中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 5 期: 555～566
www.scichina.com math.scichina.com

连续随机变换的 Lyapunov 指数

朱玉峻*, 张金莲

河北师范大学数学与信息科学学院, 石家庄 050016
* 通信作者 E-mail: yjzhu@mail.hebtu.edu.cn

收稿日期: 2008-09-17; 接受日期: 2008-11-20
国家自然科学基金 (批准号: 10701032) 和河北省自然科学基金 (批准号: A2008000132) 资助项目

摘要 本文对连续随机变换引入了 Lyapunov 指数的概念. 对一类由扰动相应确定系统而产生的随机排斥子和随机双曲集而言, 该概念和经典的概念是一致的.

关键词 随机变换 Lyapunov 指数 乘法遍历定理 随机排斥子 随机双曲集

MSC(2000) 主题分类 37H35

1 引言

设 M 是一个 m 维光滑 Riemann 流形. 记 $|\cdot|$ 为 TM 的模, $\|\cdot\|$ 为由 Riemann 度量诱导的算子的范数. 设 $f: M\to M$ 为可微映射, 对任意 $x\in M$ 和 $v\in T_xM$, f 在 (x,v) 的 Lyapunov 指数 $\lambda(x,v)$ 是 v 在微分沿 x 的轨道的迭代作用下的指数增长率, 即

$$\lambda(x,v):=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|T_xf^nv|.$$

直观地讲, Lyapunov 指数是量度邻近的轨道分离速度的量. Lyapunov 指数与其它描述系统复杂度的量, 例如测度熵和维数, 之间有着密切的联系 (参见文献 [1, 2]).

Lyapunov 指数的理论作为微分动力系统研究的重要工具开始于 Liao[3] 和 Oseledets[4] 的工作. 关于 Lyapunov 指数的一般理论可参见文献 [1]. 另外, 关于 Lyapunov 指数 (特别针对微分方程) 的 Liao 理论及其最新进展参见文献 [5–10].

近年来, Lyapunov 指数被推广到未必可微的映射的情形. 在文献 [11] 中, Kifer 对度量空间上的连续变换引入了替代最大和最小 Lyapunov 指数的数值. 在文献 [12] 中, Barreira 对未必可微的变换的排斥子引入了替代这两个值的数值, 并利用这种新的指数得到了排斥子 Hausdorff 维数的估计. 最近, Barreira 和 Cilva[13] 对 $\mathbb{R}^m$ 上的连续变换引入了 Lyapunov 指数的所有中间值, 并证明了对可微映射的一类排斥子和微分同胚的双曲集而言, 新的指数和经典的 Lyapunov 指数是一致的. 此外, 他们还对连续变换的不变集讨论了新的 Lyapunov 指数和维数理论之间的关系.

本文目的是在随机动力系统的框架下讨论上述问题, 并将文献 [13] 的主要结果推广到由随机复合连续映射产生的随机变换的情形. 本文内容是这样安排的: 第 2 节介绍随机动力系

引用格式: 朱玉峻, 张金莲. 连续随机变换的 Lyapunov 指数. 中国科学 A, 2009, 39(5): 555–566
Zhu Y J, Zhang J L. Lyapunov Exponents for Continuous Random Transformations. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0030-x

统的基本概念, 包括 Lyapunov 指数的经典理论. 第 3 节对连续随机变换引入新的指数的概念, 并证明对一类由扰动相应确定系统而产生的随机排斥子和随机双曲集而言, 该概念和经典的概念是一致的.

2 随机动力系统的基本概念

本节陈述随机动力系统的一些基本概念, 大部分内容取自于文献 [14, 15]. 随机动力系统的一般理论可参见文献 [14–18].

在本节 M 总表示一个 m 维 Riemann 流形, $\mathcal{B}$ 为 M 的 Borel σ- 代数. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \vartheta)$ 是一个抽象的动力系统, 其中 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 为一概率空间, ϑ 为 Ω 上的一个保测变换. 记 $C^r(M, M)$ ($r \geqslant 0$) 为 M 上的 C^r 变换构成的空间, 带有通常的 C^r- 拓扑和 Borel σ- 代数. 设

$$F : \Omega \to C^r(M, M), \quad \omega \mapsto F(\omega) =: f_\omega$$

为一可测映射, 并记

$$f_\omega^n = \begin{cases} f_{\vartheta^{n-1}\omega} \circ \cdots \circ f_{\vartheta\omega} \circ f_\omega, & \text{若 } n > 0, \\ \mathrm{id}, & \text{若 } n = 0, \\ f_{\vartheta^n\omega}^{-1} \circ \cdots \circ f_{\vartheta^{-2}\omega}^{-1} \circ f_{\vartheta^{-1}\omega}^{-1}, & \text{若 } n < 0, \end{cases}$$

