

一种寻求 MST 的分布式算法

张伟, 李鸥

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450002)

摘要:为解决最小生成树(MST)算法中的 NP 完全问题,使之适应实际网络环境的性能需求,提出一种寻求 MST 的分布式算法。该算法建立在 MST 性质的基础之上,利用数据融合逐步构建网络的 MST。此过程不再需要传统洪泛连接信息,最多只需 $3 \times \ln n$ 次的信息交互,且去除了冗余信息。该算法具有收敛速度快、资源消耗低的特点。

关键词:最小生成树;分布式算法;数据融合

Distributed Algorithm for Searching MST

ZHANG Wei, LI Ou

(Institute of Information Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450002)

【Abstract】To resolve the NP-complete problem of Minimum Spanning Tree(MST) calculations and meet the performance requirements in actual network environment, a distributed algorithm for searching the MST is proposed. The algorithm is based on the characteristic of MST and utilizes data fusion to establish MST of the network gradually. The algorithm requires only $3 \times \ln n$ times of information exchanges at most and removes off the redundant information without conventional flooding link-information. Therefore, it has the advantages of high convergence speed and low consumption of resources.

【Key words】Minimum Spanning Tree(MST); distributed algorithm; data fusion

1 概述

对于给定网络的连通图 G ,生成树各边的权值总和作为生成树的权,权最小的生成树称为图 G 的最小生成树(Minimum Spanning Tree, MST)。在网络中,把权值作为节点的传输代价,MST就是该网络的最小代价生成树、最优Steiner树。MST具有重要的应用价值,因为MST是以下路由选择的最佳期望:(1)多播路由;(2)基于内容的数据发布与订阅^[1]路由;(3)在以数据为中心(DC)的网络中,数据融合路由。

本文给出对MST的描述:设图 G 是由 V 和 E 两个集合所组成的二元组,记为 $G=(V, E)$,其中, V 是节点的非空有限集合; E 是 V 中能够直接通信的节点对的集合。网络中 V, E 都不是空集。不失一般性,可认为 G 是无向图。 E 中的每条边 (u, v) 都有一个权值 $c(u, v)$ 。 T 是最小生成树构成的集合, $C(T)$ 是最小生成树权值总和。以下是2种求解MST的经典算法:

(1)Prim算法。从一个具有源节点的树开始,每步增加1个节点。增加的节点到树中已存在的任意节点的连接代价都是最低的。算法复杂度为 $O(n^2)$ 。

(2)Kruskal算法。从一个只有顶点而无边的非连通图开始,每步增加1个边。增加的边权值小、连通当前非连通的顶点但不形成回路。算法复杂度为 $O(n^2)$ 。

与其他集中式算法一样,它们运算的前提是:节点已经知道了所有节点的连接权值信息,即每个节点洪泛连接权值信息。由于寻求最小生成树是一个NP完全问题^[2],因此出现了一些基于前提的近似算法:如Takahashi-Matsuyama算法^[3]、KMB启发式算法^[4],还有一些利用“无线多播优势”的算法,它们大多是集中式算法。本文提出一种基于MST性质的分布式构造算法,它的假设前提如下:

(1)在构造MST过程中,网络拓扑不变。

(2)每个节点有一个唯一的ID并可获取它的一跳节点ID和对应连接边权值信息。

(3)节点发送的信息能够准确无误地传送到它周围的每一个一跳节点。

以上条件在实际应用中易满足。

2 理论基础

本算法的理论基础是MST的一条性质和一条推论,下面给出定义并证明。

性质:设 $G=(V, E)$ 是一个连通网络, U 是顶点集 V 的一个真子集。若 (u, v) 是 G 中所有一个端点在 $U(u \in U)$ 里、另一个端点不在 U (即 $v \in V-U$)里的边中具有最小权值的一条边,则一定存在 G 的一棵最小生成树包括此边 (u, v) 。

证明:用反证法,假设 G 中任何一棵MST都不含最小权值的边 (u, v) 。则若 T 是 G 的一棵MST,则它不含此边。

由于 T 是包含了 G 中所有顶点的连通图,因此 T 中必有一条从 $u(u \in U)$ 到 $v(v \in V-U)$ 的路径 P ,且 P 上必有一条边 (u', v') , $(u', v') \neq (u, v)$,否则, u 和 v 不连通。当把 (u, v) 加入树 T 时,该条边和 P 将形成一个回路。删掉边 (u', v') 后,回路亦消除,由此可得另一生成树 T' 。 T' 和 T 的差别仅在于 T' 用具有最小权值的边 (u, v) 取代了 T 中权值可能更大的边 (u', v') 。因为 $c(u, v) < c(u', v')$,所以 $C(T') = C(T) + c(u, v) - c(u', v') < C(T)$ 。因此 T' 亦是 G 的MST,它包含边 (u, v) ,这与假设矛盾。所

