广义测量平差[M].北京:测绘出版社,1982.

[3] 陈玉祥,张汉亚. 预测技术与应用[M]. 北京:机械工业出版社,1985.

[4] 许国辉,刘 跃. 卡尔曼滤波的精度评定[J].广州大学学报,2002,2(5):25-27.