其中当 ϑ 可测可逆且对 $\mathbf{P}$-a.e. ω, $f_\omega \in \mathrm{Diff}^r(M, M)$ 时, f_ω^n 对 $n < 0$ 有定义. 我们关心的是对 $\mathbf{P}$-a.e. ω, f_ω^n 的动力行为或对 ω 平均的动力行为. 此体系称为 M 上基于 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \vartheta)$ 的 C^r 随机动力系统或 C^r 随机变换, 并仍记作 F.

设 F 如上所述. 定义

$$\Theta : \Omega \times M \to \Omega \times M, (\omega, x) \mapsto (\vartheta\omega, f_\omega x),$$

并称之为与 F 相关联的斜积变换. $(\Omega \times M, \mathcal{F} \times \mathcal{B})$ 上的概率测度 μ 称为 F-不变的, 如果关于 Θ 不变且在 Ω 上的边缘测度为 $\mathbf{P}$. 另外, μ 称为 F- 遍历的, 如果它关于 Θ 遍历. 在下文中我们总假定 μ 为 F- 不变的且关于 $\mathbf{P}$ 可分解, 即存在一族条件概率 $\{\mu_\omega\}$, 使得 $d\mu(\omega, x) = d\mu_\omega(x) d\mathbf{P}(\omega)$.

当 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \vartheta)$ 具体取定时, 可得到某些特殊类型的随机动力系统. 例如, 取开集 $\mathscr{U} \subset C^r(M, M)$, 令 $\Omega = \mathscr{U}^{\mathbb{N}}$, 带有乘积拓扑和 Borel σ- 代数; $\vartheta : \Omega \to \Omega$ 为左移位算子, 即对 $\omega = (\omega)_n \in \Omega$, $(\vartheta\omega)_n = \omega_{n+1}$; $\mathbf{P}$ 为 Ω 上关于 ϑ 不变的概率测度. 于是坐标映射 $F : \Omega \to \mathscr{U}, \omega \mapsto \omega_0$ 定义了一个随机动力系统 F, 我们称之为单边的典型随机动力系统. 特别地, 如果 $\mathbf{P} = \nu^{\mathbb{N}}$, 其中 ν 为 $\mathscr{U}$ 上某一概率测度, 我们称 F 为一个独立同分布的单边的典型随机动力系统. 这一类型的随机动力系统由 Kifer[16] 引入并被 Kifer[16] 和 Liu[18] 系统地研究. 相应地, 双边的概念可以通过取 $\Omega = \mathscr{U}^{\mathbb{Z}}, \mathbf{P} = \nu^{\mathbb{Z}}$ 引入.

下面我们介绍随机动力系统中经典的 Lyapunov 指数的概念. 设 $F : \Omega \to C^1(M, M)$ 为一个 C^1 随机动力系统. 我们通过

$$\lambda^+(\omega, x, v) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |T_x f_\omega^n v|$$

来定义 F 的 (正向) Lyapunov 指数 $\lambda^+ : \Omega \times TM \to \mathbb{R}$, 按惯例令 $\log 0 = -\infty$. 由文献 [1] 中 Lyapunov 指数的抽象理论, 对任意 ω 和 $x \in M$, 函数 $\lambda^+(\omega, x, \cdot)$ 只取有限个值

$$\lambda_1^+(\omega, x) < \lambda_2^+(\omega, x) < \cdots < \lambda_{s^+(\omega,x)}^+(\omega, x),$$

其中 $s^+(\omega,x)\leqslant m=\dim M$. 另外, 存在与 $\lambda^+(\omega,x,\cdot)$ 相关联的滤子

$$\{0\}=V_0^+(\omega,x)\subset V_1^+(\omega,x)\subset\cdots\subset V_{s^+(\omega,x)}^+(\omega,x)=T_xM,$$

其中

$$V_i^+(\omega,x)=\{v\in T_xM:\lambda^+(\omega,x,v)\leqslant\lambda_i^+(\omega,x)\}.$$