基金项目:国家发改委 CNGI 专项课题基金资助项目(CNGI-04-10-1D)

作者简介:张伟(1982-),男,硕士研究生,主研方向:计算机网络与通信;李鸥,教授、博士生导师

收稿日期:2007-10-20 **E-mail:** zhanwei1@hotmail.com

以，MST 性质成立。

推论：设 $G=(V, E)$ 是一个连通网络，对任一顶点 $v(v \in V)$ 和集合 U (除 v 外其他顶点构成的集合)，即它们的关系是： $U \subset V, v \in V, v \notin U, \{v\} \cup U = V$ 。存在一个顶点 $u(u \in U)$ (U 中到 v 权值最小的节点)，具有到顶点 v 的最小权值 $c(u, v)$ ，若此值唯一，则边 (u, v) 必在最小生成树上；若不唯一，则这些具有最小权值的边必有一个在最小生成树上。

证明：定义 $\{v\}=V-U$ ，即 v 是集合 $V-U$ 中的唯一顶点。 (u, v) 是顶点 v 到 U 中任一顶点权值中具有最小权值的边。设 T 是 G 的任一 MST，由于 T 是包含了 G 中所有顶点的连通图， T 中必有一条从 $u(u \in U)$ 到 $v(v \in V-U)$ 的路径 P ，且 P 上必有一条边 (u', v') ， $(u', v') \neq (u, v)$ ，否则 u 和 v 不连通。当把 (u, v) 加入树 T 时，该条边和 P 将形成一个回路。删掉边 (u', v') 后回路亦消除，由此可得另一生成树 T' ，且 T' 和 T 的差别仅在于 T' 用具有最小权值的边 (u, v) 取代了 T 中权值可能更大的边 (u', v') ，于是有 $c(u, v) \leq c(u', v')$ ， $c(T') = c(T) + c(u, v) - c(u', v') \leq c(T)$ 。要满足此式，在最小权值唯一时，必有 (u', v') 与 (u, v) 重合，在最小权值不是唯一时，必有 $c(u', v') = c(u, v)$ 。即命题成立。

3 理论应用

为描述方便，先定义 2 个名词：

本地最小生成树(LMST)^[5]：选择网络拓扑的一部分来考虑，是此子网的最小生成树。

对外连接权值表：格式为 (XYn, \dots) ，是本 LMST 中所有节点到其他 LMST 中节点的连接权值信息。

按照 MST 的性质和推论可以得出：对于图中任一 LMST 与剩余节点构成的最小代价生成树的连通边必是此 LMST 中到其他所有节点连接权值最小的边之一；对于图中任一节点 $v(v \in V-U)$ 与其他节点构成的最小代价生成树的连通边必是节点 v 到其他所有节点连接权值最小的边之一。于是推导出如下构造 MST 的分布式算法。

网络对应的连通图如图 1 所示。

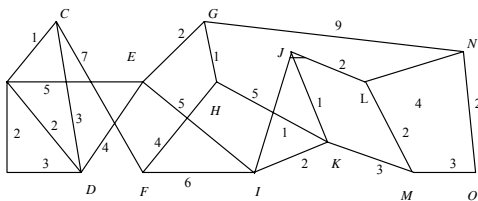


图 1 原始连通图

让每个节点独立运行该算法，自己去找连通边，如图 2 所示，构造出来的每一个 LMST 再当作一个特殊节点，继续运行该算法去找 LMST 之间的连通边如图 3 所示，这样经过有限次整合，就可以得到想要构造的最小代价生成树，如图 4 所示。

