

等离子体圆柱波导慢电磁波的激励¹

官玉彬 王文祥

(电子科技大学高能电子学研究所 成都 610054)

摘 要 本文在考虑等离子体厚度效应的情况上, 详尽地推导了充填圆环状等离子体的圆柱波导中 TM 模慢电磁波的色散方程; 利用相对论空间电荷波理论, 导出了相对论电子注在轴向磁场引导下沿等离子体内表面传输时的空间电荷波方程; 求得了电子注和慢空间电荷波相互作用的线性增益和频率漂移; 讨论了等离子体厚度、密度对色散特性和互作用增益的影响。

关键词 等离子体, 色散特性, 互作用增益, 频率漂移

中图分类号 TN814

1 引 言

文献 [1-3] 提出了一种利用相对论电子注产生高功率微波的新方案, 其相互作用区域为充填有等离子体层的圆柱波导, 利用其中的慢空间电荷波与相对论电子注的相互作用, 能够产生高功率微波。这种结构可以作为相对论返波管的慢波系统, 模拟结果^[4]表明, 在某些特定的等离子体频率下, 注-波相互作用效率可由原来的 5% 提高到 35%, 同时还大大提高了真空中的空间电荷限制流。Laticc 等人^[5]在不考虑等离子体厚度时, 对这种结构作了分析。而实际上, 等离子体总是有一定厚度的, 忽略厚度影响, 必将使分析结果存在偏差。本文首先在考虑等离子体厚度影响的情况下, 利用边界条件, 分析 TM 模慢电磁波的激励, 而后引入相对论电子注, 利用相对论空间电荷波理论和阶跃条件, 分析注-波相互作用的不稳定性, 求解其线性增益和频率漂移量, 对等离子体厚度、等离子体密度和电子束能量等参数对增益的影响作了深入讨论, 得到了一些对实际有用的分析结果。

2 色散特性

在如图 1 所示的轴对称结构中, 一半径为 b 的圆波导充填有数密度为 N_{0p} 的等离子体圆环, 其内半径为 r_0 , 外半径为 a 。该等离子体层相当于相对介电常数为 $1 - (\omega_{p0}/\omega)^2$ 的介质层, 其中 ω 为波的角频率, $\omega_{p0} = N_{0p}e^2/(m_0\epsilon_0)$ 为等离子体频率, m_0 为电子静止质量, ϵ_0 为真空介电常数, e 为电子电荷。

慢 TM 波的波动方程为

$$\partial^2 E_z / \partial r^2 + (1/r)(\partial E_z / \partial r) - \epsilon_r k_c^2 E_z = 0, \quad (1)$$

¹ 1994-07-11 收到, 1995-01-04 定稿

式中 $k_c^2 = k^2 - (\omega/c)^2$, k_c 为横向截止波数, k 为纵向波数, c 为光速. 相对介电常数 ϵ_r 为

$$\epsilon_r = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq r_0, \quad a \leq r \leq b; \\ 1 - (\omega_{p0}/\omega)^2, & r_0 \leq r \leq a. \end{cases} \quad (2)$$

当 $\omega_{p0} < \omega$ 时, 没有增长的慢波解, 故我们只考虑 $\omega_{p0} > \omega$ 的情况, 其场结构可表示为

$$E_z^I = A^I I_0(k_c r), \quad 0 \leq r \leq r_0; \quad (3)$$

$$E_z^{II} = A^{II} J_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c r) + B^{II} N_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c r), \quad r_0 \leq r \leq a; \quad (4)$$

$$E_z^{III} = A^{III} I_0(k_c r) + B^{III} K_0(k_c r), \quad a \leq r \leq b; \quad (5)$$

其中 $\epsilon_p = -\epsilon_r$; J_0, N_0 分别为第一类和第二类贝塞尔函数; I_0, K_0 则为第一类和第二类变态贝塞尔函数.

利用电场和磁场的连续性条件, 可得到

$$\left. \begin{aligned} A^I I_0(k_c r_0) &= A^{II} J_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) + B^{II} N_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0), \\ A^{II} J_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c a) + B^{II} N_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c a) &= A^{III} I_0(k_c a) + B^{III} K_0(k_c a), \\ A^{III} I_0(k_c b) + B^{III} K_0(k_c b) &= 0, \\ \sqrt{\epsilon_p} [A^{II} J_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c a) + B^{II} N_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c a)] &= A^{III} I_0'(k_c a) + B^{III} K_0'(k_c a), \\ \sqrt{\epsilon_p} [A^{II} J_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) + B^{II} N_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0)] &= A^I I_0'(k_c r_0). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

