中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 2 期: 156～176
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

离散周期集上的 Gabor 系

李云章[①], 廉巧芳[②]*

① 北京工业大学应用数理学院, 北京 100124
② 北京交通大学数学系, 北京 100044
* E-mail: qflian@amss.ac.cn

收稿日期: 2008-03-11; 接受日期: 2008-09-02
国家自然科学基金 (批准号: 10671008)、北京市自然科学基金 (批准号: 1092001)、北京市中青年骨干教师基金和教育部留学回国人员科研启动基金资助项目

摘要 因其在数字信号处理中的应用潜力, 离散 Gabor 分析引起了不少数学家的关注. 讨论了离散周期集上的 Gabor 系, 它可以模拟实际问题中的周期间歇信号. 刻画了离散周期集上 Gabor 系的完备性及 Gabor 标架; 得到了容许完备 Gabor 系的周期集的一个充分必要条件, 并证明此条件也是 Gabor 集 E (即由 χ_E 生成的 Gabor 系是紧标架) 存在的充分必要条件, 其证明是构造性的, 由此方法可以得到所有由特征函数生成的具有某给定标架界的紧 Gabor 标架的构造; 刻画了容许 Gabor Riesz 基的周期集; 还给出大量例子来说明理论的一般性.

关键词 Gabor 系 周期集 离散 Zak 变换

MSC(2000) 主题分类 42C40

1 引言

设 $\mathcal{H}$ 是可分 Hilbert 空间, $\{h_n : n \in I\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个至多可列集. 若存在 $0 < A \leqslant B < \infty$ 使得对任意的 $f \in \mathcal{H}$ 都有

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{n\in I} |\langle f, h_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2,$$

则称 $\{h_n : n \in I\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标架, A 和 B 为标架界. 特别的, 若 $A = B$, 则称 $\{h_n : n \in I\}$ 是紧标架, 若 $A = B = 1$, 则称 $\{h_n : n \in I\}$ 是正规紧标架. 对 $\mathcal{H}$ 中标架界为 A 和 B 的标架 $\{h_n : n \in I\}$, 其标架算子 $\mathcal{S}$ 定义为: 对任意 $f \in \mathcal{H}$,

$$\mathcal{S}f = \sum_{n\in I} \langle f, h_n\rangle h_n.$$

众所周知, $\mathcal{S}$ 有界、可逆, $\{\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}} h_n : n \in I\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的正规紧标架, 且 $\{\mathcal{S}^{-1} h_n : n \in I\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的标架界为 B^{-1} 和 A^{-1} 的标架, 称为 $\{h_n : n \in I\}$ 的规范对偶标架. 对 $f \in \mathcal{H}$, 有

$$f = \sum_{n\in I} \langle f, h_n\rangle \mathcal{S}^{-1} h_n = \sum_{n\in I} \langle f, \mathcal{S}^{-1} h_n\rangle h_n.$$

关于标架的基础知识可参见文献 [1–3]. 分别记 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $l_0(\mathbb{Z})$ 和 $l^2(\mathbb{Z})$ 为整数集、正整数集、$\mathbb{Z}$ 上的有限支撑序列集和 $\mathbb{Z}$ 上平方可和序列构成的 Hilbert 空间. 给定集合 $E \subset \mathbb{Z}$, χ_E 表示 E 上的特征函数. 给定 $L \in \mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 中的两个集合 $\mathbb{S}_1$ 和 $\mathbb{S}_2$, 若存在 $\mathbb{S}_1$ 的剖分 $\{\mathbb{S}_{1,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 以及 $\mathbb{S}_2$ 的剖分 $\{\mathbb{S}_{2,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, 使得对所有的 $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{S}_{2,k} = \mathbb{S}_{1,k} + kL$, 则称 $\mathbb{S}_1$ 与 $\mathbb{S}_2$ $L\mathbb{Z}$ 同余. 对 $g \in l^2(\mathbb{Z})$ 和 $M, N \in \mathbb{N}$, 定义 $\mathbb{N}_M := \{0, 1, \dots, M-1\}$, 且记相应的 Gabor 系 $\mathcal{G}(g, N, M)$ 为

$$\mathcal{G}(g, N, M) := \left\{ \mathrm{e}^{2\pi i \frac{m}{M} \cdot} g(\cdot - nN) : m \in \mathbb{N}_M, n \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{1.1}$$

有关 Gabor 系的详细介绍参见文献 [4–6]. 设 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一个非空子集, 若对 $j \in \mathbb{S}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$, $j + nN \in \mathbb{S}$, 则称 $\mathbb{S}$ 是 $N\mathbb{Z}$ 周期的. 定义 $l^2(\mathbb{Z})$ 的闭子空间 $l^2(\mathbb{S})$ 为

$$l^2(\mathbb{S}) := \left\{ f \in l^2(\mathbb{Z}) : f(j) = 0 \text{ 当 } j \notin \mathbb{S} \right\}. \tag{1.2}$$

本文研究 $l^2(\mathbb{S})$ 的 Gabor 系.

关于 Gabor 展开的研究大多集中在 $L^2(\mathbb{R})$, 也有些在 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间. 最近, Gabardo 和 Li[7](本文的第 1 作者) 刻画了 $\mathbb{R}$ 的周期子集上 Gabor 系的完备性. 尽管有关 Gabor 展开的研究多数集中在连续情形, 由于离散 Gabor 系在数字信号处理中的应用潜力, $l^2(\mathbb{Z})$ 的 Gabor 系的研究也引起了很多关注 (文献 [4, 5, 8–20] 及其引用的文献). 在一定条件下, 可由 $L^2(\mathbb{R})$ 的 Gabor 标架通过采样得到离散 Gabor 标架 (文献 [9–12]), 也可不参照 $L^2(\mathbb{R})$ 的 Gabor 标架而直接考虑 $l^2(\mathbb{Z})$ 的 Gabor 标架. 离散 Gabor 分析的一般理论与连续情形类似, 但有时会有很大的差异. 1989 年, Heil[8] 指出, 在连续情形下, 只有生成函数不光滑或者衰减性差时, 其 Gabor 标架才能作成基, 而在离散情形下, 可以构造出由衰减性好的序列生成的 Gabor 系, 同时作成 Gabor 标架和基. Gauss 函数的采样就是一个例子. 本文研究 $l^2(\mathbb{S})$ 中的 Gabor 分析, 其中 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的一个 $N\mathbb{Z}$ 周期集. 此框架可模拟实际问题中的周期间歇信号, 可以在保留信号所有特点的同时更有效地对信号作 Gabor 分析. 当然我们也可以把信号看作属于 $l^2(\mathbb{Z})$ 按通常方法处理, 但如果信号是间隔一定周期发射的, 这或许不是最优的方法.

2 离散 Zak 变换的性质

给定 $L \in \mathbb{N}$. 对 $f \in l^2(\mathbb{Z})$, 定义 f 的离散 Zak 变换 $\mathcal{Z}_L f$ 为: 对 $j \in \mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $\theta \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{Z}_L f)(j, \theta) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} f(j + \ell L)\, \mathrm{e}^{2\pi i \ell\theta}. \tag{2.1}$$

容易验证, 离散 Zak 变换有拟周期性, 即对 $k, \ell, j \in \mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $\theta \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{Z}_L f)(j + kL, \theta + \ell) = \mathrm{e}^{-2\pi i k\theta} (\mathcal{Z}_L f)(j, \theta). \tag{2.2}$$

有关离散 Zak 变换可参见文献 [4, 8, 13, 14]. 本节讨论周期集上的离散 Zak 变换的性质, 其结论将在后面用到. 首先引入一些记号. 设 E 是 $\mathbb{Z}$ 中的一个有限集. 记 $L^2[0, 1)$ 为 1 周期平方可积函数构成的 Hilbert 空间, $L^2(E \times [0, 1))$ 为一 Hilbert 空间, 其元素 f 满足对每个 $j \in E$, $f(j, \cdot) \in L^2[0, 1)$, 且其内积定义为: 对 $f_1, f_2 \in L^2(E \times [0, 1))$,

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \sum_{j\in E} \int_0^1 f_1(j, \theta)\overline{f_2(j, \theta)} d\theta.$$

定理 2.1 给定 $L \in \mathbb{N}$. 设 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的一个 $L\mathbb{Z}$ 周期集. 记 $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S} \cap \mathbb{N}_L$, 则 $\mathcal{Z}_L$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中的限制 $\mathcal{Z}_L|_{l^2(\mathbb{S})}$ 是从 $l^2(\mathbb{S})$ 到 $L^2(\mathbb{S}_0 \times [0,1))$ 的酉算子.

证明 由 $\mathcal{Z}_L$ 的定义, 对 $f\in l^2(\mathbb{S})$, 有

$$\sum_{j\in\mathbb{S}_0}\int_0^1\left|\left(\mathcal{Z}_L f\right)(j,\,\theta)\right|^2 d\theta=\sum_{j\in\mathbb{S}_0}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\left|f(j+\ell L)\right|^2.$$

注意到 $\{\,\mathbb{S}_0+\ell L:\,\ell\in\mathbb{Z}\,\}$ 是 $\mathbb{S}$ 的一个剖分, 有

$$\sum_{j\in\mathbb{S}_0}\int_0^1\left|\left(\mathcal{Z}_L f\right)(j,\,\theta)\right|^2 d\theta=\sum_{j\in\mathbb{S}}|f(j)|^2.$$

显然 $\mathcal{Z}_L\,|_{l^2(\mathbb{S})}$ 是线性的. 下证 $\mathcal{Z}_L\,|_{l^2(\mathbb{S})}$ 是满的. 对 $h\in L^2(\mathbb{S}_0\times[0,1))$, 在 $\mathbb{Z}$ 上定义 f 为

$$\text{对}j\notin\mathbb{S},\ f(j)=0,\quad \text{对}j\in\mathbb{S}_0,\ \ell\in\mathbb{Z},\ f(j+\ell L)=\int_0^1 h(j,\,\theta)\mathrm{e}^{-2\pi i\ell\theta}d\theta,$$

则 $f\in l^2(\mathbb{S})$, 且 $\mathcal{Z}_L f=h$. 证毕.

引理 2.2 设 $N,\,M\in\mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M}=\frac{p}{q}$, 其中 $p,\,q\in\mathbb{N}$, $\gcd(p,\,q)=1$, 则集合

$$\Delta:=\{\,n(j,\,r,\,k)=j+kM-rN:\,(j,\,r,\,k)\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}\times\mathbb{N}_q\times\mathbb{N}_p\,\},$$

$qN\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{N}_{qN}$.

证明 设 $n(j,\,r,\,k),\,n(j',\,r',\,k')\in\Delta$ 满足 $qN\mid[n(j,\,r,\,k)-n(j',\,r',\,k')]$. 记 $\frac{M}{q}=n_0$. 于是, $N=n_0p,\ M=n_0q,\ qN=n_0pq$, 故

$$n_0pq\mid[(j-j')+(k-k')n_0q+(r'-r)n_0p].\tag{2.3}$$

由此可得 $n_0\mid(j-j')$. 再由 $j,\,j'\in\mathbb{N}_{n_0}$ 知 $j=j'$. 于是, 由 (2.3) 式得 $pq\mid[(k-k')q+(r'-r)p]$. 又因为 $r,\,r'\in\mathbb{N}_q,\ k,\,k'\in\mathbb{N}_p$, 有 $r=r',\ k=k'$. 所以, 对任意的 $(j,\,r,\,k),\,(j',\,r',\,k')\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}\times\mathbb{N}_q\times\mathbb{N}_p$, $(j,\,r,\,k)\neq(j',\,r',\,k')$,

$$qN\nmid[n(j,\,r,\,k)-n(j',\,r',\,k')].$$

再注意到 $\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}\times\mathbb{N}_q\times\mathbb{N}_p$ 的元素个数为 $pM=qN$, 引理得证.