对任意 i,

$$k_i^+(\omega,x):=\dim V_i^+(\omega,x)-\dim V_{i-1}^+(\omega,x)$$

为值 $\lambda_i^+(\omega,x)$ 的重数. 集合 $\{(\lambda_i^+(\omega,x),k_i^+(\omega,x)):1\leqslant i\leqslant s^+(\omega,x)\}$ 称为 F 在 (ω,x) 的 (正向) Lyapunov 谱. 重新记

$$\rho_1^+(\omega,x)\leqslant\rho_2^+(\omega,x)\leqslant\cdots\leqslant\rho_m^+(\omega,x)$$

为 Lyapunov 指数 $\lambda^+(\omega,x,\cdot)$ 的取值, 重复的按重数记, 即对任意 i, 令

$$\rho^+_{\dim V_{i-1}^+(\omega,x)+1}(\omega,x)=\cdots=\rho^+_{\dim V_i^+(\omega,x)}(\omega,x)=\lambda_i^+(\omega,x).$$

当 F 为从 Ω 到 $\mathrm{Diff}^1(M,M)$ 的随机微分同胚时, 可以如下定义 (负向) Lyapunov 指数 $\lambda^-:\Omega\times TM\to\mathbb{R}$,

$$\lambda^-(\omega,x,v):=\limsup_{n\to-\infty}\frac{1}{|n|}\log|T_xf_\omega^nv|.$$

类似地, 对任意 ω 和 $x\in M$ 函数 $\lambda^-(\omega,x,\cdot)$ 只取有限个值

$$\lambda_1^-(\omega,x)>\lambda_2^-(\omega,x)>\cdots>\lambda^-_{s^-(\omega,x)}(\omega,x),$$

其中 $s^-(\omega,x)\leqslant m=\dim M$. 另外, 存在与 $\lambda^-(\omega,x,\cdot)$ 相关联的滤子

$$T_xM=V_1^-(\omega,x)\supset\cdots\supset V^-_{s^-(\omega,x)}(\omega,x)\supset V^-_{s^-(\omega,x)+1}(\omega,x)=\{0\},$$

其中

$$V_i^-(\omega,x)=\{v\in T_xM:\lambda^-(\omega,x,v)\leqslant\lambda_i^-(\omega,x)\}.$$

对任意 i,

$$k_i^-(\omega,x):=\dim V_i^-(\omega,x)-\dim V_{i+1}^-(\omega,x)$$

为值 $\lambda_i^-(\omega,x)$ 的重数, 且集合 $\{(\lambda_i^-(\omega,x),k_i^-(\omega,x)):1\leqslant i\leqslant s^-(\omega,x)\}$ 称为 F 在 (ω,x) 的 (负向) Lyapunov 谱. 重新记

$$\rho_1^-(\omega,x)\geqslant\rho_2^-(\omega,x)\geqslant\cdots\geqslant\rho_m^-(\omega,x)$$

为 Lyapunov 指数 $\lambda^-(\omega,x,\cdot)$ 的取值, 重复的按重数记.

下面我们陈述随机动力系统的 Oseledec 乘法遍历定理 (参见文献 [14]).

定理 2.1 设 $F:\Omega\to C^1(M,M)$ 为基于 ϑ 的 C^1 随机动力系统, μ 为 F-不变的测度.

(1) 假设

$$\log^+\|T_xf_\omega\|\in L^1(\Omega\times M,\mu),$$

其中 $\log^+a:=\max\{0,\log a\}$. 则存在一个满 μ 测度的 Θ- 不变集 $\Lambda\subset\Omega\times M$(即 $\Theta(\Lambda)\subset\Lambda$ 且 $\mu(\Lambda)=1$), 在其上整数 $s^+(\omega,x)$, 正向 Lyapunov 指数 $\lambda_i^+(\omega,x)$, 相应的滤子 $V_i^+(\omega,x)$ 及重数 $k_i^+(\omega,x)$, $1\leqslant i\leqslant s^+(\omega,x)$ 都是 Θ- 不变的, 并且以下极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|T_xf_\omega^nv|=\lambda_i^+(\omega,x)$$

关于 $v\in E\cap S_x^{m-1}$ 一致收敛, 其中 E 为包含于 $V_i^+(\omega,x)$ 中且满足 $E\cap V_{i-1}^+(\omega,x)=\{0\}$ 的任意子空间, S_x^{m-1} 为 T_xM 中的单位球面, $1\leqslant i\leqslant s^+(\omega,x)$.

