

基本圈与图的曲面嵌入

任韩*, 赵洪涛, 李浩玲

华东师范大学数学系, 上海 200062

* E-mail: hren@math.ecnu.edu.cn

收稿日期: 2008-03-10; 接受日期: 2008-09-29

国家自然科学基金 (批准号: 10271048, 10671073)、上海市自然科学基金 (批准号: 07XD14011) 和上海市重点学科建设基金 (编号: B407) 资助项目

摘要 本文研究图的基本圈与图在可定向曲面上的嵌入之间的关系. 本文结果表明: 一个图 G 可以嵌入到亏格至少为 g 的可定向曲面上的充分必要条件是: 对于 G 中任意一个支撑树 T , 存在一个基本圈序列 C_1, C_2, \dots, C_{2g} , 使得对于每一个 $i: 1 \leq i \leq g, C_{2i-1} \cap C_{2i} \neq \emptyset$. 特别地, 在 T 的 $\beta(G)$ 个基本圈中有基本圈序列 $C_1, C_2, \dots, C_{2\gamma_M(G)}$, 使得 $C_{2i-1} \cap C_{2i} \neq \emptyset$ 对于每一个 $i: 1 \leq i \leq \gamma_M(G)$ 成立. 这里 $\beta(G)$ 和 $\gamma_M(G)$ 分别是 G 的 Betti 数和最大可定向亏格. 这个结果的意义在于: 我们可以从任意一个支撑树 (可以具有任意奇连通分支数) 出发去构造图在可定向曲面上的嵌入. 这在本质上有别于 Xuong 与 Liu 在最大亏格方面的工作 (即, 从具有最小奇连通分支数的支撑树出发构造图嵌入). 事实上, 这个结果在本质上同时推广了 Xuong-Liu 与 Fu 等在最大亏格方面的工作. 作为这一结果的直接应用, 本文得到以下结果: (1) 提出了用于计算图的最大亏格的新条件, 它尤其适用于计算具有特定边割 (edge-cut) 图的最大亏格. 并得到一些新的与已知的著名结果 (包括 Huang 在曲面嵌入图方面的工作). (2) 最大亏格问题可以归结为在基本相交图中求最大对集问题. 结合 Micali-Vazirani 的一个有效算法, 我们设计出了一个用于计算图的最大亏格的多项式算法, 它的复杂度是 $O((\beta(G))^{\frac{5}{2}})$, 这一算法与 Furst 等人的算法相比更加直接、便于计算.

关键词 基本圈 最大亏格 上嵌入

MSC(2000) 主题分类 05C10, 05C70

1 引言

本文所讨论的图都是连通的有限无向图, 其中可以具有重边和环. 一般未定义术语均可参见标准的教材或文献 [1-3].

一个曲面 (用 S 表示) 是一个连通、紧致并且无边界的 2 维流形. 经典的拓扑学理论表明: 所有的曲面可以分为可定向曲面 S_h (在球面上引入 h 个手柄) 和不可定向曲面 N_k (在球面上引入 k 个叉帽), h 和 k 通常称为曲面的亏格. 图 G 在曲面 S 上的一个胞腔嵌入是指从 G 到 S 的一个一一连续映射 $\phi: G \rightarrow S$, 使得 $S - \phi(G)$ 的每一个连通分支都同胚于一个开

引用格式: 任韩, 赵洪涛, 李浩玲. 基本圈与图的曲面嵌入. 中国科学 A, 2009, 39(4): 500-506
Ren H, Zhao H T, Li H L. Fundamental graphs and graph embeddings. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI:
10.1007/s11425-009-0041-7

圆盘 (通常称为 G 的一个面), 而 ϕ 则称为 G 的一个胞腔嵌入 (或简称为嵌入). 曲面 S 上的一个圈 (曲线) C 是曲面可分离的, 如果 $S - C$ 不连通. 特别地, 如果 $S - C$ 有一个分支 (用 $\text{int}(C)$ 表示) 同胚于一个圆盘, 那么 C 就是 S 上的一个可收缩圈 (否则, 是一个不可收缩圈). $\text{int}(C) + C = \text{Int}(C)$ 表示 C 的内部, 而 $S - C$ 的另外一部分是 C 的外部 (用 $\text{Ext}(C)$ 表示).