为方便, 对 $g\in l^2(\mathbb{Z})$ 相应定义一个矩阵值函数 $G:\,\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\to\mathcal{M}_{q,p}$, 其第 r 行第 k 列元素定义为: 对 $j\in\mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $\theta\in\mathbb{R}$,

$$G(j,\,\theta)_{r,k}=\left(\mathcal{Z}_{qN}g\right)(j+kM-rN,\,\theta),\quad r\in\mathbb{N}_q,\ k\in\mathbb{N}_p,\tag{2.4}$$

其中 $\mathcal{M}_{q,p}$ 表示 $q\times p$ 复矩阵的集合. 在定理 2.1 中取 $\mathbb{S}=\mathbb{Z}$, $L=qN$, 则由引理 2.2 和离散 Zak 变换的拟周期性可知, 对 $g\in l^2(\mathbb{Z})$, $\mathcal{Z}_{qN}g$ 可由

$$\{\,(\mathcal{Z}_{qN}g)(j+kM-rN,\,\theta):\,(j,\,r,\,k)\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}\times\mathbb{N}_q\times\mathbb{N}_p,\,\theta\in[0,\,1)\,\}$$

唯一确定. 反过来, 由定理 2.1 和引理 2.2 以及离散 Zak 变换的拟周期性知, 任意矩阵值函数 $G:\,\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}\times\mathbb{R}\to\mathcal{M}_{q,p}$ (其对 $(j,\,r,\,k)\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}\times\mathbb{N}_q\times\mathbb{N}_p$ 满足 $G(j,\,\cdot)_{r,\,k}\in L^2[0,\,1)$) 也可确定唯一的 $g\in l^2(\mathbb{Z})$, 使得对 $(j,\,r,\,k)\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}\times\mathbb{N}_q\times\mathbb{N}_p$,

$$(\mathcal{Z}_{qN}g)(j+kM-rN,\,\cdot)=G(j,\,\cdot)_{r,k}.$$

设 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的一个 $N\mathbb{Z}$ 周期集, 把 g 限制到 $l^2(\mathbb{S})$ 上, 下面讨论 G 的秩所具有的性质. 为此, 先建立如下引理.

引理 2.3 设 $p,\,q\in\mathbb{N}$ 满足 $\gcd(p,\,q)=1$, 则对每个 $j\in\mathbb{Z}$, 有唯一的 $(k_0,\,\ell_0)\in\mathbb{N}_p\times\mathbb{Z}$ 和唯一的 $(k_0,\,r_0,\,m_0)\in\mathbb{N}_p\times\mathbb{N}_q\times\mathbb{Z}$, 使得

$$j=k_0q+\ell_0p=k_0q+(m_0q+r_0)p.\tag{2.5}$$

证明 由于 $\gcd(p,\,q)=1$, 故对 $j\in\mathbb{Z}$, 存在 $k,\,r\in\mathbb{Z}$, 使得 $j=kq+rp$. 又因为存在 $\tilde{k}\in\mathbb{Z}$ 和 $k_0\in\mathbb{N}_p$, 使得 $k=\tilde{k}p+k_0$, 所以 $j=k_0q+\ell_0p$, 其中 $\ell_0=\tilde{k}q+r$. 又对 ℓ_0 存在唯一的 $(r_0,\,m_0)\in\mathbb{N}_q\times\mathbb{Z}$, 使得

$$\ell_0=m_0q+r_0. \tag{2.6}$$

于是 $j=k_0q+(m_0q+r_0)p$.

下证 $(k_0,\,\ell_0)$ 和 $(k_0,\,r_0,\,m_0)$ 的唯一性. 假设存在另外的 $(k_0',\,\ell_0')\in\mathbb{N}_p\times\mathbb{Z}$ 和 $(k_0'',\,r_0'',\,m_0'')\in\mathbb{N}_p\times\mathbb{N}_q\times\mathbb{Z}$, 使得 (2.5) 式成立, 则 $k_0q+\ell_0p=k_0'q+\ell_0'p=k_0''q+(m_0''q+r_0'')p$. 因此, $(k_0-k_0')q=(\ell_0'-\ell_0)p$. 又由 $\gcd(p,\,q)=1$ 可知 $p\mid(k_0-k_0')$, 再由 $k_0,\,k_0'\in\mathbb{N}_p$ 有 $k_0=k_0'$, 于是 $\ell_0=\ell_0'$. $j=k_0q+\ell_0p$ 中 $(k_0,\,\ell_0)\in\mathbb{N}_p\times\mathbb{Z}$ 的唯一性得证. 进一步可得 $k_0''=k_0$, $m_0''q+r_0''=\ell_0$, 因此, 由 (2.6) 式中 $(r_0,\,m_0)$ 的唯一性可知 $(r_0,\,m_0)=(r_0'',\,m_0'')$. 证毕.

定理 2.4 设 $N,\,M\in\mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M}=\frac{p}{q}$, 其中 $p,\,q\in\mathbb{N}$, $\gcd(p,\,q)=1$, $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的 $N\mathbb{Z}$ 周期集, $g\in l^2(\mathbb{S})$. 对 $j\in\mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $\theta\in\mathbb{R}$, 定义 $G(j,\theta)$ 如 (2.4) 式. 则整数值函数 $(j,\theta)\mapsto\operatorname{rank}(G(j,\,\theta))$ 关于变量 j 是 $\frac{M}{q}$ 周期的, 且对 $j\in\mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\operatorname{rank}(G(j,\theta))\leqslant\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(j+kM). \tag{2.7}$$

证明 首先证明, 对每个 $j\in\mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\operatorname{rank}(G(j,\,\theta))=\operatorname{rank}(G(j+k_0M,\,\theta))=\operatorname{rank}(G(j+r_0N,\,\theta)), \tag{2.8}$$

其中 $k_0\in\mathbb{N}_p$, $r_0\in\mathbb{N}_q$. 分别记 $G(j,\,\cdot)$ 的第 k 列和第 r 行为 $A_k(j,\,\cdot)$ 和 $B_r(j,\,\cdot)$. 于是, 由离散 Zak 变换的拟周期性, 对 $k_0\in\mathbb{N}_p$,

$$A_k(j+k_0M,\,\cdot)=\begin{cases}A_{k+k_0}(j,\,\cdot), & 若0\leqslant k\leqslant p-k_0-1;\\ \mathrm{e}^{-2\pi i\cdot}A_{k+k_0-p}(j,\,\cdot), & 若p-k_0\leqslant k\leqslant p-1,\end{cases}$$

对 $r_0\in\mathbb{N}_q$,

$$B_r(j+r_0N,\,\cdot)=\begin{cases}B_{r-r_0}(j,\,\cdot), & 若r_0\leqslant r\leqslant q-1;\\ \mathrm{e}^{-2\pi i\cdot}B_{r-r_0+q}(j,\,\cdot), & 若0\leqslant r\leqslant r_0-1.\end{cases}$$

由此可得,

$$\operatorname{rank}\{\,A_k(j+k_0M,\,\cdot):\,k\in\mathbb{N}_p\,\}=\operatorname{rank}\{\,A_k(j,\cdot):\,k\in\mathbb{N}_p\,\},$$
$$\operatorname{rank}\{\,B_r(j+r_0N,\,\cdot):\,r\in\mathbb{N}_q\,\}=\operatorname{rank}\{\,B_r(j,\,\cdot):\,r\in\mathbb{N}_q\,\},$$

因此 (2.8) 式成立.

其次证明$\operatorname{rank}(G(j,\theta))$ 关于变量 j 是 $\frac{M}{q}$ 周期的. 任给 $\ell\in\mathbb{Z}$, 由引理 2.3 有唯一的 $(k_0,\,r_0,\,m_0)\in\mathbb{N}_p\times\mathbb{N}_q\times\mathbb{Z}$, 使得 $\ell=k_0q+(m_0q+r_0)p$. 再由 $\frac{N}{M}=\frac{p}{q}$ 可得

$$\frac{M}{q}\ell=k_0M+m_0qN+r_0N,$$

因而,

$$G\bigg(j+\frac{M}{q}\ell,\,\cdot\bigg)=\mathrm{e}^{-2\pi im_0\cdot}G(j+k_0M+r_0N,\,\cdot),$$

这说明

$$\operatorname{rank}\bigg(G\bigg(j+\frac{M}{q}\ell,\,\cdot\bigg)\bigg)=\operatorname{rank}(G(j+k_0M+r_0N,\,\cdot)).$$

再由 (2.8) 式可得

$$\operatorname{rank}\Big(G\Big(j+\frac{M}{q}\ell,\,\cdot\Big)\Big)=\operatorname{rank}(G(j+r_0N,\,\cdot))=\operatorname{rank}(G(j,\,\cdot)).$$

最后证明不等式 (2.7). 因 $\mathbb{S}$ 是 $N\mathbb{Z}$ 周期的, 故 $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{S}$ 也是 $N\mathbb{Z}$ 周期的. 于是, 如果 $\chi_{\mathbb{S}}(j+kM)=0$, 则对 $r\in\mathbb{N}_q$, $j+kM-rN\notin\mathbb{S}$, 再由离散 Zak 变换的定义, 对 $r\in\mathbb{N}_q$ 和几乎处处的 $\theta\in\mathbb{R}$, $(\mathcal{Z}_{qN}g)(j+kM-rN,\theta)=0$. 所以, 若 k 满足 $\chi_{\mathbb{S}}(j+kM)=0$, 则 $G(j,\theta)$ 的第 k 列一定等于 $\mathbf{0}$, 于是 $G(j,\theta)$ 的秩至多等于其他列的个数, 即 $\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(j+kM)$. 证毕.

注解 2.5 记 $\mathbb{S}_0=\mathbb{S}\cap\mathbb{N}_N$. 因 $N=\frac{pM}{q}$, 故对 $j\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(j+kM)&=\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{\mathbb{S}_0}(j+nN+kM)\\&=\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{\mathbb{S}_0}\Big(j+\frac{np+kq}{q}M\Big).\end{aligned}$$

再根据引理 2.3 可得

$$\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(j+kM)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{\mathbb{S}_0}\Big(j+\frac{M}{q}n\Big).$$

因此, $\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(j+kM)$ 是 $\frac{M}{q}$ 周期的. 由离散 Zak 变换关于第 2 个变量的周期性可知, 对 $j\in\mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $\theta\in\mathbb{R}$, 不等式 (2.7) 成立当且仅当它对 $j\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,\,1)$ 成立.

3 Gabor 系的完备性和标架刻画

设 $N,\,M\in\mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M}=\frac{p}{q}$, 其中 $p,\,q\in\mathbb{N}$, $\gcd(p,\,q)=1$, $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的 $N\mathbb{Z}$ 周期集. 本节刻画什么样的 $g\in l^2(\mathbb{S})$ 生成 $l^2(\mathbb{S})$ 的完备 Gabor 系 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$, 以及什么样的 $g\in l^2(\mathbb{S})$ 生成 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$. 为此首先建立两个引理.

引理 3.1 给定 $g\in l^2(\mathbb{Z})$. 设 $N,\,M\in\mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M}=\frac{p}{q}$, 其中 $p,\,q\in\mathbb{N}$, $\gcd(p,\,q)=1$, 定义 $G(j,\,\theta)$ 如 (2.4) 式, 则对 $f\in l^2(\mathbb{Z})$, f 与 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 正交当且仅当对 $j\in\mathbb{N}_M$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,\,1)$,

$$G(j,\,\theta)F(j,\,\theta)=\mathbf{0},\tag{3.1}$$

其中对每个 $j\in\mathbb{N}_M$, 在 $[0,\,1)$ 上几乎处处有 $F(j,\cdot):=(\overline{(\mathcal{Z}_{qN}f)(j+kM,\cdot)})^{\mathrm{T}}_{k\in\mathbb{N}_p}$.

证明 对 $r\in\mathbb{N}_q$, 定义 $g_r(\cdot)=g(\cdot-rN)$. 于是,

$$(\mathcal{Z}_{qN}\,\mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}\cdot}g_r(\cdot-nqN))(j,\,\theta)=\mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}j}\mathrm{e}^{2\pi in\theta}(\mathcal{Z}_{qN}\,g)(j-rN,\,\theta),$$

且 f 与 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 正交当且仅当对 $m\in\mathbb{N}_M$, $n\in\mathbb{Z}$ 和 $r\in\mathbb{N}_q$,

$$\langle f,\,\mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}\cdot}g_r(\cdot-nqN)\rangle=0.$$

在定理 2.1 中取 $\mathbb{S}=\mathbb{Z}$, 则对 $m\in\mathbb{N}_M$, $n\in\mathbb{Z}$ 和 $r\in\mathbb{N}_q$ 有

$$\begin{aligned}&\langle f,\,\mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}\cdot}g_r(\cdot-nqN)\rangle\\&=\sum_{j=0}^{qN-1}\Big(\int_0^1(\mathcal{Z}_{qN}\,f)(j,\,\theta)\,\overline{(\mathcal{Z}_{qN}\,g)(j-rN,\,\theta)}\,\mathrm{e}^{-2\pi in\theta}\,d\theta\Big)\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{m}{M}j}\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} \left(\int_0^1 \sum_{k=0}^{p-1} (\mathcal{Z}_{qN}\, f)(j+kM,\, \theta)\, \overline{(\mathcal{Z}_{qN}\, g)(j+kM-rN,\, \theta)}\, \mathrm{e}^{-2\pi i n\theta}\, d\theta \right) \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{m}{M} j}. \tag{3.2}$$

因此, f 与 $\mathcal{G}(g,\, N,\, M)$ 正交当且仅当对每个给定的 $r \in \mathbb{N}_q$ 和 $j \in \mathbb{N}_M$, 函数

$$\sum_{k=0}^{p-1} (\mathcal{Z}_{qN}\, f)\, (j+kM,\, \cdot)\, \overline{(\mathcal{Z}_{qN}\, g)\, (j+kM-rN,\, \cdot)}$$

的 Fourier 系数都为 0, 这等价于方程 (3.1) 成立. 证毕.