(2)(可逆的情形) 如果 ϑ 具有可测的逆, 对 $\mathbf{P}$-a.e. ω, $f_\omega\in\mathrm{Diff}^1(M)$, 且

$$\log^+\|T_xf_\omega\|,\ \log^+\|T_xf_\omega^{-1}\|\in L^1(\Omega\times M,\mu),$$

则此时存在一个可测集 $\Lambda\subset\Omega\times M$ 使得 $\mu(\Lambda)=1,\Theta(\Lambda)=\Lambda$, 且在其上以下结论成立: 整数 $s^-(\omega,x)=s^+(\omega,x)=:s(\omega,x)$. 存在 Θ-不变的分解

$$T_xM=E_1(\omega,x)\oplus E_2(\omega,x)\oplus\cdots\oplus E_{s(\omega,x)}(\omega,x),$$

使得对任意 $1\leqslant i\leqslant s(\omega,x)$,

$$V_i^+(\omega,x)=\bigoplus_{j=1}^{i}E_i(\omega,x),\quad V_i^-(\omega,x)=\bigoplus_{j=i}^{s(\omega,x)}E_i(\omega,x),$$

且

$$\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}\log|T_xf_\omega^nv|=\lambda_i^+(\omega,x)=-\lambda_i^-(\omega,x)=:\lambda_i(\omega,x)$$

关于 $v\in E_i(\omega,x)\cap S_x^{m-1}$ 一致收敛.

另外, 如果 μ 为遍历的, 则这些数值 μ-a.e. 为常值.

以上定理情形 (1) 中的点 $(\omega,x)\in\Lambda$ 称为正向正则的, 情形 (2) 中的点 $(\omega,x)\in\Lambda$ 称为正则的. 特别地, 在文献 [14] 中只针对可逆的情形讨论了上述定理中的一致收敛性. 事实上, 我们可以沿用文献 [13] 中的方法得到不可逆情形的一致收敛性.

3 随机动力系统的新的 Lyapunov 指数

在本节中, 我们将对未必可微的随机动力系统引入 Lyapunov 指数的概念, 并将文献 [13] 的主要结果推广到随机的情形. 为方便起见, 仅考虑定义在 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 上的随机动力系统. 当然, 我们可以借助指数映射对定义在光滑流形上的随机动力系统讨论此类问题.

3.1 新的 Lyapunov 指数

设 $F:\Omega\to C^0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上连续的随机动力系统, d 为 $\mathbb{R}^m$ 上由标准内积诱导的度量. 如下定义 $\mathbb{R}^m$ 上的一族度量, 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\omega\in\Omega$,

$$d_\omega^n(x,y)=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}d(f_\omega^ix,f_\omega^iy),\quad x,y\in\mathbb{R}^m.$$

记 $B_{d_\omega^n}(x,\delta)$ 为在度量 d_ω^n 下以 x 为中心, δ 为半径的球.

对任意 $\omega\in\Omega,x\in\mathbb{R}^m$ 和 $k\in\{1,2,\dots,m\}$, 定义

$$\Lambda_k^+(\omega,x)=\inf_{L\in L_{\omega,x,k}}\lim_{\delta\to0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{y\in C_{d_\omega^n}(x,\delta)\cap L}\frac{d(f_\omega^nx,f_\omega^ny)}{d(x,y)},$$

其中 $L_{\omega,x,k}$ 表示形如 $x+E$ 的集合的族, $E\subset\mathbb{R}^m$ 为任意的 k 维子空间,

$$C_{d_\omega^n}(x,\delta)=\{y\in B_{d_\omega^n}(x,\delta)\setminus\{x\}:f_\omega^jx+t(f_\omega^jy-f_\omega^jx)\in f_\omega^jB_{d_\omega^n}(x,\delta),0\leqslant j\leqslant n,t\in[0,1]\}.$$

显然,

$$\Lambda_1^+(\omega,x)\leqslant\Lambda_2^+(\omega,x)\leqslant\cdots\leqslant\Lambda_m^+(\omega,x),$$

称之为 F 在 (ω,x) 的正向 Lyapunov 指数. 注意到这些值 $\Lambda_k^+(\omega,x)$ 不会随着与 d 等价的度量而改变.