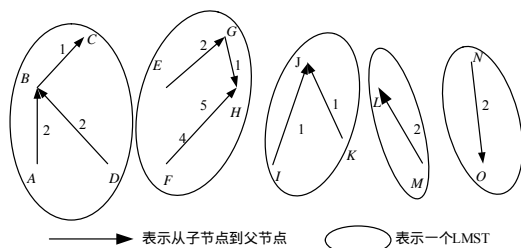


图 2 第 1 次整合

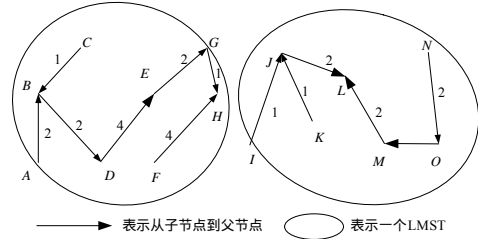


图 3 第 2 次整合

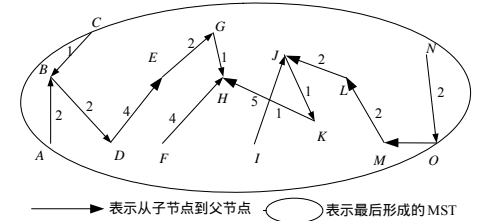


图 4 第 3 次整合

4 存在的问题

- (1)冲突问题。每个节点各自找连通边，2 个节点找的是同一个连通边时，哪个节点作为根节点；一个节点同时拥有几条相等的最小权值边。
- (2)回环问题。网络上的节点各自找连通边时，刚好形成一个回环。
- (3)算法终止时机问题。每个节点独立算法到何时结束。
- (4)LMST 根节点的转换问题。当前 LMST 到下一步整合时，当前根节点不一定在 LMST 找到的连通边上，这时需要当前 LMST 根节点转换。

为解决问题用到的数据包格式描述如下：

- (1)整合请求信息(标志位、本节点 ID、请求节点 ID、边权值、本节点所属 LMST 的 ID)；
- (2)请求回应信息(标志位、本节点 ID、请求节点 ID)；
- (3)对外连接信息(标志位、对外连接权值表)。

解决以上问题采用的具体方法如下：

- (1)冲突问题。对于根节点的确定问题，采用如图 5 所示的避免冲突方法。这一过程 DATA 的接收节点作为根节点，请求节点作为枝或者叶子节点，当节点 B 收到请求后就不再发出自己的请求，若已发出，则发生冲突，采用二进制退避算法，重新请求。请求成功，就把自己的 DATA 发给请求到的节点，请求到的节点收到 DATA，去掉以自己作为根节点的 LMST 上节点内部连接信息，保留其他连接信息，作为融合后的对外连接信息。对于有 2 个相等值问题，采用随机挑取一条边来构造 MST。

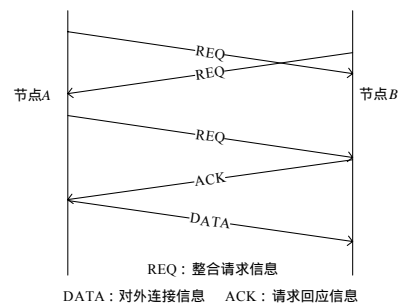


图 5 节点间信息交互示意图

- (2)回环。由于采用了上面的方法，节点请求成功后就不再接收相等权值的请求且每一步根节点都会去除内部节点间

的连接,因此避免了回环的发生。

(3)节点算法终止时机。当根节点不再有对外连接信息时,就完成了连通图的MST的构造。这时根节点沿MST发送完成消息,进行通告。

(4)LMST根节点转换。当节点收到对外连接信息时,将其发送节点作为子节点,将自己要转发对外连接信息的节点作为父节点。

5 算法描述

结合整体网络MST构造方法,采用以上的解决方案,得到如下节点运行的算法:

(1)获取本节点对外连接信息,取最小权值边,若还没收到整合请求信息或者收到但请求的权值大于取得的最小权值,就向最小权值边的节点发出请求并等待回应,若已收到且请求的权值与取得的最小权值相等,不再发出请求并回应信息。

(2)节点收到整合请求信息,若大于当前取得的最小权值,立即回应信息,若等于当前取得的最小权值或没发生冲突,也给予回应信息,若发生冲突,则不予回应信息。

(3)节点收到回应信息,就把自己的对外连接信息发给回应信息的节点,并把此节点当作自己的父节点。

(4)节点收到对外连接信息,就加入到当前获取的对外连接信息中,并对数据进行融合,去除内部节点间的连接信息,只保留对外部节点的连接信息,并把发送对外连接信息的节点加入到自己的子节点中。

6 算法实现

节点算法共用2个线程来实现:主线程负责控制接收数据线程的运行、整合请求信息的发起、对外连接信息的融合、父子节点的确立;接收数据线程在主线程控制下负责对收到的各种数据信息作出响应。