图 G 的最大亏格 $\gamma_M(G)$ 是最大自然数 k , 使得 G 可 (胞腔) 嵌入在 S_k 上. 由于图 G 在可定向曲面上嵌入时至少有一个面, 由 Euler 公式知: $\gamma_M(G) \leq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$, 其中 $\beta(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$ 是 G 的 Betti 数 (也是 G 的圈秩数). 如果等式成立, 则称 G 是上可嵌入图.

设 T 是图 G 中的一个支撑树, 则对于任意一条 G 中的非树边 $e \in E(G) \setminus E(T)$, $T + e$ 含有唯一的圈 $C_T(e)$ (通常称为 G 的属于 T 的基本圈). 如果 G 的一对边 e_1, e_2 有公共节点, 则边对 $\langle e_1, e_2 \rangle$ 是一个相邻边对. $E[G_1, G_2]$ 表示 G 的横跨于两个点不交子图 G_1 与 G_2 之间的边集合.

$\xi(G, T)$ 表示 $G \setminus E(T)$ 的含有奇数条边的分支数目. 则图 G 的 Betti 亏数 $\xi(G)$ 是当 T 取遍所有支撑树时, $\xi(G, T)$ 中的最小数值. 如果 $\xi(G, T) = \xi(G)$ 对于某支撑树 T 成立, 则称 T 是最优树.

2 一个关于图的最大亏格的好特征

引理 1^[2,4] 设 G 是一个连通图, 则

- (1) $\gamma_M(G) = \frac{1}{2}(\beta(G) - \xi(G))$;
- (2) G 是上可嵌入图当且仅当 $\xi(G) \leq 1$.

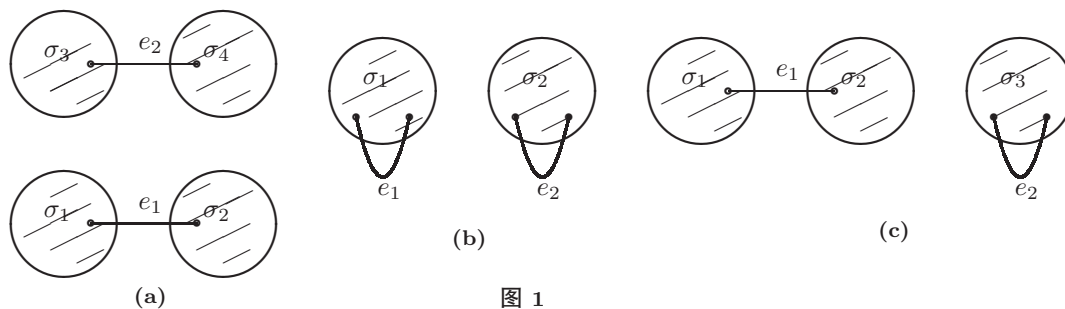
定理 1 如果图 G 存在一个支撑树 T , 使得 T 有基本圈序列 C_1, C_2, \dots, C_{2g} 满足条件 $C_{2i-1} \cap C_{2i} \neq \emptyset (i = 1, 2, \dots, g)$, 则 G 可以嵌入到一个亏格至少是 g 的可定向曲面上.

证明 设 G 和 T 如条件所设, 而 e_1, e_2, \dots, e_{2g} 是 $E(G) \setminus E(T)$ 中的边, 使得 C_i 是 $T + e_i (1 \leq i \leq 2g)$ 中的唯一圈. 根据 Xuong^[4] 的关于最大亏格计算公式的方法, 不妨假设 $G = T + \{e_1, e_2, \dots, e_{2g}\}$. 设 $G_0 = T$, 且 $G_1 = G_0 + \{e_1, e_2\}$. 于是有以下论断.