3.2 与经典 Lyapunov 指数的关系

下面我们将就可微的随机变换讨论新的和经典的 Lyapunov 指数的关系. 设 $F:\Omega\to C^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 为一个 C^1 随机动力系统. 对任意 $\omega\in\Omega, x\in\mathbb{R}^m$ 和 $k\in\{1,2,\ldots,m\}$, 定义

$$c_k^+(\omega,x)=\inf\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{v\in E\cap S^{m-1}}|T_xf_\omega^n v|,$$

其中下确界针对所有 k 维子空间 $E\subset\mathbb{R}^m$ 来取. 显然,

$$c_1^+(\omega,x)\leqslant c_2^+(\omega,x)\leqslant\cdots\leqslant c_m^+(\omega,x).$$

下面将这些值与经典的 Lyapunov 指数 $\rho_k^+(\omega,x)$ 联系起来.

定理 3.1 设 $F:\Omega\to C^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 为 C^1 随机动力系统, μ 为 F-不变的测度. 假定 $\log^+\|T_xf_\omega\|\in L^1(\Omega\times\mathbb{R}^m)$. 则对 μ-a.e. $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^m$ 以及任意 $k\in\{1,2,\ldots,m\}$, 存在 $i\in\{1,2,\ldots,s^+(\omega,x)\}$, 使得

$$\rho_k^+(\omega,x)=c_k^+(\omega,x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{v\in G\cap S^{m-1}}|T_xf_\omega^n v|=\lambda_i^+(\omega,x),$$

其中 G 为包含于 $V_i^+(\omega,x)$ 中的任意 k $(>\dim V_{i-1}^+(\omega,x))$ 维子空间.

证明 由定理 2.1, 存在满 μ 测度的 Θ-不变集 $\Lambda\subset\Omega\times\mathbb{R}^m$, 使得对任意 $(\omega,x)\in\Lambda$, $i\in\{1,2,\ldots,s^+(\omega,x)\}$ 和 $v\in V_i^+(\omega,x)\setminus V_{i-1}^+(\omega,x)$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|T_xf_\omega^n v|=\lambda_i^+(\omega,x),\tag{3.1}$$

且对任意满足 $E\cap V_{i-1}^+(\omega,x)=\{0\}$ 的子空间 $E\subset V_i^+(\omega,x)$, 以上极限在 $E\cap S^{m-1}$ 上一致收敛.

设 $(\omega,x)\in\Lambda, i\in\{1,2,\ldots,s^+(\omega,x)\}$, $G\subset V_i^+(\omega,x)$ 为 k $(>\dim V_{i-1}^+(\omega,x))$ 维子空间. 先证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{v\in G\cap S^{m-1}}|T_xf_\omega^n v|=\lambda_i^+(\omega,x)=\rho_k^+(\omega,x).\tag{3.2}$$

注意到 (3.1) 式中的极限对 $v\in G\cap S^{m-1}$ 是一致收敛的, 于是 (3.2) 式右端是良定的. 显然当 $i=1$ 时, (3.2) 式成立. 我们对 i 应用归纳法. 首先注意到对 $u\in G\setminus V_{i-1}^+(\omega,x)$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{v\in G\cap S^{m-1}}|T_xf_\omega^n v|\geqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|T_xf_\omega^n u|=\lambda_i^+(\omega,x)=\rho_k^+(\omega,x).$$

下面建立反向不等式. 设 $v_n\in G\cap S^{m-1}$, 使得 (3.2) 式可在 v_n 达到上确界. 记 $v_n=a_n+b_n$, 其中 $a_n\in V_i^+(\omega,x)\cap(V_{i-1}^+(\omega,x))^\perp$, $b_n\in V_{i-1}^+(\omega,x)$. 显然 $|a_n|$, $|b_n|\leqslant 1$, 于是

$$\begin{aligned}|T_xf_\omega^n v_n|&\leqslant|T_xf_\omega^n a_n|+|T_xf_\omega^n b_n|\\&\leqslant\sup_{v\in V_i^+(\omega,x)\cap(V_{i-1}^+(\omega,x))^\perp\cap S^{m-1}}|T_xf_\omega^n v|+\sup_{v\in V_{i-1}^+(\omega,x)\cap S^{m-1}}|T_xf_\omega^n v|.\end{aligned}\tag{3.3}$$

由归纳假设,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{v\in V_{i-1}^+(\omega,x)\cap S^{m-1}}|T_xf_\omega^n v|=\lambda_{i-1}^+(\omega,x)<\lambda_i^+(\omega,x).$$