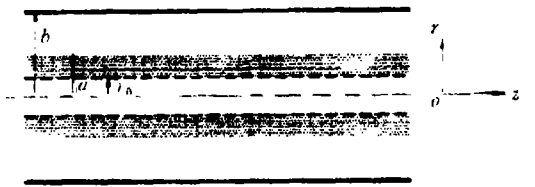


图 1 填充等离子体的圆波导

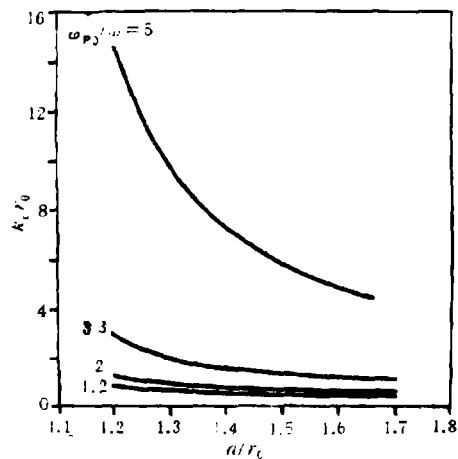


图 2 色散曲线 ($b/r_0 = 2$)

(6) 式有解, 即 $A^I, A^{II}, B^{II}, A^{III}, B^{III}$ 不同时为 0 的条件是

$$\begin{pmatrix} I_0(k_c r_0) & -J_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) & -N_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) & 0 & 0 \\ 0 & J_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c a) & N_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c a) & -I_0(k_c a) & -K_0(k_c a) \\ 0 & 0 & 0 & I_0(k_c b) & K_0(k_c b) \\ 0 & \sqrt{\epsilon_p} J_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c a) & \sqrt{\epsilon_p} N_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c a) & -I_0'(k_c a) & -K_0'(k_c a) \\ I_0'(k_c r_0) & -\sqrt{\epsilon_p} J_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) & -\sqrt{\epsilon_p} N_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (7)$$

经过繁杂的推导，即可求得 TM 模慢电磁波的色散方程

$$I_0'(k_c r_0)/I_0(k_c r_0) = \sqrt{\epsilon_p} J_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) Q - N_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) P / [J_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) Q - N_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) P], \quad (8)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} P &= I_0(k_c b)U - K_0(k_c b)V, \\ Q &= I_0(k_c b)R - K_0(k_c b)S, \\ U &= J_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c a)K_0'(k_c a) - \sqrt{\epsilon_p} J_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c a)K_0(k_c a), \\ V &= J_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c a)I_0'(k_c a) - \sqrt{\epsilon_p} J_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c a)I_0(k_c a), \\ R &= N_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c a)K_0'(k_c a) - \sqrt{\epsilon_p} N_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c a)K_0(k_c a), \\ S &= N_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c a)I_0'(k_c a) - \sqrt{\epsilon_p} N_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c a)I_0(k_c a). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

取 $b/r_0 = 2$ ，对 (8) 式进行数值计算，结果如图 2。

由图 2 可看出，归一化的特征解 $k_c r_0$ 与等离子体厚度、等离子体频率有极为密切的关系。当等离子体频率给定时， $k_c r_0$ 随 a/r_0 即等离子体厚度的增加而减小，等离子体频率越高，等离子体厚度的影响越强烈。当 $\omega_{p0}/\omega \rightarrow 1$ 时，等离子体厚度对 $k_c r_0$ 不再发生影响，当等离子体厚度一定时， $k_c r_0$ 随等离子体频率也就是随等离子体密度的增加而增加。

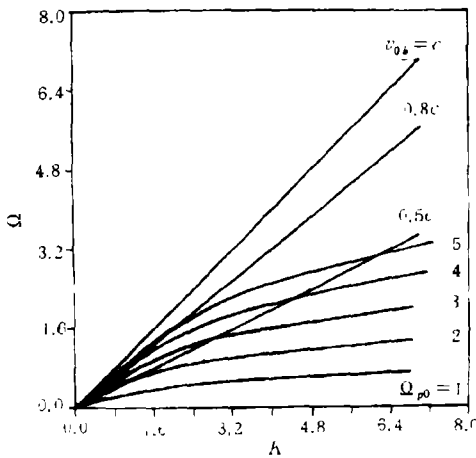


图 3 TM 模慢空间电荷波的布里渊图 ($b/r_0 = 2, \Delta = 5$)

给定 ω_{p0} 的值，即可计算出 $k \sim \omega$ 的关系，用 r_0 归一化，令 $K = kr_0$ ， $\Omega_{p0} = \omega_{p0}r_0/c$ ， $\Omega = \omega r_0/c$ ， $\Delta = \omega_{p0}/\omega$ ，式中 c 为光速，则有

$$K^2 = (k_c r_0)^2 + \Omega_{p0}^2 / \Delta^2, \quad (10)$$

给定不同的 Ω_{p0} ，在 $\Delta = 5$ 时，计算得到的 $K \sim \Omega$ 曲线见图 3。由图 3 可以看出， $\Omega_{p0} = 5$ 时的慢空间电荷波与初速度为 $v_{0b} = 0.8c$ 的电子注以及 $\Omega_{p0} = 2$ 时的慢空间电荷波与初速度为 $0.5c$ 的电子注都有比较宽的相互作用区域。