论断 1 $\xi(G_1) \leq \xi(G_0) (\Leftrightarrow \gamma_M(G_1) \geq \gamma_M(G_0) + 1)$.

为证明以上论断, 我们注意到 $\beta(G_0) = \beta(G_1) - 2$, 而且 $\xi(G_1) \equiv \xi(G_0) \pmod{2}$. 如果 $\xi(G_1) \geq \xi(G_0) + 2$, 则必有以下三种情形之一要发生:

- (a) e_1, e_2 各自两个端点分别在 $E(G_1) \setminus E(T)$ 的不同偶分支内 (如图 1(a) 所示);



(b) e_1, e_2 各自两个端点分别在 $E(G_1) \setminus E(T)$ 的同一个偶分支内 (如图 1(b) 所示);

(c) e_1, e_2 中只有一个, 不妨设 e_1 的两个端点连接 $E(G_1) \setminus E(T)$ 的两个偶分支, 而另一个 e_2 的两个端点位于 $E(G_1) \setminus E(T)$ 的同一个偶分支内 (如图 1(c) 所示).

不失一般性, 假定 $e_1 \cap e_2 = \emptyset$, 并且考虑情形 (a).

设 $e_1 \in E[\sigma_1, \sigma_2], e_2 \in E[\sigma_3, \sigma_4]$, 且 C_i 是 $T + e_i (1 \leq i \leq 2g)$ 中的基本圈.

子情形 A $C_1 \cap C_2$ 是一条路.

设 $P = C_1 \cap C_2$ 为一条路, 它的一个端点 x 在 $C_1 \cap C_2$ 里面. 设 e'_1 与 e'_2 是 T 中的两条边, 而且 $x \in e'_1 \cap e'_2$. 现在 $e'_1, e'_2 \notin E(P)$ (如图 2 左所示). 考虑新的支撑树 $T' = T + \{e_1, e_2\} - \{e'_1, e'_2\}$.

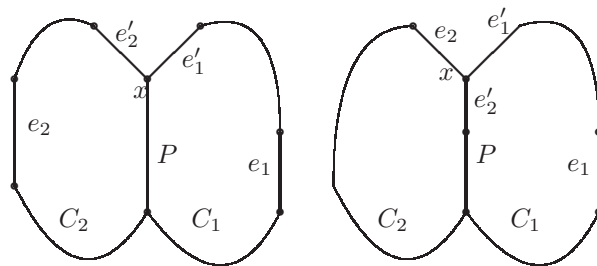


图 2

子情形 B $x \in e_1$ 或 $x \in e_2$. 不妨设 $x \in e_2$ (如图 2 右所示).

如果 $|E(P)| \geq 1$, 可以选边 $e'_1 \in C_1 \setminus E(T), x \in e'_1, e'_2 \in E(T), x \in e'_2$, 并且考虑新树 $T' = T + \{e_1, e_2\} - \{e'_1, e'_2\}$. 如果 $|E(P)| = 0$, 则是前一种情况的特殊情形. 设 T' 是这两种情形中所考虑的新树. 容易看出: $E(G_1) \setminus E(T')$ 至多有 $\xi(G_0)$ 个奇连通分支, 与反证假定相违. 因而 $\xi(G_1) \leq \xi(G_0)$. 类似可以证明: 在情况 (b) 与 (c) 下结论也成立.

对于 $G_2 = G_1 + \{e_3, e_4\}, \dots, G_g = G_{g-1} + \{e_{2g-1}, e_{2g}\}$, 重复这个过程直到得到 $\xi(G_g) \leq \xi(G_{g-1}) \leq \dots \leq \xi(G_0)$. 故 $\gamma_M(G_g) \geq \gamma_M(G_0) + g = g$.