引理 3.2 设 $N,\, M \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M} = \frac{p}{q}$, 其中 $p,\, q \in \mathbb{N}$, $\gcd(p,\, q) = 1$, 则对每个 $m \in \mathbb{Z}$, 存在唯一的 $(j,\, r,\, k,\, \ell) \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p \times \mathbb{Z}$, 使得

$$m = j + kM - rN + \ell qN.$$

证明 对 $m \in \mathbb{Z}$, 存在 $\ell_m \in \mathbb{Z}$, 使得 $m - \ell_m qN \in \mathbb{N}_{qN}$. 根据引理 2.2, 存在 $(j,\, r,\, k,\, \ell'_m) \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p \times \mathbb{Z}$, 使得 $m - \ell_m qN = j + kM - rN + \ell'_m qN$, 因此, $m = j + kM - rN + \ell qN$, 其中 $\ell = \ell_m + \ell'_m$. 假设另有 $(j',\, r',\, k',\, \ell') \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p \times \mathbb{Z}$, 使得 $m = j' + k'M - r'N + \ell' qN$. 记 $n_0 = \frac{M}{q}$. 于是,

$$(j - j') + (k - k')n_0 q + (r' - r)n_0 p + (\ell - \ell')n_0 pq = 0, \tag{3.3}$$

由此可得 $n_0 \mid (j - j')$. 再由 $j,\, j' \in \mathbb{N}_{n_0}$ 知 $j = j'$, 从而 (3.3) 式可写为 $(k - k')q + (r' - r)p + (\ell - \ell')pq = 0$. 故 $q \mid (r' - r)$, $p \mid (k - k')$. 再由 $r',\, r \in \mathbb{N}_q$, $k',\, k \in \mathbb{N}_p$ 可得 $r = r'$, $k = k'$, 从而 $\ell = \ell'$. 证毕.

定理 3.3 设 $N,\, M \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M} = \frac{p}{q}$, 其中 $p,\, q \in \mathbb{N}$, $\gcd(p,\, q) = 1$, $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的 $N\mathbb{Z}$ 周期集. 给定 $g \in l^2(\mathbb{S})$, $G(j,\, \theta)$ 是 (2.4) 式定义的 $q \times p$ 矩阵值函数, 则下述条件等价:

(i) $\mathcal{G}(g,\, N,\, M)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备;

(ii) 对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$,

$$\operatorname{rank}(G(j,\, \theta)) = \sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM);$$

(iii) 对 $j \in \mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{rank}(G(j,\, \theta)) = \sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM).$$

证明 由定理 2.4 和注解 2.5, $\operatorname{rank}(G(j,\, \theta))$ 和 $\sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM)$ 关于变量 j 都是 $\frac{M}{q}$ 周期的. 再由 $\operatorname{rank}(G(j,\, \theta))$ 关于变量 θ 的 1 周期性可知 (ii) 等价于 (iii).

采用引理 3.1 中的记号. 显然, 对 $f \in l^2(\mathbb{Z})$, $f = 0$ 当且仅当对 $j \in \mathbb{N}_M$ 和几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$, $F(j,\, \theta) = \mathbf{0}$. 于是, 根据引理 3.1, (i) 等价于, 对 $f \in l^2(\mathbb{S})$, $G(j,\theta)\, F(j,\theta) = \mathbf{0}$ 隐含着对 $j \in \mathbb{N}_M$ 和几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$, $F(j,\, \theta) = \mathbf{0}$. 设 (iii) 成立, 对 $j \in \mathbb{N}_M$ 和几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$, 设 $f \in l^2(\mathbb{S})$ 满足

$$G(j,\theta)\, F(j,\theta) = \mathbf{0}. \tag{3.4}$$

为证明 (i) 成立, 只需证明对 $j \in \mathbb{N}_M$ 和几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$, $F(j,\, \theta) = \mathbf{0}$. 给定 $j \in \mathbb{N}_M$. 若对每个 $k \in \mathbb{N}_p$ 都有 $j + kM \notin \mathbb{S}$, 则由离散 Zak 变换的定义知, 对几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$, $F(j,\, \theta) = \mathbf{0}$. 若存在 $k \in \mathbb{N}_p$, 使得 $j + kM \in \mathbb{S}$, 则一定存在 $\emptyset \neq B \subset \mathbb{N}_p$, 使得

$$\sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) = \sum_{k \in B} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) = \operatorname{card}(B).$$

若 $k\in\mathbb{N}_p\setminus B$, 因 $f\in l^2(\mathbb{S})$, 对几乎处处的 $\theta\in[0,1)$, $(\mathcal{Z}_{qN}f)(j+kM,\theta)=0$, 且由 $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{S}$ 的 $N\mathbb{Z}$ 周期性, 对几乎处处的 $\theta\in[0,1)$, $G(j,\theta)_{r,k}=0$. 再根据 (iii), 由 $G(j,\theta)$ 中所有列标属于 B 的列组成的 $q\times\mathrm{card}(B)$ 子矩阵的秩等于 $\mathrm{card}(B)$. 结合方程 (3.4) 可得, 对 $k\in B$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$, $(\mathcal{Z}_{qN}f)(j+kM,\theta)=0$. 因此, 对几乎处处的 $\theta\in[0,1)$, $F(j,\theta)=\mathbf{0}$.

反之, 假设 (iii) 不成立, 根据定理 2.4, 存在 $j_0\in\mathbb{N}_M$, $B_0\subset\mathbb{N}_p$ 和正测集 $E_0\subset[0,1)$, 使得对 $\theta\in E_0$ 有

$$\mathrm{rank}(G(j_0,\theta))<\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(j_0+kM)=\sum_{k\in B_0}\chi_{\mathbb{S}}(j_0+kM)=\mathrm{card}(B_0).\tag{3.5}$$

对几乎处处的 $\theta\in[0,1)$, 记 $\mathcal{P}(j_0,\theta):\mathbb{C}^p\to\mathbb{C}^p$ 为到 $G(j_0,\theta)$ 的核空间上的正交投影算子, 记 $\mathbf{e}_k$, $k\in\mathbb{N}_p$, 为 $\mathbb{C}^p$ 的标准正交基, 即 $\mathbf{e}_k=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)^{\mathrm{T}}$, 其第 k 个分量为 1, 其他分量都为 0. 假设对几乎处处的 $\theta\in[0,1)$, $E=\mathrm{span}\{\mathbf{e}_k:k\in B_0\}\subset\ker(\mathcal{P}(j_0,\theta))$, 则 $E\oplus\ker(G(j_0,\theta))$ 是正交和, 因此对几乎处处的 $\theta\in[0,1)$,

$$p\geqslant\dim(E\oplus\ker(G(j_0,\theta)))=\mathrm{card}(B_0)+(p-\mathrm{rank}(G(j_0,\theta))).$$

由此可知, $\mathrm{rank}(G(j_0,\theta))\geqslant\mathrm{card}(B_0)$, 与 (3.5) 式矛盾. 所以, 必然存在 $k_0\in B_0$ 和正测集 $\tilde{E}_0\subset[0,1)$, 使得对 $\theta\in\tilde{E}_0$, $\mathcal{P}(j_0,\theta)\mathbf{e}_{k_0}\neq0$. 定义

$$F(j,\theta):=\begin{cases}\mathcal{P}(j_0,\theta)\mathbf{e}_{k_0}, & \text{对}j=j_0\text{ 和几乎处处的}\theta\in[0,1);\\ \mathbf{0}, & \text{对}j_0\neq j\in\mathbb{N}_M\text{ 和几乎处处的}\theta\in[0,1).\end{cases}$$

于是, 对 $j\in\mathbb{N}_M$, $k\in\mathbb{N}_p$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$,

$$\|F(j,\theta)\|_{\mathbb{C}^p}\leqslant1,\quad F_k(j_0,\theta)=\langle\mathcal{P}(j_0,\theta)\,\mathbf{e}_{k_0},\mathbf{e}_k\rangle=\langle\mathbf{e}_{k_0},\mathcal{P}(j_0,\theta)\,\mathbf{e}_k\rangle.$$

又因对 $k\in\mathbb{N}_p\setminus B_0$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$, $\mathbf{e}_k\in\ker(G(j_0,\theta))$, 故

$$F_k(j_0,\theta)=\langle\mathbf{e}_{k_0},\mathcal{P}(j_0,\theta)\,\mathbf{e}_k\rangle=\langle\mathbf{e}_{k_0},\mathbf{e}_k\rangle=0.$$

定义 $f\in l^2(\mathbb{Z})$ 为: 对 $j\in\mathbb{N}_M$, $k\in\mathbb{N}_p$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$,

$$(\mathcal{Z}_{qN}\,f)\,(j+kM,\theta)=F_k(j,\theta).$$

根据定理 2.1, $0\neq f\in l^2(\mathbb{S})$. 注意到 (3.4) 式成立, 结合引理 3.1 可知 f 与 $\mathcal{G}(g,N,M)$ 正交. 这说明 (i) 不成立. 证毕.

定理 3.4 设 $N,M\in\mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M}=\frac{p}{q}$, 其中 $p,q\in\mathbb{N}$, $\gcd(p,q)=1$, $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的 $N\mathbb{Z}$ 周期集. 给定 $g\in l^2(\mathbb{S})$, $G(j,\theta)$ 为 (2.4) 式所定义的 $q\times p$ 矩阵值函数. 则下列条件等价:

(i) $\mathcal{G}(g,N,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架界为 $0<A\leqslant B<\infty$ 的标架;

(ii) 对 $j\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$,

$$\begin{aligned}\frac{A}{M}\mathrm{diag}(\chi_{B_j}(0),\dots,\chi_{B_j}(p-1))&\leqslant G^*(j,\theta)G(j,\theta)\\&\leqslant\frac{B}{M}\mathrm{diag}(\chi_{B_j}(0),\dots,\chi_{B_j}(p-1)),\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 $B_j:=\{k\in\mathbb{N}_p:j+kM\in\mathbb{S}\}$;

(iii) 对 $j\in\mathbb{N}_M$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$, (3.6) 式成立.

证明 采用引理 3.1 的记号. 由 (3.2) 式, 对 $f\in l^2(\mathbb{S})$ 有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m=0}^{M-1}|\langle f,\mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}\cdot}g(\cdot-nN)\rangle|^2=M\sum_{r=0}^{q-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{M-1}\left|\int_0^1\overline{(G(j,\theta)F(j,\theta))_r}\mathrm{e}^{-2\pi in\theta}d\theta\right|^2,$$

其中 $(G(j,\theta)F(j,\theta))_r$ 是 $G(j,\theta)F(j,\theta)$ 的第 r 个分量. 根据定理 2.1,

$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{p-1}\int_0^1|(\mathcal{Z}_{qN}f)(j+kM,\theta)|^2d\theta\\&=\sum_{j=0}^{M-1}\int_0^1\|F(j,\theta)\|^2d\theta.\end{aligned}$$

这里 $F(j,\theta)$ 的范数指它在 $\mathbb{C}^p$ 中的范数. 于是, $\mathcal{G}(g,N,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架界为 $0<A\leqslant B<\infty$ 的标架当且仅当对 $f\in l^2(\mathbb{S})$,

$$\begin{aligned}\frac{A}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\int_0^1\|F(j,\theta)\|^2\,d\theta&\leqslant\sum_{r=0}^{q-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{M-1}\left|\int_0^1\overline{(G(j,\theta)F(j,\theta))_r}\mathrm{e}^{-2\pi in\theta}d\theta\right|^2\\&\leqslant\frac{B}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\int_0^1\|F(j,\theta)\|^2\,d\theta.\end{aligned}\tag{3.7}$$