另一方面, 在定理 2.1 中取 $E=V_i^+(\omega,x)\cap(V_{i-1}^+(\omega,x))^\perp$, 可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{v\in V_i^+(\omega,x)\cap(V_{i-1}^+(\omega,x))^\perp\cap S^{m-1}}|T_xf_\omega^n v|=\lambda_i^+(\omega,x)=\rho_k^+(\omega,x).$$

由 (3.3) 式, 得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{v\in G\cap S^{m-1}}|T_xf_\omega^n v|\leqslant\lambda_i^+(\omega,x)=\rho_k^+(\omega,x).$$

这建立了 (3.2) 式中的等式.

下面证明本定理剩余的结论. 对任意 k $(> \dim V_{i-1}^{+}(\omega, x))$ 维子空间 $G \subset V_i^{+}(\omega, x)$, 由 (3.2) 式, 得

$$c_k^{+}(\omega, x) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{v\in G\cap S^{m-1}} |T_x f_\omega^n v| = \rho_k^{+}(\omega, x).$$

另一方面, 对任意 $k\,(> \dim V_{i-1}^{+}(\omega, x))$ 维子空间 E 存在 $v_E \in (E \setminus V_{i-1}^{+}(\omega, x)) \cap S^{m-1}$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |T_x f_\omega^n v_E| \geqslant \lambda_i^{+}(\omega, x) = \rho_k^{+}(\omega, x),$$

于是

$$c_k^{+}(\omega, x) \geqslant \inf_{\dim E=k} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |T_x f_\omega^n v_E| \geqslant \lambda_i^{+}(\omega, x) = \rho_k^{+}(\omega, x).$$

即得所需结果.

下面开始讨论新指数 $\Lambda_k^{+}(\omega, x)$ 和经典的 Lyapunov 指数之间的关系.

命题 3.2 设 $F : \Omega \to C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 为 C^1 随机动力系统. 则对任意 $\omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^m$ 和 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, 有

$$\Lambda_k^{+}(\omega, x) \geqslant c_k^{+}(\omega, x).$$

证明 设 $\omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^m, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $L = x + E$, 其中 E 为任意 k 维子空间. 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 取 $v_{n,E} \in E \cap S^{m-1}$, 使得

$$\sup_{v\in E\cap S^{m-1}} |T_x f_\omega^n v| = |T_x f_\omega^n v_{n,E}|.$$

F 的可微性保证了

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d(f_\omega^n x, f_\omega^n(x + \varepsilon v_{n,E}))}{d(x, x + \varepsilon v_{n,E})} = |T_x f_\omega^n v_{n,E}|.$$

另一方面, 对任意 $\delta > 0$, 我们可选取充分小 $\varepsilon > 0$, 使得 $x + \varepsilon v_{n,E} \in C_{d_\omega^n}(x, \delta)$, 于是

$$\sup_{y\in C_{d_\omega^n}(x,\delta)\cap L} \frac{d(f_\omega^n x, f_\omega^n y)}{d(x, y)} \geqslant \frac{d(f_\omega^n x, f_\omega^n(x + \varepsilon v_{n,E}))}{d(x, x + \varepsilon v_{n,E})}.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 得到

$$\sup_{y\in C_{d_\omega^n}(x,\delta)\cap L} \frac{d(f_\omega^n x, f_\omega^n y)}{d(x, y)} \geqslant |T_x f_\omega^n v_{n,E}|.$$

于是,

$$\Lambda_k^{+}(\omega, x) \geqslant \inf_{\dim E=k} \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log |T_x f_\omega^n v_{n,E}| = c_k^{+}(\omega, x).$$

这完成了证明.

在继续讨论之前, 先回忆可微映射 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 的排斥子和 bunched 导数的概念. 称紧集 $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^m$ 为 f 的一个排斥子, 如果 $f^{-1}\Delta_0 = \Delta_0$ 且存在常数 $C > 0$, $\lambda_0 > 1$ (λ_0 称为扩张常数), 使得对任意 $x \in \Delta_0, v \in \mathbb{R}^m$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$|T_x f^n v| \geqslant C\lambda_0^n.$$