定理 2 设 T 是一个嵌入在可定向曲面 S_g 上的连通图 G 的支撑树, 则 T 至少有 $2g$ 个不可收缩的基本圈 C_1, C_2, \dots, C_{2g} , 使得对于每一个 $i: 1 \leq i \leq g$, 都有 $C_{2i-1} \cap C_{2i} \neq \emptyset$. 特别地, 如果 G 是 S_g 上仅有一个面的嵌入图, 则对于 G 的任何一个支撑树 T , 总有 G 中的 $2g$ 个非树边使得相应的 $2g$ 个基本圈 C_1, C_2, \dots, C_{2g} 满足条件 $C_{2i-1} \cap C_{2i} \neq \emptyset (1 \leq i \leq g)$.

证明 首先, 将 T 收缩成为一个节点 v_T , 然后逐步将位于两个面上的边去掉, 最后就得到 S_g 上的一个具有一个节点和一个面的图 G_T . 此时存在一对边 e_α, e_β , 它们处于交叉位置, 即在 v_T 处的所有半边形成的局部旋为 $e_\alpha \cdots e_\beta \cdots e_\alpha \cdots e_\beta$ (如图 3 所示). 进一步, e_β 是唯一横跨过 e_α 的边 (否则, G_T 就会有两个面). 从而, G_T 的所有边都可以列表如下: $e_1, e_2, \dots, e_{2g-1}, e_{2g}$, 使得 e_{2i-1} 横跨过 $e_{2i} (i = 1, 2, \dots, g)$. 在此结构下不难看出, e_{2i-1} 与 e_{2i} 所决定的两个基本圈 C_{2i-1} 和 C_{2i} 至少有一个公共节点.

注 定理 1 和 2 提供了一个计算图的最大亏格的好特征 (从它们出发, 可以得出一个计算最大亏格的多项式算法).

设 T 是一个图 G 的支撑树, 具有一组基本圈 C_1, C_2, \dots, C_{2g} 满足条件 $C_{2i-1} \cap C_{2i} \neq \emptyset (1 \leq i \leq g)$. 称这样的圈对 $\langle C_{2i-1}, C_{2i} \rangle$ 为相邻的基本圈对 $(1 \leq i \leq g)$. 如果 g 是满足这个

条件的最大自然数, 称 g 为 T 的最大基本圈对数. 因此, 定理 2 可以表述为

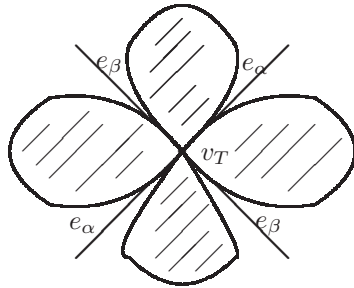


图 3

定理 3 图 G 中的任意两个支撑树 T_1 和 T_2 都具有相同的最大基本圈对数 (事实上, 这个唯一的数即为图 G 的最大亏格).

Fu 等在文献 [5] 中运用从图的圈空间的基出发, 建立相交图的最大对集的概念去描述和刻画图的最大亏格. 由于一个图的圈空间可以具有指数多个基, 而定理 1 和 2 仅使用任意一个支撑树的基本圈所决定的相交图的最大对集概念, 这个结果从本质上推广了 Fu 等的结果 [5].

推论 1 如果图 G 存在一个支撑树 T , 使得它的所有基本圈都两两相交, 则 G 是上可嵌入的.

然而, 有时在实际使用过程中却需要定理 1 和 2 的改进形式. 下面的结果表明了图与其子图的最大亏格之间的一种递归关系.

定理 4 设 T 是图 G 的支撑树. 如果 e_1, e_2 是 G 的两个非树边, 而对应的两个基本圈 $C_T(e_1)$ 与 $C_T(e_2)$ 有公共节点, 则 $\gamma_M(G) = \gamma_M(G + e_1 + e_2) - 1$. 特别地, G 是上可嵌入的, 当且仅当 $G + e_1 + e_2$ 是上可嵌入的.