3 不稳定性分析

在上述充填等离子体圆环的圆柱波导中引入一薄层电子注, 令相对论电子注的密度为 $n_{0b} = N_{0b} r_0 \delta(r - r_0)$, N_{0b} 为电子注的数密度, 沿等离子体内表面以 $v_{0b} \hat{z}$ 的速度运动, 则电子注中产生的扰动电荷密度和扰动电流密度分别为

$$\left. \begin{aligned} n_b &= n_{0b} e k \epsilon_0 E_z / [i \gamma_0^3 (\omega - k v_{0b})^2], \\ J_{bz} &= -n_b e \omega / k, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中 i 代表虚数, γ_0 为相对论因子。这时, 波方程应变为以下形式

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \epsilon_r k_c^2 E_z = -\frac{\omega_{pb0}^2 k_c^2 r_0 \delta(r - r_0)}{\gamma_0^3 (\omega - k v_{0b})^2} E_z, \quad (12)$$

式中 $\omega_{pb0} = N_{0b} e^2 / (m_0 \epsilon_0)$ 为电子注等离子体频率。

用 $r dr$ 乘 (12) 式的两边, 沿整个电子注横截面积分, 得到 $r = r_0$ 时的阶跃条件

$$\left. \frac{\partial E_z^{II}}{\partial r} \right|_{r_0+\epsilon} - \left. \frac{\partial E_z^I}{\partial r} \right|_{r_0-\epsilon} = -\frac{\omega_{pb0}^2 k_c^2 r_0 E_z^I}{\gamma_0^3 (\omega - k v_{0b})^2}, \quad (13)$$

其中 ϵ 为一趋于 0 的小正数。

利用 (6) 式和 (13) 式, 就可得到引入无限薄电子注时的空间电荷波方程

$$D(\omega, k) (\omega - k v_{0b})^2 = \omega_{pb0}^2 k_c r_0 / \gamma_0^3, \quad (14)$$

式中

$$D(\omega, k) = \frac{I_0'(k_c r_0)}{I_0(k_c r_0)} - \sqrt{\epsilon_p} \frac{J_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) Q - N_0'(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) P}{J_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) Q - N_0(\sqrt{\epsilon_p} k_c r_0) P}. \quad (15)$$

要求得不稳定模式的最大增长率, (14) 式的右边应趋于 0, 其相应的谐振频率为

$$\omega_r \approx k v_{0b}. \quad (16)$$

因为 $\omega_{pb0} \neq 0$, 故令

$$\omega = \omega_r + \delta, \quad (17)$$

这里 $D(\omega_r, k) \approx 0$, 在 (ω_r, k) 附近进行泰勒级数展开, 并略去 δ 的二阶以上小量, 就得到

$$D(\omega, k) = D(\omega_r, k) + \partial D / \partial \omega|_{\omega_r} \delta = \partial D / \partial \omega|_{\omega_r} \delta. \quad (18)$$

将 (18) 式代入 (14) 式, 得

$$\left. \begin{aligned} \delta^3 &= \omega_{pb0}^2 k_c r_0 / [\gamma_0^3 \partial D / \partial \omega|_{\omega_r}], \\ \delta &= \text{Re}(\delta) + i\text{Im}(\delta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{pb0}^2 k_c r_0}{\gamma_0^3 \partial D / \partial \omega|_{\omega_r}} \right)^{1/3} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_{pb0}^2 k_c r_0}{\gamma_0^3 \partial D / \partial \omega|_{\omega_r}} \right)^{1/3}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

则不稳定模式对应的最大增长率为

$$\Gamma = (\sqrt{3}/2) [\omega_{pb0}^2 k_c r_0 / (\gamma_0^3 \partial D / \partial \omega|_{\omega_r})]^{1/3}; \quad (20)$$

频率漂移量为

$$\Delta \omega = (1/2) [\omega_{pb0}^2 k_c r_0 / (\gamma_0^3 \partial D / \partial \omega|_{\omega_r})]^{1/3}. \quad (21)$$

以上各式中

$$\partial D / \partial \omega|_{\omega_r} = -(\gamma_0 v_{0b} / c^2) \partial D / \partial k_c|_{k/\gamma_0}. \quad (22)$$