因 $\mathbb{S}$ 是 $N\mathbb{Z}$ 周期的, 它也是 $qN\mathbb{Z}$ 周期的. 记 $\widetilde{\mathbb{S}}_0=\mathbb{S}\cap\mathbb{N}_{qN}$. 由定理 2.1, $\mathcal{Z}_{qN}\mid_{l^2(\mathbb{S})}$ 是从 $l^2(\mathbb{S})$ 到 $L^2(\widetilde{\mathbb{S}}_0\times[0,1))$ 的酉算子. 记 $L^\infty(\widetilde{\mathbb{S}}_0\times[0,1))$ 为所有这样的函数 f 组成的集合: f 是 $\widetilde{\mathbb{S}}_0\times[0,1)$ 上的函数, 且对每个 $j\in\widetilde{\mathbb{S}}_0$, $f(j,\cdot)\in L^\infty[0,1)$. 定义 $\Gamma=\left(\mathcal{Z}_{qN}\mid_{l^2(\mathbb{S})}\right)^{-1}L^\infty(\widetilde{\mathbb{S}}_0\times[0,1))$. 于是, 由 $L^\infty(\widetilde{\mathbb{S}}_0\times[0,1))$ 在 $L^2(\widetilde{\mathbb{S}}_0\times[0,1))$ 中的稠密性以及 $\mathcal{Z}_{qN}\mid_{l^2(\mathbb{S})}$ 的酉性可知 Γ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中是稠密的. 因此, 由文献 [3, 引理 5.1.7], $\mathcal{G}(g,N,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 中标架界为 $0<A\leqslant B<\infty$ 的标架当且仅当对 $f\in\Gamma$, (3.7) 式成立. 给定 $j\in\mathbb{N}_M$, 注意到对 $f\in\Gamma$, $G(j,\theta)F(j,\theta)$ 的每个分量都属于 $L^2[0,1)$, 于是, 对 $f\in\Gamma$,

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{q-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_0^1\overline{(G(j,\theta)F(j,\theta))_r}\mathrm{e}^{-2\pi in\theta}d\theta\right|^2&=\sum_{r=0}^{q-1}\int_0^1|(G(j,\theta)F(j,\theta))_r|^2\,d\theta\\&=\int_0^1\left\langle G^*(j,\theta)G(j,\theta)F(j,\theta),F(j,\theta)\right\rangle d\theta.\end{aligned}$$

所以, $\mathcal{G}(g,N,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架界为 $0<A\leqslant B<\infty$ 的标架当且仅当对 $f\in\Gamma$,

$$\begin{aligned}\frac{A}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\int_0^1\|F(j,\theta)\|^2\,d\theta&\leqslant\sum_{j=0}^{M-1}\int_0^1\left\langle G^*(j,\theta)G(j,\theta)F(j,\theta),F(j,\theta)\right\rangle d\theta\\&\leqslant\frac{B}{M}\sum_{j=0}^{M-1}\int_0^1\|F(j,\theta)\|^2\,d\theta.\end{aligned}\tag{3.8}$$

(i)$\Longrightarrow$ (iii). 只需证明对 $x=(x_0,\ldots,x_{p-1})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^p$, $j\in\mathbb{N}_M$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$,

$$\begin{aligned}\frac{A}{M}\sum_{k=0}^{p-1}|x_k\chi_{B_j}(k)|^2&\leqslant\left\langle G^*(j,\theta)G(j,\theta)x,x\right\rangle\\&\leqslant\frac{B}{M}\sum_{k=0}^{p-1}|x_k\chi_{B_j}(k)|^2.\end{aligned}$$

由于 $g\in l^2(\mathbb{S})$, 上式等价于对 $x=(x_0,\ldots,x_{p-1})^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^p$, $j\in\mathbb{N}_M$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$,

$$\begin{aligned}\frac{A}{M}\|x^{(j)}\|^2&\leqslant\left\langle G^*(j,\theta)G(j,\theta)x^{(j)},x^{(j)}\right\rangle\\&\leqslant\frac{B}{M}\|x^{(j)}\|^2,\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中, $x^{(j)}=(x_0\chi_{B_j}(0),\ldots,x_{p-1}\chi_{B_j}(p-1))^{\mathrm{T}}$. 给定 $x_0,\ldots,x_{p-1}\in\mathbb{C}$, $j_0\in\mathbb{N}_M$. 注意到 $G^*(j_0,\theta)G(j_0,\theta)$ 的所有元素都属于 $L^1[0,1)$, 所以几乎每个 $\theta\in[0,1)$ 都是 $G^*(j_0,\theta)G(j_0,\theta)$

中所有元素的 Lebesgue 点. 设 θ_0 是任意一个这样的点. 为完成证明, 只需证明对 $x_0, \dots, x_{p-1}$, j_0 和 θ_0, (3.9) 式成立. 设 $\epsilon > 0$ 满足 $(\theta_0 - \epsilon,\, \theta_0 + \epsilon) \subset (0,\, 1)$. 定义 $f \in l^2(\mathbb{S})$ 为: 对 $j \in \mathbb{N}_M$, $k \in \mathbb{N}_p$ 和 $\theta \in [0,\, 1)$,

$$(\mathcal{Z}_{qN} f)(j + kM,\, \theta) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\epsilon}} x_k \chi_{B_{j_0}}(k) \chi_{(\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon)}(\theta), & j = j_0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

于是 $f \in \Gamma$, 且对 $j \in \mathbb{N}_M$ 和 $\theta \in [0,\, 1)$,

$$\|F(j,\, \theta)\|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon} \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} |x_k \chi_{B_{j_0}}(k)|^2 \chi_{(\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon)}(\theta), & j = j_0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由 (3.8) 式有

$$\begin{aligned} \frac{A}{M} \|x^{(j_0)}\|^2 &\leqslant \frac{1}{2\epsilon} \int_{\theta_0 - \epsilon}^{\theta_0 + \epsilon} \langle G^*(j_0,\, \theta) G(j_0,\, \theta) x^{(j_0)}, x^{(j_0)} \rangle \, d\theta \\ &\leqslant \frac{B}{M} \|x^{(j_0)}\|^2. \end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0$ 即得对 $x_0,\, \dots,\, x_{p-1}$, j_0 和 θ_0, (3.9) 式成立.

(iii)$\Longrightarrow$ (i). 对 $f \in \Gamma$, $j \in \mathbb{N}_M$, 若 $k \notin B_j$, 则对几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$, $F(j,\, \theta)$ 的第 k 个分量等于 0. 再由 (iii) 可得, 对 $f \in \Gamma$, $j \in \mathbb{N}_M$ 和几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$,

$$\begin{aligned} \frac{A}{M} \|F(j,\, \theta)\|^2 &\leqslant \big\langle G^*(j,\, \theta) G(j,\, \theta) F(j,\, \theta), F(j,\, \theta) \big\rangle \\ &\leqslant \frac{B}{M} \|F(j,\, \theta)\|^2, \end{aligned}$$

进而可知, 对 $f \in \Gamma$, (3.8) 式成立.

(iii)$\Longrightarrow$ (ii). 因为 $\mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \subset \mathbb{N}_M$, 显然成立.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii). 设对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$, (3.6) 式成立. 下证它对 $j \in \mathbb{N}_M$ 和几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$ 也成立. 给定 $j \in \mathbb{N}_M$. 根据引理 3.2, 存在唯一的 $(j', r', k', \ell') \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p \times \mathbb{Z}$, 使得 $j = j' + k'M - r'N + \ell' qN$. 于是, 由离散 Zak 变换的拟周期性及简单计算可得, 对 $k_1,\, k_2 \in \mathbb{N}_p$ 和几乎处处的 $\theta \in [0,\, 1)$,

$$\begin{aligned} &(G^*(j,\, \theta) G(j,\, \theta))_{k_1,\, k_2} \\ &= \sum_{r=0}^{q-1} \overline{(\mathcal{Z}_{qN} g)(j' + (k_1 + k')M - (r + r')N,\, \theta)} (\mathcal{Z}_{qN} g)(j' + (k_2 + k')M - (r + r')N,\, \theta) \\ &= \begin{cases} (G^*(j',\, \theta) G(j',\, \theta))_{k_1 + k',\, k_2 + k'}, & \text{若} k_1 + k' < p,\ k_2 + k' < p; \\ \mathrm{e}^{-2\pi i\theta}\ (G^*(j',\, \theta) G(j',\, \theta))_{k_1 + k',\, k_2 + k' - p}, & \text{若} k_1 + k' < p,\ k_2 + k' \geqslant p; \\ \mathrm{e}^{2\pi i\theta}\ (G^*(j',\, \theta) G(j',\, \theta))_{k_1 + k' - p,\, k_2 + k'}, & \text{若} k_1 + k' \geqslant p,\ k_2 + k' < p; \\ (G^*(j',\, \theta) G(j',\, \theta))_{k_1 + k' - p,\, k_2 + k' - p}, & \text{若} k_1 + k' \geqslant p,\ k_2 + k' \geqslant p. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.10}$$

定义 U: $\mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$ 为: 对 $x \in \mathbb{C}^p$, $Ux = y = (y_0,\, y_1,\, \dots,\, y_{p-1})^{\mathrm{T}}$, 其中

$$y_k = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2\pi i\theta} x_{k - k' + p}, & \text{若} 0 \leqslant k \leqslant k' - 1; \\ x_{k - k'}, & \text{若} k' \leqslant k \leqslant p - 1. \end{cases}$$

于是, U 是酉算子, 且对几乎处处的 $\theta\in[0,1)$ 和每个 $x\in\mathbb{C}^p$,

$$\langle G^*(j,\theta)G(j,\theta)x,\,x\rangle=\langle G^*(j',\theta)G(j',\theta)Ux,\,Ux\rangle. \tag{3.11}$$

再由 (ii), 对几乎处处的 $\theta\in[0,1)$ 和每个 $x\in\mathbb{C}^p$,

$$\begin{aligned}&\frac{A}{M}\ \langle U^*\mathrm{diag}(\chi_{B_{j'}}(0),\,\dots,\,\chi_{B_{j'}}(p-1))Ux,\,x\rangle\\ &\quad\leqslant\langle G^*(j,\theta)G(j,\theta)x,\ x\rangle\\ &\quad\leqslant\frac{B}{M}\langle U^*\mathrm{diag}(\chi_{B_{j'}}(0),\,\dots,\,\chi_{B_{j'}}(p-1))Ux,\,x\rangle.\end{aligned} \tag{3.12}$$

当 $k+k'<p$ 时, $k+k'\in B_{j'}$ 当且仅当 $j'+(k+k')M\in\mathbb{S}$, 等价地, $j'+k'M-r'N+\ell'qN+kM\in\mathbb{S}$, 即, $j+kM\in\mathbb{S}$. 因此, 当 $k+k'<p$ 时, $k+k'\in B_{j'}$ 当且仅当 $k\in B_j$. 类似可得, 当 $k+k'\geqslant p$ 时, $k+k'-p\in B_{j'}$ 当且仅当 $k\in B_j$. 由此可得

$$U^*\mathrm{diag}(\chi_{B_{j'}}(0),\,\dots,\,\chi_{B_{j'}}(p-1))U=\mathrm{diag}(\chi_{B_j}(0),\,\dots,\,\chi_{B_j}(p-1)), \tag{3.13}$$

结合 (3.12) 式便得 (iii). 证毕.

注解 3.5 当 $\mathbb{S}=\mathbb{Z}$ 时, 定理 3.4 变为文献 [4, 1.6.5.2], 也就是说, 对任何 $0<A,\,B<\infty$,

$$\begin{aligned}&A\|f\|^2\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m=0}^{M-1}\left|\langle f,\,\mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}\cdot}g(\cdot-nN)\rangle\right|^2\leqslant B\|f\|^2,\quad f\in l^2(\mathbb{Z})\\ &\iff\frac{A}{M}I_{p\times p}\leqslant G^*(j,\theta)G(j,\theta)\leqslant\frac{B}{M}I_{p\times p},\quad j\in\mathbb{Z},\quad \text{a.e. }\theta\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

其中 $I_{p\times p}$ 表示 $p\times p$ 单位矩阵.

例 3.6 给定 $M\in\mathbb{N}$, $N=M+1$, $\mathbb{S}=\mathbb{N}_M+N\mathbb{Z}$. 设

$$A(\cdot)=(A_0(\cdot),\,A_1(\cdot),\,\dots,\,A_N(\cdot))$$

是 $M\times N$ 矩阵值函数, 其元素均属于 $L^2[0,1)$, $A_1(\cdot)=\mathbf{0}$, 且在 $[0,1)$ 上几乎处处有 $\mathrm{rank}(A(\cdot))=M$. 定义 $g\in l^2(\mathbb{Z})$ 为: 对 $j\in\mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$,

$$G(j,\theta)=((\mathcal{Z}_{MN}g)(j+kM-rN,\,\theta))_{r\in\mathbb{N}_M,\,k\in\mathbb{N}_N},\quad G(0,\theta)=A(\theta). \tag{3.14}$$

则 $\mathcal{G}(g,N,M)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备.