细心的读者不难看出, 这一结果不但推广了 Xuong^[4] 的关于图之最大亏格递归公式, 而且将在下一节中看出其更具有实用性.

3 定理 1 和 2 的应用

本节将运用定理 1 和 2 计算一些典型图的最大亏格.

先回忆一下 Xuong 方法^[4] 的本质. 它包含 2 个部分: 首先在图 G 中求出一个最优树 T , 它具有最少的奇连通分支数目; 然后将 $E(G) \setminus E(T)$ 中的边按照下列方式两两配对:

$$E(G) \setminus E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_{2s}\} \cup \{f_1, f_2, \dots, f_m\},$$

这里, $e_{2i-1} \cap e_{2i} \neq \emptyset$ ($1 \leq i \leq s$), 并且 $C_T(f_i) \cap C_T(f_j) = \emptyset$ ($1 \leq i < j \leq m$), 其中 $s = \gamma_M(G)$, $m = \xi(G)$.

相比之下, 定理 1 和 2 则考虑基本相交圈对 (而不一定是相交边对), 在此基础之上我们可以从任意一个支撑树 (可以具有任意多个奇连通分支) 出发来构造图 G 的大亏格嵌入. 这就从很大程度上放松了 Xuong 的构造条件 (当然, Xuong 的最优树在此依然有效), 从而推广了 Xuong 的关于图的最大亏格的刻画. 基于此, 可以构造图 G 的大亏格嵌入如下: 首先根据具体的条件选择 G 中一个支撑树 T ; 然后根据需要将部分非树边进行两两配对 (就像 Xuong

所做的那样); 最后再将其余的非树边实行配对, 使得对应的基本圈也两两相交成对. 容易看出, 后一过程中配对的边 (集合) 可以适当选为图 G 的一些割边. 于是, 定理 1 与 2 在实际运用中就可以变得灵活起来. 下面这个结果是它们的第一个应用.

定理 5 设 $A = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 是图 G 的边割集合, 使得 $G - A$ 恰好具有两个分支 G_1, G_2 . 若 G_1, G_2 都是上可嵌入图, 则 $\gamma_M(G) \geq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor - 1$. 进一步地, 如果 G 满足下列条件之一, 那么 G 是上可嵌入图:

- (i) $\beta(G_1) \equiv \beta(G_2) \equiv 0 \pmod{2}$;
- (ii) $|A| \equiv 1 \pmod{2}, \beta(G_1) + \beta(G_2) \equiv 1 \pmod{2}$.

下面这个结果作为上述结果的推论, 我们将提供一个新的证明.

定理 6 (Huang^[6]) 设 G 是一个嵌入在 S_g 上的图, 使得所有面边界都是圈 (强嵌入图). 如果 G 的几何对偶图 G^* 含有一个 Hamilton 曲面可分离圈, 则 G 是上可嵌入的.

证明 只需证明满足定理 1 和 2 中条件的支撑树存在. 设 $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_\varphi\}$ 是 G 的面圈集合, 而 C^* 则是 G^* 的一条曲面可分离的 Hamilton 圈. 设 $E(C^*) = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_\varphi^*\}$ 且 $e_i^* = (f_i, f_{i+1}), 1 \leq i \leq \varphi$. 设 e_i 是 $\partial f_i \cap \partial f_{i+1}$ 中与 e_i^* 所对应的边, 这里, 用 ∂f_i 表示 f_i 的边界 ($1 \leq i \leq \varphi$).

论断 2 $G - \{e_1, e_2, \dots, e_{\varphi-1}\}$ 是 G 的嵌入在 S_g 上的仅有一个面的子图, 而且 $G - \{e_1, e_2, \dots, e_\varphi\}$ 恰好有两个分支 G_1, G_2 .

现在, $E[G_1, G_2] = \{e_1, e_2, \dots, e_\varphi\}$. 设 $G_1 \subset \text{Int}(C^*), G_2 \subset \text{Ext}(C^*)$, 且用 ∂f_i 表示 f_i 的边界 ($1 \leq i \leq \varphi$).