对 (20) 式进行数值计算, 可得到归一化增长率 $\Gamma r_0 / c$ 与归一化等离子体厚度 a/r_0 和 $\Delta = \omega_{p0} / \omega$ 的关系曲线, 计算结果见图 4、图 5。(20)、(22) 式表明, Γ 与注密度成正比, 与相对论因子 γ_0 和电子注初速度 v_{0b} 成反比。由图 4 可看出, 增长率与等离子体厚度有密切关系, 当 $\Delta = 5$, $\Omega_{p0} = 2$, $b/r_0 = 2$ 时, 在 $a/r_0 = 1.4$ 处得到最大增长率; 图 5 则显示了增长率随等离子体密度增加而下降的关系。

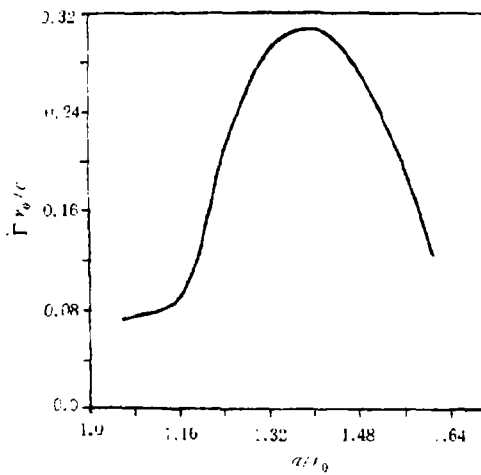


图 4 增长率与等离子体厚度的关系
($\Delta = 5, \Omega_{p0} = 2, v_{0b} = 0.5c,$
 $b/r_0 = 2, \omega_{pb0} r_0 / c = 0.1$)

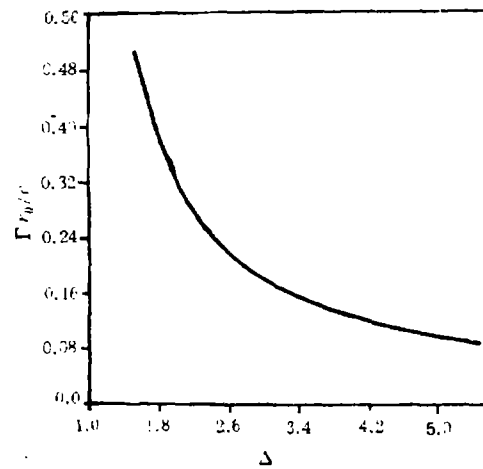


图 5 增长率与等离子体密度的关系
($b/r_0 = 2, a/r_0 = 1.4, \omega_{pb0} r_0 / c = 0.1,$
 $v_{0b} = 0.5c, \Omega_{p0} = 2$)

4 结 论

填充轴对称等离子体的圆柱波导在 $\omega < \omega_{p0}$ 时能够传输慢电磁波，相对论电子注与慢电磁波相互作用产生切仑柯夫不稳定性。注-波相互作用增长率与等离子体厚度密切相关，对应最大增长率，有一最佳等离子体厚度；等离子体密度和电子束能量对增长率都有一定影响，同时，等离子体厚度也是影响该慢波系统色散特性的重要参量。因而，本文考虑等离子体厚度效应而得出的结果具有更普遍的意义。

参 考 文 献

- [1] Kuzelev M V, Rukhadze A A, Strelkov P S, *et al.* Sov. J. Plasma Phys., 1987, 13(11): 1389-1394.
- [2] Kuzelev M V, Mukhametzyanov F Kh, Rabinovich M S. Sov. Phys. JETP. 1982, 56(6): 765-770.
- [3] Kuzelev M V, Rukhadze A A, Shkvaruntes A G. Sov. J. Plasma Phys., 1983, 9(5): 655-659.
- [4] Camel Y, Minami K, Kehs R A, *et al.* Phys. Rev. Lett., 1989, 62(20): 2389-2392.
- [5] Latic, Tripathi V K. IEEE Trans. on PS., 1993, PS-21(1): 187-190.
- [6] 刘盛刚. 电子学报, 1990, 18(4): 6-11.
- [7] 林为干. 微波理论与技术. 北京: 科技出版社, 1987, 第 4 章.

EXCITATION OF SLOW WAVE IN A PLASMA CYLINDRICAL WAVEGUIDE

Gong Yubin Wang Wenxiang

(*University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054*)

Abstract The dispersion equation of TM mode slow wave in a cylindrical waveguide having an annular plasma sheet is derived under the condition of plasma thickness effect. By means of the relativistic space charge wave theory, the space charge wave equation is obtained when the relativistic electron beam guided by a axial magnetic field is moving along the inner surface of the plasma sheet. The growth rate and frequency shifting of the interaction between the electron beam and slow space wave are obtained. The influences of plasma thickness on dispersive characteristics and interaction growth rate are discussed. Some useful results are obtained.

Key words Plasma, Dispersive characteristics, Interaction growth rate, Frequency shifting

宫玉彬：男，1967年生，讲师，现从事微波电子学研究工作。

王文祥：男，1940年生，教授，现从事微波电子学和相对论电子学研究工作。