证明 采用定理 3.3 中的记号. 显然 $p=N$, $q=M$, $qN=MN$, $\frac{M}{q}=1$. 根据引理 2.3 前面的讨论, g 由 $G(0,\cdot)$ 唯一确定, 且 $g\in l^2(\mathbb{Z})$. 由 $A_1(\cdot)=\mathbf{0}$ 可知, 对 $r\in\mathbb{N}_M$, $(\mathcal{Z}_{MN}g)(M-rN,\cdot)=0$. 因此, 对 $r\in\mathbb{N}_M$ 和 $\ell\in\mathbb{Z}$, $g(M-rN+\ell MN)=g(M+(\ell M-r)N)=0$, 进而, 对 $n\in\mathbb{Z}$, $g(M+nN)=0$. 再由 $\mathbb{S}$ 的定义知 $g\in l^2(\mathbb{S})$. 而对 $1\neq k\in\mathbb{N}_N$, $kM=(M+1-k)+(k-1)N\subset\mathbb{S}$, 于是, $\sum_{k=0}^{N-1}\chi_{\mathbb{S}}(kM)=M$, 从而, $\mathrm{rank}(G(0,\cdot))=\sum_{k=0}^{N-1}\chi_{\mathbb{S}}(kM)$. 根据定理 3.3, $\mathcal{G}(g,N,M)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备.

注解 3.7 从例 3.6 可得到许多 g, 使得 $\mathcal{G}(g,N,M)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备, 其中 $N=M+1$. 事实上, 设 $A(\cdot)=(a_{r,k}(\cdot))_{r\in\mathbb{N}_M,\,k\in\mathbb{N}_N}$, 则方程 (3.14) 等价于, 对 $n\in\mathbb{Z}$,

$$g(M+nN)=0 \tag{3.15}$$

以及在 $[0,1)$ 上几乎处处有

$$((\mathcal{Z}_{MN}g)(j+kM-rN,\,\cdot))_{r\in\mathbb{N}_M,\,k\in\mathbb{N}_N\setminus\{1\}}=(a_{r,k}(\cdot))_{r\in\mathbb{N}_M,\,k\in\mathbb{N}_N\setminus\{1\}}. \tag{3.16}$$

特别地, 如果在 $[0,1)$ 上令

$$a_{r,k}(\cdot)=0,\quad 0\neq r\geqslant k,\quad k\neq 1, \tag{3.17}$$

$$a_{0,0}(\cdot)=c_0,\quad a_{r,r+1}(\cdot)=c_r,\quad 1\leqslant r\leqslant M-1, \tag{3.18}$$

其中 c_r, $r\in\mathbb{N}_M$, 是非零常数, 则所得到的 g 生成的 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备. 由离散 Zak 变换的定义和 (3.15)–(3.18) 式, 如果 $g\in l^2(\mathbb{Z})$ 满足条件 $g(0)g(1)\cdots g(M-1)\neq 0$, 且 g 在集合

$$(\{kM-rN:\, r\geqslant k, r\in\mathbb{N}_M\setminus\{0\},\, k\in\mathbb{N}_N\backslash\{1\}\}+MN\mathbb{Z})$$

$$\cup(\{M-rN:\, r\in\mathbb{N}_M\}+MN\mathbb{Z})\cup(\mathbb{N}_M+MN(\mathbb{Z}\backslash\{0\}))$$

上等于 0, 则 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备. 特别地, 若令 $N=4$, $M=3$, 如果 $g\in l^2(\mathbb{Z})$ 满足 $g(0)g(1)g(2)\neq 0$, 且 g 在集合

$$(\{\,3,\,4,\,7,\,8,\,10,\,11\,\}+12\mathbb{Z})\cup(\{\,0,\,1,\,2\,\}+12(\mathbb{Z}\setminus\{0\}))$$

上等于 0, 则 $\mathcal{G}(g,\,4,\,3)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备.

例 3.8 设 $N=6$, $M=4$, $\mathbb{S}=\{0,\,1,\,4\,\}+6\mathbb{Z}$,

$$A(\cdot)=(A_0(\cdot),\,A_1(\cdot),\,\mathbf{0}),\qquad B(\cdot)=(B_0(\cdot),\,\mathbf{0},\,\mathbf{0})$$

是两个 2×3 矩阵值函数, 其元素均属于 $L^2[0,\,1)$, 且在 $[0,\,1)$ 上几乎处处有 $\mathrm{rank}(A(\cdot))=2$ 和 $\mathrm{rank}(B(\cdot))=1$. 定义 $g\in l^2(\mathbb{Z})$ 为: 对 $j\in\mathbb{Z}$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,\,1)$,

$$G(j,\,\theta)=(\mathcal{Z}_{12}g(j+4k-6r,\,\theta))_{0\leqslant r\leqslant 1,\,0\leqslant k\leqslant 2},\qquad G(0,\,\theta)=A(\theta),\qquad G(1,\,\theta)=B(\theta). \tag{3.19}$$

于是, 类似于例 3.6, $\mathcal{G}(g,\,6,\,4)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备. 特别地, 类似于注解 3.7 中的讨论可知, 如果 $g\in l^2(\mathbb{Z})$ 满足 $g(0)g(1)g(-2)\neq 0$, 且 g 在集合

$$(\{\,-1,\,2,\,3,\,5,\,6,\,8,\,9\,\}+12\mathbb{Z})\cup(\{\,-2,\,0,\,1\,\}+12(\mathbb{Z}\setminus\{0\}))$$

上等于 0, 则 $\mathcal{G}(g,\,6,\,4)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备.

例 3.9 设 $N=4$, $M=3$, $\mathbb{S}=\{0,\,1,\,2\,\}+4\mathbb{Z}$, $g\in l^1(\mathbb{Z})$ 在集合

$$(\{\,3,\,4,\,5,\,7,\,8,\,9,\,10,\,11\,\}+12\mathbb{Z})\cup(\{\,0,\,1,\,2\,\}+12(\mathbb{Z}\setminus\{0\}))$$

上等于 0, 且

$$|g(1)|,\ |g(2)|>|g(0)|>0,\qquad \max_{\theta\in[0,1]}\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}g(6+12\ell)\mathrm{e}^{2\pi i\ell\theta}\right|<|g(0)|, \tag{3.20}$$

则 $\mathcal{G}(g,\,4,\,3)$ 作成 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架.

证明 采用定理 3.4 中的记号. 由 $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{S}=\{\,3\,\}+4\mathbb{Z}=\{\,3,\,7,\,11\,\}+12\mathbb{Z}$ 可知 $g\in l^2(\mathbb{S})$. 容易验证, $\frac{M}{q}=1$, $B_0=\{\,0,\,2,\,3\,\}$. 只需证明对 $j=0$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,\,1)$, (3.6) 式成立, 即, 存在 $0<C\leqslant D<\infty$, 使得对 $x=(x_0,\,x_1,\,x_2,\,x_3)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^4$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,\,1)$,

$$C(|x_0|^2+|x_2|^2+|x_3|^2)\leqslant\langle G^*(0,\,\theta)G(0,\,\theta)x,\,x\rangle\leqslant D(|x_0|^2+|x_2|^2+|x_3|^2). \tag{3.21}$$

简单计算可得

$$\begin{aligned}\langle G^*(0,\,\theta)G(0,\,\theta)x,\,x\rangle&=|g(0)|^2|x_0|^2+(|g(2)|^2+|(\mathcal{Z}_{12}g)(6,\,\theta)|^2)|x_2|^2\\&\quad+|g(1)|^2|x_3|^2+2\mathrm{Re}(\overline{g(0)}(\mathcal{Z}_{12}g)(6,\,\theta)x_0\overline{x_2}).\end{aligned}$$

令 $C=|g(0)|[|g(0)|-\max_{\theta\in[0,\,1]}|(\mathcal{Z}_{12}g)(6,\,\theta)|]$, $D=\max\{\,2|g(0)|^2+|g(2)|^2,\,|g(1)|^2\,\}$. 由 (3.20) 式, C 和 D 满足 (3.21) 式. 证毕.

例 3.10 设 $N=6$, $M=4$, $\mathbb{S}=\{0,\,1,\,4\,\}+6\mathbb{Z}$, $g\in l^1(\mathbb{Z})$ 在集合

$$(\{\,-1,\,2,\,3,\,5,\,6,\,8,\,9\,\}+12\mathbb{Z})\cup(\{\,-2,\,0,\,1\,\}+12(\mathbb{Z}\setminus\{0\}))$$

上等于 0, 且

$$|g(1)|,\ |g(-2)|>|g(0)|>0,\quad \max_{\theta\in[0,1]}\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}g(4+12\ell)\mathrm{e}^{2\pi i\ell\theta}\right|<|g(0)|, \tag{3.22}$$

则 $\mathcal{G}(g,6,4)$ 作成 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架.

证明 采用定理 3.4 中的记号. 由于

$$\mathbb{Z}\setminus\mathbb{S}=\{2,3,5\}+6\mathbb{Z}=\{-1,2,3,5,8,9\}+12\mathbb{Z},$$

故 $g\in l^2(\mathbb{S})$. 容易验证, $\frac{M}{q}=2$, $B_0=\{0,1\}$, $B_1=\{0\}$. 只需证明对 $j\in\{0,1\}$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$, (3.6) 式成立, 即存在 $0<C\leqslant D<\infty$, 使得对 $x=(x_0,x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^3$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$,

$$C(|x_0|^2+|x_1|^2)\leqslant\langle G^*(0,\theta)G(0,\theta)x,x\rangle\leqslant D(|x_0|^2+|x_1|^2), \tag{3.23}$$

$$C|x_0|^2\leqslant\langle G^*(1,\theta)G(1,\theta)x,x\rangle\leqslant D|x_0|^2. \tag{3.24}$$

简单计算可得

$$\begin{aligned}\langle G^*(0,\theta)G(0,\theta)x,x\rangle&=|g(0)|^2|x_0|^2+(|g(-2)|^2+|(\mathcal{Z}_{12}g)(4,\theta)|^2)|x_1|^2\\&\quad+2\mathrm{Re}(\overline{g(0)}(\mathcal{Z}_{12}g)(4,\theta)\overline{x_0}x_1),\\\langle G^*(1,\theta)G(1,\theta)x,x\rangle&=(|g(1)|^2+|(\mathcal{Z}_{12}g)(-5,\theta)|^2)|x_0|^2.\end{aligned} \tag{3.25}$$

令

$$C=|g(0)|\Big[|g(0)|-\max_{\theta\in[0,1]}|(\mathcal{Z}_{12}g)(4,\theta)|\Big],\quad D=\max\{D_1,D_2,D_3\},$$

其中, $D_1=|g(0)|^2+|g(0)|\max_{\theta\in[0,1]}|(\mathcal{Z}_{12}g)(4,\theta)|$, $D_2=|g(1)|^2+\max_{\theta\in[0,1]}|(\mathcal{Z}_{12}g)(-5,\theta)|^2$, $D_3=|g(-2)|^2+|g(0)|\max_{\theta\in[0,1]}|(\mathcal{Z}_{12}g)(4,\theta)|+\max_{\theta\in[0,1]}|(\mathcal{Z}_{12}g)(4,\theta)|^2$. 由 $g\in l^1(\mathbb{Z})$ 可知 $D<\infty$. 结合 (3.22) 式, C 和 D 满足 (3.23) 和 (3.24) 式. 证毕.

例 3.11 设 $N=4$, $M=6$, $\mathbb{S}=\{0,2\}+4\mathbb{Z}$, $g\in l^1(\mathbb{Z})$ 在集合

$$(\{-1,1,2,3,4,5,7,8,9\}+12\mathbb{Z})\cup(\{-2,0\}+12(\mathbb{Z}\setminus\{0\}))$$

上等于 0, 且

$$|g(-2)|>|g(0)|>0,\quad \max_{\theta\in[0,1]}\left|\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}g(6+12\ell)\mathrm{e}^{2\pi i\ell\theta}\right|<|g(0)|,$$

则 $\mathcal{G}(g,4,6)$ 作成 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架.

证明 采用定理 3.4 中的记号. 容易验证, $p=2$, $q=3$, $\frac{M}{q}=2$, $B_0=\{0,1\}$, $B_1=\emptyset$, 且对几乎处处的 $\theta\in[0,1)$, $G(1,\theta)=\mathbf{0}$, 因此, 只需证明存在 $0<C\leqslant D<\infty$, 使得对 $x=(x_0,x_1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^2$ 和几乎处处的 $\theta\in[0,1)$,

$$C(|x_0|^2+|x_1|^2)\leqslant\langle G^*(0,\theta)G(0,\theta)x,x\rangle\leqslant D(|x_0|^2+|x_1|^2). \tag{3.26}$$

简单计算可得

$$\begin{aligned}\langle G^*(0,\theta)G(0,\theta)x,x\rangle&=|g(0)|^2|x_0|^2+(|g(-2)|^2+|(\mathcal{Z}_{12}g)(6,\theta)|^2)|x_1|^2\\&\quad+2\mathrm{Re}(\overline{g(0)}(\mathcal{Z}_{12}g)(6,\theta)x_1\overline{x_0}).\end{aligned}$$

令 $C=|g(0)|[|g(0)|-\max_{\theta\in[0,1]}|(\mathcal{Z}_{12}g)(6,\theta)|]$, $D=2|g(0)|^2+|g(-2)|^2$, 则 (3.26) 式成立. 证毕.