我们可以构造一个图如下: $H_0 = (\partial f_1 \cup \partial f_2 \cup \dots \cup \partial f_{\varphi-1}) \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_{\varphi-1}\}$. 容易看出, H_0 是 $G - \{e_1, e_2, \dots, e_{\varphi-1}\}$ 的连通支撑子图 (因而也是 G 的连通支撑子图). 设 $e_\varphi = (\alpha, \beta), \alpha \in V(G_1), \beta \in V(G_2)$. 则 $H_0 - e_\varphi$ 恰好具有两个连通分支 H', H_1 . 这里 $H' = G_1$.

论断 3 如果 H_1 含有圈 C , 那么 C 一定是不可收缩圈.

这可以从 $S_g - H_0$ 具有唯一一个连通分支的事实得到. 如果 H_1 有一个圈 C_1 , 则去掉一条 C_1 的边 e'_1 后得到一个 H_1 的支撑子图 H_2 . 重复这个过程下去, 直到得到 H_1 的连通支撑子图 H_k . 此时 H_k 不含圈.

论断 4 $T = H' \cup H_k \cup \{e_\varphi\}$ 是 G 的支撑树, 并且 $T + e_i$ 的每一个基本圈 $C_T(e_i)$ 含有一条边 e_φ 为它们的公共边, $i = 1, 2, \dots, \varphi - 1$.

为证实这一点, 我们考虑这样一条边 $e_i = (x_i, y_i) \in E[H', H_k] \subseteq E[G_1, G_2]$, 使得 $x_i \in H', y_i \in H_k$. 由于 $H'(H_k)$ 是连通图, $H'(H_k)$ 中含有一条路 $P_i(Q_i)$ 连接 $\alpha(\beta)$ 与 $x_i(y_i)$. 故, $C_T(e_i) = \{e_\varphi\} \cup P_i \cup Q_i \cup \{e_i\}$ 是一个含有 e_φ 的圈 ($1 \leq i \leq \varphi$).

至此, 找到了 G 中的一个支撑树 T 满足下列条件:

- (1) 所有的基本圈 $C_T(e_1), C_T(e_2), \dots, C_T(e_{\varphi-1})$ 都有一条公共边;
- (2) 由于 T 是 $G - \{e_1, e_2, \dots, e_{\varphi-1}\}$ 的一个支撑树和定理 1 与 2, 存在一组基本圈 (同时也是不可收缩圈) C_1, C_2, \dots, C_{2g} 满足条件 $C_{2i-1} \cap C_{2i} \neq \emptyset$ ($1 \leq i \leq g$). 根据定理 1, G 是上可嵌入图.

注意到曲面可分离圈不必是 Hamilton 的, 而且曲面也可以是不可定向的, 定理 5 可以推广到以下的形式:

定理 7 设 G 是一个嵌入在曲面 Σ 上的图使得它的几何对偶图 G^* 含有一条曲面可分离圈 C^* . 如果 G 关于 C^* 的左子图 $G_L(C^*)$ 与右子图 $G_R(C^*)$ 都是上可嵌入的, 则 $\gamma_M(G) \geq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor - 1$. 特别地, 如果 $\beta(G_L(C^*)) \equiv \beta(G_R(C^*)) \equiv 0 \pmod{2}$, 则 G 是上可嵌入图.

注 图的“左子图”与“右子图”这些概念来自文献 [3].

推论 2 如果 G 是一个 Klein 瓶上的嵌入图, 使得它的对偶图 G^* 有一个 Hamilton 曲面可分离圈, 则 $\gamma_M(G) \geq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor - 1$.

值得注意的是, 在实际应用中, 定理 1 和 2 可以被用来估计更加广泛的图类的最大亏格. 下面是它们的另一些应用 (我们略去证明部分).