通过改变 Riemann 度量可以使得 $C = 1$, 为方便起见, 直接设 $C = 1$. 注意到在此情况下, f 在 Δ_0 的每点处都是局部微分同胚的. 设 $0 < \alpha_0 \leqslant 1$, 称 f 在排斥子 Δ_0 上具有 α_0-bunched 导数, 如果对任意 $x \in \Delta_0$, 有

$$\|(T_x f)^{-1}\|^{1+\alpha_0} \cdot \|T_x f\| < 1.$$

下面考虑通过扰动确定系统的排斥子得到的随机排斥子. 我们称 $\Delta=\{\Delta_\omega:\omega\in\Omega\}$ 为一个随机紧集, 如果 $\Delta_\omega\subset M$ 且映射 $(\omega,x)\mapsto d(x,\Delta_\omega)$ 是可测的. $\Delta=\{\Delta_\omega:\omega\in\Omega\}$ 称作 F-变的, 如果 $\Theta(\Delta)=\Delta$, 即对任意 $\omega\in\Omega$, 有 $f_\omega\Delta_\omega=\Delta_{\vartheta\omega}$.

在文献 [19] 中, Liu 讨论了双曲集在随机扰动下的结构稳定性. 设 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为一可微映射, $\Delta_0\subset\mathbb{R}^m$ 为 f 的一个排斥子. 从文献 [19] 可知, 由 f 在 $C^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 中充分小的邻域 $\mathscr{U}(f)$ 生成的单边独立同分布的典型随机动力系统 $F:\Omega\to\mathscr{U}(f)$ 存在随机排斥子. 根据文献 [19] 中的讨论, 实际上对一般的随机动力系统我们有如下结果.

命题 3.3 设 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为可微映射, $\Delta_0\subset\mathbb{R}^m$ 是 f 的一个排斥子, 相应的扩张常数为 λ_0. 则对任意 $\varepsilon>0$ 和 $1<\lambda<\lambda_0$ 存在 f 在 $C^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 中的邻域 $\mathscr{U}(f)$, 使得对随机动力系统 $F:\Omega\to\mathscr{U}(f)$ 有如下结果:

(1) 存在不变的随机紧集 $\Delta=\{\Delta_\omega:\omega\in\Omega\}$, 使得对任意 $\omega\in\Omega$,

$$d(\Delta_0,\Delta_\omega)<\varepsilon; \tag{3.4}$$

(2) 对任意 $(\omega,x)\in\Delta$ 和 $v\in\mathbb{R}^m$,

$$|T_xf_\omega v|\geqslant\lambda|v|. \tag{3.5}$$

我们称如上 Δ 为 F 的一个随机排斥子.

关于随机排斥子, 容易得到以下性质.

命题 3.4 设 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为可微映射, $\Delta_0\subset\mathbb{R}^m$ 为 f 的一个排斥子. 如果 f 在 Δ_0 上有 α_0-bunched 导数, 则存在 f 在 $C^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 中的开邻域 $\mathscr{U}(f)$, 使得对随机动力系统 $F:\Omega\to\mathscr{U}(f)$ 以及由命题 3.3 得到的随机排斥子 Δ 上任意点 (ω,x), 有

$$\|(T_xf_\omega)^{-1}\|^{1+\alpha_0}\cdot\|T_xf_\omega\|<1. \tag{3.6}$$

下面给出本文的主要结果.

定理 3.5 设 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为 $C^{1+\alpha_0}$ $(0<\alpha_0\leqslant1)$ 的可微映射, $\Delta_0\subset\mathbb{R}^m$ 为 f 的一个排斥子且 f 在其上有 α_0-bunched 导数. 则存在 f 在 $C^{1+\alpha_0}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 中的开邻域 $\mathscr{U}(f)$, 使得对随机动力系统 $F:\Omega\to\mathscr{U}(f)$ 以及由命题 3.3 得到的随机排斥子 Δ 上任意点 (ω,x), 有

$$\Lambda_k^+(\omega,x)=c_k^+(\omega,x),\quad k\in\{1,2,\dots,m\}.$$

证明 由命题 3.2, 只需证明对任意 $(\omega,x)\in\Delta$ 和 $k\in\{1,2,\dots,m\}$, 有

$$\Lambda_k^+(\omega,x)\leqslant c_k^+(\omega,x). \tag{3.7}$$

由 $\Lambda_k^+(\omega,x)$ 的定义, 我们将对 $(\omega,x)\in\Delta,n\in\mathbb{N}$ 和 $y\in C_{d_\omega^n}(x,\delta)\cap L$ 估计