4 完备 Gabor 系和紧 Gabor 标架的容许条件

本节刻画容许完备 Gabor 系和紧 Gabor 标架的周期集. 假设 $N, M \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M} = \frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{N}$, $\gcd(p, q) = 1$, $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的 $N\mathbb{Z}$ 周期集. 本节讨论对怎样的 $\mathbb{S}$, 存在 $\mathbb{Z}$ 中的集合 E, 使得 Gabor 系 $\mathcal{G}(\chi_E, N, M)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备以及作成标架界为 M 的紧标架. 可以证明, 在两种情形下加在 $\mathbb{S}$ 上的条件是相同的, 即, 对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) \leqslant q. \tag{4.1}$$

我们的证明方法是构造性的. 我们还将证明: 满足 $\mathcal{G}(\chi_E, N, M)$ 作成 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架界为 M 的紧标架的集 E 均可采用我们的方法得到. 首先需要建立两个引理.

引理 4.1 给定 $N, M \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M} = \frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{N}$, $\gcd(p, q) = 1$. 设 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的 $N\mathbb{Z}$ 周期集, $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S} \cap \mathbb{N}_N$, 且对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, $\sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) \leqslant q$, 则 $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0) \leqslant M$, 且等号成立当且仅当对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) = q, \tag{4.2}$$

等价地, 对 $j \in \mathbb{Z}$, (4.2) 式成立.

证明 根据注解 2.5, 对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_{\mathbb{S}_0}\left(j + \frac{M}{q} n\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) \leqslant q,$$

于是,

$$\mathrm{card}(\mathbb{S}_0) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi_{\mathbb{S}_0}(j) = \sum_{j=0}^{M/q-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_{\mathbb{S}_0}\left(j + \frac{M}{q} n\right) \leqslant \frac{M}{q} \times q = M,$$

而且, $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0) = M$ 当且仅当对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, (4.2) 式成立. 再由注解 2.5, $\sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM)$ 是 $\frac{M}{q}$ 周期的, 所以 (4.2) 式对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 成立等价于它对 $j \in \mathbb{Z}$ 成立. 证毕.

引理 4.2 设 $M \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq E \subset \mathbb{Z}$, 则下列条件等价:

(i) $\{ \mathrm{e}^{2\pi i \frac{m}{M} \cdot} \chi_E(\cdot) : m \in \mathbb{N}_M \}$ 是 $l^2(E)$ 的标架界为 M 的紧标架;

(ii) $\{ \mathrm{e}^{2\pi i \frac{m}{M} \cdot} \chi_E(\cdot) : m \in \mathbb{N}_M \}$ 在 $l^2(E)$ 中完备;

(iii) E $M\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{N}_M$ 的一个子集;

(iv) 在 $\mathbb{Z}$ 上, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_E(\cdot + kM) \leqslant 1$.

证明 显然 (i)$\Longrightarrow$(ii). 为完成证明, 下面证明 (ii)$\Longrightarrow$(iii), (iii)$\Longrightarrow$(i), 以及 (iii) 与 (iv) 等价.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). 设 $\{ \mathrm{e}^{2\pi i \frac{m}{M} \cdot} \chi_E(\cdot) : m \in \mathbb{N}_M \}$ 在 $l^2(E)$ 中完备. 对 $\ell \in \mathbb{Z}$, 定义 $E_\ell = E \cap (\mathbb{N}_M + \ell M)$, 则 $\{ E_\ell : \ell \in \mathbb{Z} \}$ 是 E 的一个剖分, 且 $\bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} (E_\ell - \ell M) \subset \mathbb{N}_M$. 为证明 (iii) 成立, 只需证明对 $\ell, k \in \mathbb{Z}$, $\ell \neq k$,

$$(E_\ell - \ell M) \cap (E_k - kM) = \emptyset.$$

用反证法. 假设存在 $\ell_0, k_0 \in \mathbb{Z}$, $\ell_0 \neq k_0$, 使得 $F := (E_{\ell_0} - \ell_0 M) \cap (E_{k_0} - k_0 M) \neq \emptyset$. 定义

$f \in l^2(E)$ 为

$$f(\cdot) := \begin{cases} 1, & \text{在 } F + \ell_0 M \text{上}; \\ -1, & \text{在 } F + k_0 M \text{上}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

于是, 对 $m \in \mathbb{N}_M$,

$$\begin{aligned} \left\langle f(\cdot),\, \mathrm{e}^{2\pi i \frac{m}{M} \cdot} \chi_{_E}(\cdot) \right\rangle &= \sum_{j \in E} f(j) \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{m}{M} j} \\ &= \sum_{j \in F + \ell_0 M} \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{m}{M} j} - \sum_{j \in F + k_0 M} \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{m}{M} j} = 0, \end{aligned}$$

这与 $\{\, \mathrm{e}^{2\pi i \frac{m}{M} \cdot} \chi_{_E}(\cdot) : m \in \mathbb{N}_M \,\}$ 在 $l^2(E)$ 中完备矛盾.

(iii)$\Longrightarrow$(i). 设存在 E 的一个剖分 $\{\, E_\ell : \ell \in \mathbb{Z} \}$, 使得 $\{\, E_\ell - \ell M : \ell \in \mathbb{Z} \}$ 作成 $\mathbb{N}_M$ 中某子集的一个剖分, 则对 $f \in l^2(E)$,

$$\begin{aligned} \langle f(\cdot),\, \mathrm{e}^{2\pi i \frac{m}{M} \cdot} \chi_{_E}(\cdot) \rangle &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in E_\ell - \ell M} f(j + \ell M)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{m}{M} j} \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(j + \ell M) \chi_{_{E_\ell - \ell M}}(j) \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{m}{M} j}, \end{aligned}$$

再用 Parseval 公式得

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} |\langle f(\cdot),\, \mathrm{e}^{2\pi i \frac{m}{M} \cdot} \chi_{_E}(\cdot) \rangle|^2 &= M \sum_{j=0}^{M-1} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(j + \ell M) \chi_{_{E_\ell - \ell M}}(j) \right|^2 \\ &= M \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in E_\ell - \ell M} |f(j + \ell M)|^2 \\ &= M \sum_{j \in E} |f(j)|^2. \end{aligned}$$

(i) 得证.

(iii)$\Longrightarrow$(iv). 设存在 E 的一个剖分 $\{\, E_k : k \in \mathbb{Z} \}$, 使得 $\{\, E_k - kM : k \in \mathbb{Z} \}$ 是 $\mathbb{N}_M$ 中互不相交的子集. 若 $j \in \mathbb{N}_M$, $k \in \mathbb{Z}$, 使得 $j + kM \in E$, 则必有 $j + kM \in E_k$. 事实上, 若对某 $k' \neq k$, $j + kM \in E_{k'}$, 则 $j \in E_{k'} - k'M + (k' - k)M \subset \mathbb{N}_M + (k' - k)M$, 与 $j \in \mathbb{N}_M$ 矛盾. 由 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_{_E}(\cdot + kM)$ 的周期性, 只需证明在 $\mathbb{N}_M$ 上,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_{_E}(\cdot + kM) \leqslant 1.$$

我们用反证法. 假设存在 $j \in \mathbb{N}_M$, 使得 $j + k_1 M \in E$, $j + k_2 M \in E$, 其中 k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$, $k_1 \neq k_2$, 则 $j + k_1 M \in E_{k_1}$, $j + k_2 M \in E_{k_2}$, 因此, $j \in (E_{k_1} - k_1 M) \cap (E_{k_2} - k_2 M) = \emptyset$, 这是不可能的.

(iv)$\Longrightarrow$(iii). 设 (iv) 成立. 对 $k \in \mathbb{Z}$, 定义

$$E_k := E \cap (\mathbb{N}_M + kM) - kM,$$

则 $\{\, E_k + kM : k \in \mathbb{Z} \}$ 是 E 的一个剖分, 且对 $k \in \mathbb{Z}$, $E_k \subset \mathbb{N}_M$. 因此, 只需证明 E_k, $k \in \mathbb{Z}$, 互不相交. 我们用反证法. 假设对某 $k \neq k'$, $j \in E_k \cap E_{k'}$, 则 $j + kM$, $j + k'M \in E$, 与 (iv) 矛盾. 证毕.

定理 4.3 给定 N, $M \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M} = \frac{p}{q}$, 其中 p, $q \in \mathbb{N}$, $\gcd(p, q) = 1$. 设 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的一个 $N\mathbb{Z}$ 周期集, 则下列条件等价:

(i) 存在 $g \in l^2(\mathbb{S})$, 使得 $\mathcal{G}(g, N, M)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备;

(ii) 对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) \leqslant q; \tag{4.3}$$

(iii) 对 $j \in \mathbb{Z}$, (4.3) 式成立.

证明 根据注解 2.5, $\sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM)$ 是 $\frac{M}{q}$ 周期的. 因而, (ii) 与 (iii) 等价.

(i)$\Longrightarrow$ (ii). 注意 $G(j, \theta) \in \mathcal{M}_{q,p}$. 再由定理 3.3, 对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) = \operatorname{rank}(G(j, \theta)) \leqslant q.$$

(ii)$\Longrightarrow$ (i). 根据定理 3.3 和引理 2.3 前面的讨论, 只需找到一个矩阵值函数 $G : \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times [0, 1) \to \mathcal{M}_{q,p}$, 使得对 $(j, r, k) \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p$, $G(j, \cdot)_{r,k} \in L^2[0, 1)$, 且对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和几乎处处的 $\theta \in [0, 1)$,

$$\operatorname{rank}(G(j, \theta)) = \sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM).$$

对 $B \subset \mathbb{N}_p$, 定义

$$I_B := \left\{ j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} : \sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) = \sum_{k \in B} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) = \operatorname{card}(B) \right\}.$$

于是, $\{I_B : B \subset \mathbb{N}_p\}$ 作成 $\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 的一个剖分. 给定 $j \in I_B$. 在 $[0, 1)$ 上定义一个 $q \times p$ 矩阵值函数 $G(j, \cdot) = (G_0(j, \cdot), \ldots, G_{p-1}(j, \cdot))$, 使其满足对 $k \notin B$, $G_k(j, \cdot) = 0$, $\{G_k(j, \cdot) : k \in B\}$ 在 $\mathbb{C}^q$ 中线性无关, 且 $G_k(j, \cdot)$ 的每个分量均属于 $L^2[0, 1)$. 由 (4.3) 式知 $\operatorname{card}(B) \leqslant q$, 所以上述 $G(j, \cdot)$ 是有意义的 (事实上, 任意 $\operatorname{card}(B)$ 个线性无关的具有常数值分量的向量组成的向量组 $\{G_k(j, \cdot) : k \in B\}$ 都满足上述条件). 于是, 对 $j \in I_B$, 在 $[0, 1)$ 上几乎处处有

$$\operatorname{rank}(G(j, \cdot)) = \operatorname{card}(B) = \sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM).$$

令 B 取遍 $\mathbb{N}_p$ 的所有子集, 就可得到我们想要的 $G(j, \theta)$. 证毕.

下面的定理说明 (4.3) 式也是存在 $E \subset \mathbb{Z}$ 使得 $\mathcal{G}(\chi_E, N, M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架界为 M 的紧标架的充分必要条件.

定理 4.4 给定 $N, M \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M} = \frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{N}$, $\gcd(p, q) = 1$. 设 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的一个 $N\mathbb{Z}$ 周期集, 则下列条件等价:

(i) 存在 $E \subset \mathbb{Z}$, 使得 $\mathcal{G}(\chi_E, N, M)$ 作成 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架界为 M 的紧标架;

(ii) 对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\mathbb{S}}(j + kM) \leqslant q; \tag{4.4}$$

(iii) 对 $j \in \mathbb{Z}$, (4.4) 式成立.

证明 根据注解 2.5 可知 (ii) 与 (iii) 等价, 所以只需证明 (i)$\Longleftrightarrow$(ii). 若 $\mathcal{G}(\chi_E, N, M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架, 它必定在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备. 由定理 4.3 立即可得 “(i)$\Longrightarrow$(ii)” . 下证 (ii)$\Longrightarrow$(i).