定理 8 以下图都是上可嵌入的:

- (1) 简单连通图 G 与一个有 n 条边的路 P_n 的 Cartesian 乘积图 $G \times P_n$;
- (2) 两个不相交的 Halin 图 H_1, H_2 之间连接 $k (\geq 2)$ 条边形成的复合图;
- (3) n 维超立方图 Q_n (可以看成两个不相交 $(n-1)$ 维超立方图 Q_{n-1} 之间连接相应节点形成图);
- (4) 广义 Petersen 图 $P(n, k)$ (可以看成由一个 n -圈 (u_1, u_2, \dots, u_n) 以及节点 v_1, v_2, \dots, v_n 之间使得 (i) 对应的边 $(u_i, v_i) \in E, 1 \leq i \leq n$; (ii) $(u_i, v_{i+k}) \in E, 1 \leq i \leq n$ 形成的图).

注 一个 Halin 图 $G = (V, E)$ 是由一个平面树用一个圈按照 (平面嵌入) 次序连接它的叶子 (次为 1 的节点) 形成的图. 关于 Cartesian 乘积图的定义可以在任何图论教科书中找到.

4 一个计算最大亏格的多项式算法

本节将提供一个新的多项式算法用以计算一个给定图的最大亏格. 定理 1 和 2 则是这个算法的理论基础.

定理 9 图 G 的最大亏格问题等价于在它的基本相交图 $G_M = (V_M, E_M)$ 中的最大对集问题. 这里 V_M 是 G 的一个支撑树 T 的所有基本圈集合, V_M 中两个基本圈之间有边相连当且仅当它们有公共节点.

目前为止, 已知的最快的计算图中最大对集的算法属于 Micali-Vazirani^[7], 它的复杂性为 $O(m\sqrt{n})$, 其中 m 和 n 分别是图的边数与节点数目. 基于此, 我们可以设计一个新的算法——基本圈算法如下:

基本圈算法

步骤 1 输入图 G 的规模与数据, 然后找到一个支撑树 T 以及对应的所有基本圈的集合 V_M ;

步骤 2 对于 V_M 中的圈建立基本相交图 G_M ;

步骤 3 执行 Micali-Vazirani 算法, 找到 G_M 中的一个最大对集, 然后停止.

注 由于一个 n 阶图 G 的基本圈数目为 $\beta(G)$, 这个算法会在 $O((\beta(G))^{\frac{5}{2}})$ 内结束. 虽然 Furst, Gross 和 McGeoch^[8] 发现了第一个计算图的最大亏格的多项式算法 (它在很大程度上依赖于 Giles^[9] 的拟阵交换技术), 但是两者在实际使用中却有着本质的不同.

致谢 本文作者衷心感谢细心的评审人员, 他(她)的意见和建议使得本文更加充实.

参考文献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Application. London: MacMillan, 1976
- 2 刘彦佩. 图的不可定向最大方格. 中国科学 A, **22**: 191–201 (1979)
- 3 Mohar B, Thomassen C. Graphs on Surfaces. Maryland: Johns Hopkins University Press, 2001
- 4 Xoung N H. How to determine the maximum genus of a graph. *J Combin Theory Ser B*, **26**: 217–225 (1979)
- 5 Fu H L, Skoviera M, Tsai M. The maximum genus, matchings and the cycle space of a graph. *Czechoslovak Math J*, **48**(123): 329–339 (1998)
- 6 Huang Y. Maximum genus of a graph in term of its embedding properties. *Discrete Math*, **262**: 171–180 (2003)
- 7 Micali S, Vazirani V V. An $O(\sqrt{|V|}|E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs. In: Proc. 21st IEEE Symp Found Comp Sci, New York: ACM Press, 1980, 17–27
- 8 Furst M L, Gross J L, McGeoch L A. Finding a maximum-genus graph imbedding. *J Assoc Comput Mach*, **35**: 523–534 (1988)
- 9 Giles R. Optimum matching forest I: Special weights. *Math Program*, **22**: 1–11 (1982)