主线程在将接收数据线程启动后,依据对外连接信息表发送整合请求、完成数据融合;接收数据线程主要维护一个对外连接信息表,按照接收的数据类型,及时以标志和信息表的形式通告主线程或者作出响应并及时更新上下层节点和对外连接信息。

主线程完成请求、融合并发送对外连接信息后就完成了本节点的接入工作,接收数据线程仍要负责数据的转发和根节点的转换功能,直到构造MST工作的完成。本节点完成接入工作,就已获得融合数据发送的下一跳节点(父节点),构

(上接第130页)

选举的合理性,能充分利用能量较大的节点。并采用“参考能量”作为剩余能量的参照系,参考能量的计算采用分布式算法,系统运行后无须从外界获得动态调整的全局参数。参考能量的计算还是自适应的,保证剩余能量和参考能量的比值基本稳定在一个区间内,不会退化到直接以概率决定。另外,簇首选择不需要迭代。(3)功耗和能量等在实际运行中测量调整,而非根据预定的数学模型进行推算,因此,对现场的变化可以作出恰当的反应。

参考文献

[1] Heinzelman W R, Chandrakasan A, Balakrishnan H. Energy-efficient Communication Protocol for Wireless Microsensor Networks[C]//Proceedings of the 33rd Annual Hawaii International

造LMST每进行一步,就进一步加大LMST的范围,直到主线程收到MST完成通告,结束2个线程。至此算法结束。

7 算法分析

本算法是一种分布式算法,它的收敛速度与节点间连接权值的离散程度有关,权值的方差越大,收敛速度越快。最恶劣的情况是在方差为0时,比如在一个所有代价相等的网络中,该算法需要每2个节点(包含LMST)进行一次整合,经过 $3 \times \lg n$ (n 为节点的个数)次交互完成MST的构造;最好的情况,可以一次完成MST的构造。若采用集中式算法,在最理想的情况下,洪泛节点权值信息到每个节点至少需要进行 $n \times (n-1)$ 次信息交互,然后每个节点再运行算法,得到MST。在交互信息中,本算法采用了一定的数据融合思想,在父节点上对数据进行了融合,去除了LMST内部节点间的信息,减少了通信资源的消耗。而集中式算法不能对洪泛的数据进行融合。实验表明:本算法具有收敛速度快、耗费资源较少的优点。

8 结束语

本文提出一种新的构造MST的分布式算法,从局部到整体,逐步在给定连通网络上构造一个MST。该方法让每个节点独立运行算法,节点间(包括LMST间)不用同步,极大地加快了分簇的收敛速度,在分簇过程中,利用局部MST传递权值信息,运用数据融合减少节点洪泛权值信息的资源消耗。与集中式算法不同的是,本文利用了MST的性质得出分布式算法,并利用生成的LMST融合局部数据,加快了算法的收敛速度并减少了需要传递的数据量。

参考文献

[1] Karl H, Willig A. Protocols and Architectures for Wireless Sensor Networks[M]. 邱天爽,译.北京:电子工业出版社,2007:289.
[2] Crescenzi P, Kann V. A Compendium of NP Optimization Problems[EB/OL]. (2004-02-04). <http://www.nada.kth.se/~viggo/www.compendium/wwwcompendium.html>.
[3] Takahashi H, Matsuyama A. An Approximate Solution for Steiner Problem in Graphs[J]. Mathematica Japonica, 1980, 24(6): 573-577.
[4] Kou L, Markowsky G, Berman L. A Fast Algorithm for Steiner Trees[J]. Acta Informatica, 1981, 15(1): 141-145.
[5] 孙利民,李建中,陈渝,等.无线传感器网络[M].北京:清华大学出版社,2005.

Conference on System Sciences. Hawaii, USA: [s. n.], 2000.

[2] Culler D, Estrin D, Srivastava M. Overview of Sensor Networks[J]. Computer, 2004, 37(8): 41-49.
[3] Younis O, Fahmy S. HEED: a Hybrid, Energy-efficient, Distributed Clustering Approach for Ad Hoc Sensor Networks[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2004, 3(4): 366-379.
[4] Heinzelman W B, Chandrakasan A P, Balakrishnan H. An Application-specific Protocol Architecture for Wireless Microsensor Networks[J]. IEEE Trans. on Wireless Communications, 2002, 1(4): 660-670.
[5] Varga A. The OMNeT++ Discrete Event Simulation System[C]//Proc. of ESM'01. Prague, Czech Republic: [s. n.], 2001.