记 $\mathbb{S}_0 := \mathbb{S} \cap \mathbb{N}_N$. 我们只需证明存在 $E \subset \mathbb{Z}$, 使得 E 既 $N\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{S}_0$, 又 $M\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{N}_M$ 的一个子集. 事实上, 若如此, $l^2(\mathbb{S})$ 可写为正交和

$$l^2(\mathbb{S}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} l^2(\mathbb{S}_0 + nN) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} l^2(E + nN).$$

由引理 4.2, $\{ \mathrm{e}^{2\pi i \frac{m}{M}\cdot} \chi_{_E}(\cdot) : m \in \mathbb{N}_M \}$ 作成 $l^2(E)$ 的标架界为 M 的紧标架. 因此, 对 $n \in \mathbb{Z}$, $\{ \mathrm{e}^{2\pi i \frac{m}{M}\cdot} \chi_{_E}(\cdot - nN) : m \in \mathbb{N}_M \}$ 作成 $l^2(E+nN)$ 的标架界为 M 的紧标架. 进而, $\mathcal{G}(\chi_{_E}, N, M)$ 作成 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架界为 M 的紧标架.

现在构造这样的 E. 对每个 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, 定义

$$B_j = \{ k \in \mathbb{N}_p : j + kM \in \mathbb{S} \}.$$

若 $B_j \neq \emptyset$, 可设 $B_j = \{k_{j,i} : i \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)}\}$. 对这样的 B_j, 取

$$\{ (r_{j,i}, \ell_{j,i}) : i \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)} \} \subset \mathbb{N}_q \times \mathbb{Z},$$

使得对 $i, i' \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)}$, $i \neq i'$, 满足 $r_{j,i} \neq r_{j,i'}$. 由 (ii) 有 $\mathrm{card}(B_j) \leqslant q$, 所以这样的 $\{ (r_{j,i}, \ell_{j,i}) : i \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)} \}$ 可以取到. 定义

$$E_j := \begin{cases} \emptyset, & \text{若} B_j = \emptyset; \\ \{j + k_{j,i}M - r_{j,i}N + \ell_{j,i}qN : i \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)}\}, & \text{若} B_j \neq \emptyset, \end{cases}$$

以及

$$E := \bigcup_{j\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}} E_j. \tag{4.5}$$

下证 E 就是我们所要的.

(1) E $M\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{N}_M$ 的一个子集.

只需证明, 对 $j + k_{j,i}M - r_{j,i}N + \ell_{j,i}qN$, $j' + k_{j',i'}M - r_{j',i'}N + \ell_{j',i'}qN \in E$, 由

$$M|[(j + k_{j,i}M - r_{j,i}N + \ell_{j,i}qN) - (j' + k_{j',i'}M - r_{j',i'}N + \ell_{j',i'}qN)], \tag{4.6}$$

可推出 $j = j'$, $i = i'$. 记 $n_0 = \frac{M}{q}$. 显然, (4.6) 式等价于

$$n_0 q \mid [(j - j') + (k_{j,i} - k_{j',i'})n_0 q + (r_{j',i'} - r_{j,i})n_0 p + (\ell_{j,i} - \ell_{j',i'})n_0 pq],$$

由此可得 $n_0|(j - j')$. 再由 $j, j' \in \mathbb{N}_{n_0}$ 即得 $j = j'$. 于是

$$q \mid [(k_{j,i} - k_{j,i'})q + (r_{j,i'} - r_{j,i})p + (\ell_{j,i} - \ell_{j,i'})pq],$$

由此可得 $q \mid [(r_{j,i'} - r_{j,i})p]$. 结合 $\gcd(p,q) = 1$ 和 $r_{j,i'}, r_{j,i} \in \mathbb{N}_q$ 便有 $i = i'$.

(2) E $N\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{S}_0$.

类似 (1) 可得, E $N\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{N}_N$ 的一个子集. 再由 $E \subset \mathbb{S}$, E $N\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{S}_0$ 的一个子集. 从引理 4.1 的证明可知,

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(\mathbb{S}_0) &= \sum_{j=0}^{n_0-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_{_{\mathbb{S}_0}}(j + nn_0) \\ &= \sum_{j=0}^{n_0-1} \sum_{k=0}^{p-1} \chi_{_\mathbb{S}}(j + kM) \\ &= \sum_{j=0}^{n_0-1} \mathrm{card}(B_j). \end{aligned}$$

由 (1), 对 $(j,\, i) \neq (j',\, i')$, $j + k_{j,i}M - r_{j,i}N + \ell_{j,\,i}qN \neq j' + k_{j',i'}M - r_{j',i'}N + \ell_{j',\,i'}qN$. 于是

$$\sum_{j=0}^{n_0-1} \mathrm{card}(B_j) = \mathrm{card}(E).$$

因此, $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0) = \mathrm{card}(E)$, E $N\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{S}_0$. 证毕.

注解 4.5 当 $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$ 时, 定理 4.3 和 4.4 中的 (ii) 和 (iii) 都变为 $N \leqslant M$.

定理 4.4 提供了一种构造 $l^2(\mathbb{S})$ 的形如 $\mathcal{G}(\chi_{_E},\, N,\, M)$ 的紧标架的方法. 下面的定理说明 $l^2(\mathbb{S})$ 的任何标架界为 M 的紧标架 $\mathcal{G}(\chi_{_E},\, N,\, M)$ 都可用此方法得到.

定理 4.6 给定 $N,\, M \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M} = \frac{p}{q}$, 其中 $p,\, q \in \mathbb{N}$, $\gcd(p,\, q) = 1$. 设 $E \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一个 $N\mathbb{Z}$ 周期集. 下列条件等价:

(i) $\mathcal{G}(\chi_{_E},\, N,\, M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架界为 M 的紧标架;

(ii) E 具有如下形式: $E := \bigcup_{j\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}} E_j$, 其中,

$$E_j := \begin{cases} \emptyset, & \text{若} B_j = \emptyset; \\ \\ \{j + k_{j,\,i}M - r_{j,\,i}N + \ell_{j,\,i}qN : i \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)}\}, & \text{若} B_j \neq \emptyset, \end{cases}$$

对 $i \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)}$, $k_{j,\,i} \in B_j \neq \emptyset$, $(r_{j,\,i},\, \ell_{j,\,i}) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{Z}$, 且对任意 $i,\, i' \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)}$, $i \neq i'$, 有 $r_{j,\,i} \neq r_{j,\,i'}$;

(iii) E 既 $M\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{N}_M$ 的一个子集, 又 $N\mathbb{Z}$ 同余于 $\mathbb{S}_0$, 其中 $\mathbb{S}_0 = \mathbb{S} \cap \mathbb{N}_N$.

证明 显然, 由定理 4.4 的 (1) 和 (2) 可得 (ii)$\Longrightarrow$(iii), 从定理 4.4 的证明可得 (iii)$\Longrightarrow$(i). 因此, 只需证明 (i)$\Longrightarrow$(ii).

采用定理 3.4 中的记号. 对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, 若 $B_j \neq \emptyset$, 不妨设 $B_j = \{k_{j,\,i} : i \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)}\}$. 对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和 $k \in \mathbb{N}_p$, 记 $A_k(j,\, \cdot)$ 为 $G(j,\, \cdot)$ 的第 k 列. 根据定理 3.4, 对 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, 在 $[0,\, 1)$ 上几乎处处有

$$G^*(j,\, \cdot)G(j,\, \cdot) = \mathrm{diag}(\chi_{_{B_j}}(0),\, \ldots,\, \chi_{_{B_j}}(p-1)).$$

由此可得对 $i,\, i' \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)}$,

$$A^*_{k_{j,\,i}}(j,\, \cdot)A_{k_{j,\,i'}}(j,\, \cdot) = \begin{cases} 1, & \text{若} i = i'; \\ 0, & \text{若} i \neq i'. \end{cases} \tag{4.7}$$

对满足 $B_j \neq \emptyset$ 的 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 和 $(r,\, \ell) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{Z}$, 记 $\epsilon_{j,\,i,\,r,\,\ell} = \chi_{_E}(j + k_{j,\,i}M - rN + \ell qN)$. 由离散 Zak 变换的定义, $A_{k_{j,\,i}}(j,\, \cdot) = \big(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \epsilon_{j,\,i,\,r,\,\ell}\mathrm{e}^{2\pi i\ell\theta}\big)^{\mathrm{T}}_{r\in\mathbb{N}_q}$. 因此, (4.7) 式可改写为

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{\ell'\in\mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{q-1} \epsilon_{j,\,i,\,r,\,\ell+\ell'}\epsilon_{j,\,i',\,r,\,\ell'} \right) \mathrm{e}^{2\pi i\ell\theta} = \begin{cases} 1, & \text{若} i = i'; \\ 0, & \text{若} i \neq i', \end{cases}$$

等价地,

$$\sum_{\ell'\in\mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{q-1} \epsilon_{j,\,i,\,r,\,\ell+\ell'}\epsilon_{j,\,i,\,r,\,\ell'} = \begin{cases} 1, & \text{若} \ell = 0; \\ 0, & \text{若} \ell \neq 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\sum_{\ell'\in\mathbb{Z}} \sum_{r=0}^{q-1} \epsilon_{j,\,i,\,r,\,\ell+\ell'}\epsilon_{j,\,i',\,r,\,\ell'} = 0, \quad i \neq i',\ \ell \in \mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

注意到 $\epsilon_{j,\,i,\,r,\,\ell} \in \{0,\,1\}$. 由 (4.8) 式, 存在唯一的 $(r_{j,\,i},\,\ell_{j,\,i}) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{Z}$, 使得

$$\epsilon_{j,\,i,\,r,\,\ell} = \begin{cases} 1, & \text{若}(r,\,\ell) = (r_{j,\,i},\,\ell_{j,\,i}); \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

这等价于对 $(r,\,\ell) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{Z}$,

$$j + k_{j,i}M - rN + \ell qN \begin{cases} \in E, & \text{若}(r,\,\ell) = (r_{j,\,i},\,\ell_{j,\,i}), \\ \notin E, & \text{其他}. \end{cases}$$

若 $k \in \mathbb{N}_p \setminus B_j$, 则 $j + kM \notin \mathbb{S}$. 于是, 对 $(r,\,\ell) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{Z}$, $j + kM - rN + \ell qN \notin \mathbb{S}$. 再由 $E \subset \mathbb{S}$ 可得 $j + kM - rN + \ell qN \notin E$. 若 $j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$ 满足 $B_j = \emptyset$, 则对所有的 $k \in \mathbb{N}_p$, $j + kM \notin \mathbb{S}$, 从而对 $(r,\,k,\,\ell) \in \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p \times \mathbb{Z}$, $j + kM - rN + \ell qN \notin \mathbb{S}$. 再由 $E \subset \mathbb{S}$ 可得 $j + kM - rN + \ell qN \notin E$. 根据引理 3.2,

$$\mathbb{Z} = \{\, j + kM - rN + \ell qN : (j,\,r,\,k,\,\ell) \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}} \times \mathbb{N}_q \times \mathbb{N}_p \times \mathbb{Z} \,\}.$$

所以,

$$E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_{\frac{M}{q}},\, B_j \neq \emptyset} \{\, j + k_{j,\,i}M - r_{j,\,i}N + \ell_{j,\,i}qN : i \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)} \,\}.$$

而且, 对 $i,\,i' \in \mathbb{N}_{\mathrm{card}(B_j)}$, $i \neq i'$, 有 $r_{j,\,i} \neq r_{j,\,i'}$. 否则, 由 (4.9) 式, 对 $\ell' \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_{j,\,i,\,r_{j,\,i},\,\ell_{j,\,i}}\epsilon_{j,\,i',\,r_{j,\,i'},\,\ell'} = 0$, 这与 $\epsilon_{j,\,i',\,r_{j,\,i'},\,\ell_{j,\,i'}} = 1$ 矛盾. 证毕.

5 Gabor 基存在的基数条件

根据定理 4.3 和引理 4.1, $l^2(\mathbb{S})$ 中存在完备 Gabor 系的必要条件是 $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0) \leqslant M$. 本节考虑等式 $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0) = M$ 及 (4.1) 式中的等号成立的情形, 我们将证明它们刻划了具有 Gabor 结构的 Riesz 基. 首先需要建立如下引理:

引理 5.1 设 $N,\,M \in \mathbb{N}$, $g,\,\gamma \in l^2(\mathbb{Z})$, 则对 $f,\,h \in l_0(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} &\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m=0}^{M-1} \langle f,\, \mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}\cdot} g(\cdot - nN)\rangle \langle \mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}\cdot}\gamma(\cdot - nN),\, h\rangle \\ &\quad = M\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} G_{k,\gamma}(j) f\big(j - kM\big)\overline{h(j)}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $G_{k,\gamma} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{g(\cdot - kM - nN)}\gamma(\cdot - nN)$, 且 (5.1) 式右端的级数绝对收敛.

证明 容易验证, 对 $m \in \mathbb{N}_M$ 和 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\langle f,\, \mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}\cdot} g(\cdot - nN)\rangle = \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(j - kM)\overline{g(j - kM - nN)}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{m}{M}j},$$

$$\langle h,\, \mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}\cdot} \gamma(\cdot - nN)\rangle = \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(j - kM)\overline{\gamma(j - kM - nN)}\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{m}{M}j}.$$

对 $j \in \mathbb{Z}$, 记 $F(j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(j - kM)\overline{g(j - kM - nN)}$. 显然, F 是 M 周期的. 于是, 用 Parseval 公式, (5.1) 式左端的级数等于

$$M\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{M-1} F(j)\sum_{k'\in\mathbb{Z}} \overline{h(j - k'M)}\gamma(j - k'M - nN).$$

利用 F 的周期性, 上述表达式可写为

$$\begin{aligned}&M\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k'\in\mathbb{Z}}F(j-k'M)\overline{h(j-k'M)}\gamma(j-k'M-nN)\\&\quad=M\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}F(j)\overline{h(j)}\gamma(j-nN).\end{aligned}$$

因此, (5.1) 式左端的级数等于

$$\begin{aligned}&M\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{g(j-kM-nN)}\gamma(j-nN)f(j-kM)\overline{h(j)}\\&\quad=M\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}G_{k,\gamma}(j)f(j-kM)\overline{h(j)},\end{aligned}$$

这里等号成立, 因为由 $f,\,h\in l_0(\mathbb{Z})$ 知关于 j 和 k 的和式里只有有限项不为零. 这同时也说明 (5.1) 式右端的级数绝对收敛. 证毕.

定理 5.2 给定 $N,\,M\in\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 中的一个 $N\mathbb{Z}$ 周期集 $\mathbb{S}$. 设 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架, 则

(i) $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0)\leqslant M$, 其中 $\mathbb{S}_0=\mathbb{S}\cap\mathbb{N}_N$.

(ii) $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的 Riesz 基当且仅当 $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0)=M$.

证明 当 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架时, 它在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备. 由定理 4.3 和引理 4.1 可知 (i) 成立. 下面给出 (i) 的另一个证明.

对 $m\in\mathbb{N}_M$ 和 $n\in\mathbb{Z}$, 定义 $l^2(\mathbb{S})$ 上的调制算子 $E_{\frac{m}{M}}$ 和平移算子 T_{nN} 为: 对 $f\in l^2(\mathbb{S})$,

$$E_{\frac{m}{M}}f(\cdot):=\mathrm{e}^{2\pi i\frac{m}{M}\cdot}f(\cdot),\qquad T_{nN}f(\cdot):=f(\cdot-nN),$$

则与 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 相关的标架算子 $\mathcal{S}$ 可表示为: 对 $f\in l^2(\mathbb{S})$,

$$\mathcal{S}f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m=0}^{M-1}\langle f,\,E_{\frac{m}{M}}T_{nN}g\rangle E_{\frac{m}{M}}T_{nN}g.$$

容易验证, $\mathcal{S}E_{\frac{m}{M}}T_{nN}=E_{\frac{m}{M}}T_{nN}\mathcal{S}$. 于是, 对 $f\in l^2(\mathbb{S})$,

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m=0}^{M-1}\langle f,\,E_{\frac{m}{M}}T_{nN}g\rangle E_{\frac{m}{M}}T_{nN}\mathcal{S}^{-1}g.\tag{5.2}$$

对 $k\in\mathbb{Z}$, 记 $I(k)=\mathbb{N}_M+kM$, 则对 $k\in\mathbb{Z}$, $f,\,h\in l_0(\mathbb{Z})$, $\mathrm{supp}(f)$, $\mathrm{supp}(h)\subset\mathbb{S}_0\cap I(k)$, 由 (5.2) 式和引理 5.1, 对 $\ell\in\mathbb{Z}$ 有

$$\begin{aligned}\langle f,\,h\rangle&=\langle T_{\ell N}f,\,T_{\ell N}h\rangle\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m=0}^{M-1}\langle T_{\ell N}f,\,E_{\frac{m}{M}}T_{nN}g\rangle\,\langle E_{\frac{m}{M}}T_{nN}\mathcal{S}^{-1}g,\,T_{\ell N}h\rangle\\&=M\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}G_{n,\,\mathcal{S}^{-1}g}(j)T_{\ell N+nM}f(j)\overline{T_{\ell N}h(j)},\end{aligned}$$

其中, 对 $n\in\mathbb{Z}$, $G_{n,\,\mathcal{S}^{-1}g}(\cdot)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\overline{T_{nM+kN}g(\cdot)}\,T_{kN}(\mathcal{S}^{-1}g)(\cdot)$. 因为 $\mathrm{supp}(f)$, $\mathrm{supp}(h)\subset I(k)$, 所以对 $n\neq 0$, $\mathrm{supp}(T_{\ell N+nM}f\overline{T_{\ell N}h})=\emptyset$. 于是, 对 $\ell\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\langle f,\,h\rangle&=M\sum_{j\in\mathbb{Z}}G_{0,\,\mathcal{S}^{-1}g}(j)T_{\ell N}f(j)\overline{T_{\ell N}h(j)}\\&=M\sum_{j\in\mathbb{S}_0\cap I(k)}G_{0,\,\mathcal{S}^{-1}g}(j+\ell N)\,f\,(j)\,\overline{h\,(j)}.\end{aligned}$$

由 f 和 h 的任意性, 对 $k,\,\ell\in\mathbb{Z}$, 在 $\mathbb{S}_0\cap I(k)$ 上有 $G_{0,\,\mathcal{S}^{-1}g}(\cdot+\ell N)=\frac{1}{M}$. 令 k 取遍 $\mathbb{Z}$, 则对 $\ell\in\mathbb{Z}$, 在 $\mathbb{S}_0$ 上有 $G_{0,\,\mathcal{S}^{-1}g}(\cdot+\ell N)=\frac{1}{M}$, 进而, 在 $\mathbb{S}$ 上有 $G_{0,\,\mathcal{S}^{-1}g}(\cdot)=\frac{1}{M}$. 另一方面, 对 $k\in\mathbb{Z}$, 因为 $T_{kN}\mathcal{S}^{-1}g,\,T_{kN}g\in l^2(\mathbb{S})$, 因而在 $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{S}$ 上, $G_{0,\,\mathcal{S}^{-1}g}(\cdot)=0$. 所以, $G_{0,\,\mathcal{S}^{-1}g}=\frac{1}{M}\chi_{\mathbb{S}}$. 于是,

$$\mathrm{card}(\mathbb{S}_0)=\sum_{j=0}^{N-1}\chi_{\mathbb{S}}(j)=M\sum_{j=0}^{N-1}G_{0,\,\mathcal{S}^{-1}g}(j).$$

结合 $G_{0,\,\mathcal{S}^{-1}g}$ 的定义便得,

$$\frac{1}{M}\mathrm{card}(\mathbb{S}_0)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\overline{g(j)}\,(\mathcal{S}^{-1}g)(j)=\langle\mathcal{S}^{-1}g,\,g\rangle=\|\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}\,g\|^2. \tag{5.3}$$

因为 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架, $\mathcal{G}(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}g,\,N,\,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的正规紧标架, 从而 $\|\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}g\|^2\leqslant 1$. 再由 (5.3) 式便得 (i). 特别地, $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的 Riesz 基当且仅当正规紧标架 $\mathcal{G}(\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}g,\,N,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标准正交基, 等价地, $\|\mathcal{S}^{-\frac{1}{2}}g\|^2=1$. 结合 (5.3) 式便得 (ii). 证毕.

定理 5.3 给定 $N,\,M\in\mathbb{N}$ 满足 $\frac{N}{M}=\frac{p}{q}$, 其中 $p,\,q\in\mathbb{N}$, $\gcd(p,\,q)=1$. 设 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{Z}$ 中的一个 $N\mathbb{Z}$ 周期集, 则存在 $g\in l^2(\mathbb{S})$, 使得 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的 Riesz 基当且仅当对 $j\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, $\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(j+kM)=q$.

证明 必要性. 记 $\mathbb{S}_0=\mathbb{S}\cap\mathbb{N}_N$. 设 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的 Riesz 基. 于是, 根据定理 5.2, $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0)=M$. 因 $\mathcal{G}(g,\,N,\,M)$ 在 $l^2(\mathbb{S})$ 中完备, 由定理 4.3, 对 $j\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, $\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(j+kM)\leqslant q$. 再由引理 4.1 可得, 对 $j\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, $\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(j+kM)=q$.

充分性. 设对 $j\in\mathbb{N}_{\frac{M}{q}}$, $\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(j+kM)=q$. 由定理 4.4, 存在 $E\subset\mathbb{Z}$, 使得 $\mathcal{G}(\chi_E,\,N,\,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架. 另一方面, 由引理 4.1, $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0)=M$, 因此, 根据定理 5.2, $\mathcal{G}(\chi_E,\,N,\,M)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的 Riesz 基. 证毕.

注解 5.4 特别地, 在定理 5.2 和 5.3 中, 令 $\mathbb{S}=\mathbb{Z}$, 则 $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0)=M$ 和 $\sum_{k=0}^{p-1}\chi_{\mathbb{S}}(\cdot+kM)=q$ 均变为 $N=M$.

注解 5.5 作为定理 5.2 的应用, 我们考虑例 3.9–3.11. 在例 3.9 中, $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0)=3$, 所以 $\mathcal{G}(g,\,4,\,3)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的 Riesz 基. 在例 3.10 中, $\mathrm{card}(\mathbb{S}_0)=3<4$, 所以 $\mathcal{G}(g,\,6,\,4)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架, 但不是 Riesz 基. 同理, 在例 3.11 中, $\mathcal{G}(g,\,4,\,6)$ 是 $l^2(\mathbb{S})$ 的标架, 但不是 Riesz 基.

致谢 作者诚挚地感谢审稿人的宝贵建议, 这些建议极大地提高了文章的可读性.

参考文献

1 Young R M. An Introduction to Nonharmonic Fourier Series. New York: Academic Press, 1980
2 Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Montpelier, Vermont: Capital City Press, 1992
3 Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2003
4 Feichtinger H G, Strohmer T, eds. Gabor Analysis and Algorithms, Theory and Applications. Boston: Birkhäuser, 1998
5 Feichtinger H G, Strohmer T, eds. Advances in Gabor Analysis. Boston: Birkhäuser, 2002
6 Gröchenig K. Foundations of Time-Frequency Analysis. Boston: Birkhäuser, 2001
7 Gabardo J P, Li Y Z. Density results for Gabor systems associated with periodic subsets of the real line. *J Approx Theory* (待发表)

8 Heil C. A discrete Zak transform. Technical Report MTR-89W00128, 1989

9 Orr R S. Derivation of the finite discrete Gabor transform by periodization and sampling. *Signal Process*, **34**(1): 85–97 (1993)

10 Janssen A J E M. From continuous to discrete Weyl-Heisenberg frames through sampling. *J Fourier Anal Appl*, **3**: 583–596 (1997)

11 Søndergraard P L. Gabor frame by sampling and periodization. *Adv Comput Math*, **4**: 355–373 (2007)

12 Søndergraard P L. Finite discrete Gabor analysis. PhD Dissertation. Denmark: Technical University of Denmark, 2007

13 Auslander L, Gertner I C, Tolimieri R. The discrete Zak transform application to time-frequency analysis and synthesis of nonstationary signal. *IEEE Trans Signal Process*, **39**: 825–835 (1991)

14 Bölcskei H, Hlawatsch F. Discrete Zak transforms, polyphase transforms and applications. *IEEE Trans Signal Process*, **45**: 851–866 (1997)

15 Hirosaki B. An orthogonally multiplexed QAM system using discrete Fourier transform. *IEEE Trans Comm*, **29**: 982–989 (1981)

16 Cvetković Z. Overcomplete expansions for digital signal processing. PhD Dissertation. Berkeley: University California, 1995

17 Cvetković Z, Vetterli M. Tight Weyl-Heisenberg frames in $l^2(\mathbb{Z})$. *IEEE Trans Signal Process*, **46**: 1256–1259 (1998)

18 Cvetkovič Z, Vetterli M. Oversampled filter banks. *IEEE Trans Signal Process*, **46**: 1245–1255 (1998)

19 Wexler J, Raz S. Discrete Gabor expansions. *Signal Process*, **21**(3): 207–221 (1990)

20 Morris J M, Lu Y H. Discrete Gabor expansions of discrete-time signals in $l^2(\mathbb{Z})$ via frame theory. *Signal Process*, **40**(2-3): 155–181 (1994)