$$\frac{d(f_\omega^nx,f_\omega^ny)}{d(x,y)}, \tag{3.8}$$

其中 δ 为某正数, $L=x+E\in L_{\omega,x,k}$, E 为一个 k 维子空间. 注意到

$$\begin{aligned}d(f_\omega^nx,f_\omega^ny)&=\left|\int_0^1T_{x+t(y-x)}f_\omega^n(y-x)dt\right|\\&\leqslant\int_0^1\|T_{x+t(y-x)}f_\omega^n\|_Edt\cdot|y-x|\\&\leqslant\sup_{z\in C_{d_\omega^n}(x,\delta)\cap L}\|T_zf_\omega^n\|_E\cdot d(x,y).\end{aligned}$$

于是对 (3.7) 式, 只需证明存在 $\tau>0$, 使得对 $z\in C_{d_\omega^n}(x,\delta)\cap L$, 有

$$\|T_zf_\omega^n\|_E\leqslant\tau\|T_xf_\omega^n\|_E. \tag{3.9}$$

事实上, 如果以上不等式成立, 则

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{y\in C_{d_\omega^n}(x,\delta)\cap L}\frac{d(f_\omega^n x,f_\omega^n y)}{d(x,y)}\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|T_xf_\omega^n\|_E.$$

于是

$$\Lambda_k^+(\omega,x)\leqslant\inf_{\dim E=k}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|T_xf_\omega^n\|_E=c_k^+(\omega,x),$$

从而得到不等式 (3.7).

本定理剩下的工作是建立不等式 (3.9). 由于 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是 $C^{1+\alpha_0}$ 的可微映射, 我们可以选取 f 在 $C^{1+\alpha_0}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 中的开邻域 $\mathscr{U}(f)$ 和常数 C_1, 使得对任意 $g\in\mathscr{U}(f),x',x''\in\mathbb{R}^m$, 有

$$\|T_{x'}g-T_{x''}g\|\leqslant C_1\cdot|x'-x''|^{\alpha_0}.\tag{3.10}$$

另外, 由于 $\Delta_0\subset\mathbb{R}^m$ 是 f 的一个排斥子 (扩张常数为 λ_0), 并且 f 在其上具有 α_0-bunched 导数, 由命题 3.3 和 3.4, 可以选取常数 $1<\lambda<\lambda_0,\varepsilon,\delta>0$, 并缩小 (如果必要) 邻域 $\mathscr{U}(f)$ 使得对随机动力系统 $F:\Omega\to\mathscr{U}(f)$ 以及相应的随机排斥子 Δ 上的任意 (ω,x), 不等式 (3.4), (3.5) 和 (3.6) 成立, 并且因此对任意 $(\omega,x)\in\Delta$, f_ω 限制在球 $B_d(x,\delta)$ 上为到像集的微分同胚. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 有 $B_{d_\omega^n}(x,\delta)\subset B_d(x,\delta)$, 从而 f_ω 限制在 $B_{d_\omega^n}(x,\delta)$ 也是一个微分同胚. 另外, 不等式 (3.5) 保证了对任意 $(\omega,x)\in\Delta$ 和 $j\in\mathbb{N}$, 从 $B_d(f_\omega^jx,\delta)$ 到其像集的微分同胚 f_ω^j 的逆 $h_\omega^{(j)}$ 是良定的.

考虑 $y\in C_{d_\omega^n}(x,\delta)$ 和 $j\in\{1,2,\dots,n\}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&T_yf_\omega^j\circ(T_xf_\omega^j)^{-1}\\
&\quad=T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ T_yf_\omega\circ(T_xf_\omega)^{-1}\circ(T_{f_\omega x}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\\
&\quad=T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ(T_{f_\omega x}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}+T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ T_yf_\omega\circ(T_xf_\omega)^{-1}\circ(T_{f_\omega x}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\\
&\qquad-T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ(T_{f_\omega x}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\\
&\quad=T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ(T_{f_\omega x}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}+T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ T_yf_\omega\circ(T_xf_\omega)^{-1}\circ(T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\circ T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\\
&\qquad\circ(T_{f_\omega x}F_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}-T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ(T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\circ T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ(T_{f_\omega x}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\\
&\quad=[I+T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ T_yf_\omega\circ(T_xf_\omega)^{-1}\circ(T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}-T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ(T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}]\\
&\qquad\circ T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ(T_{f_\omega x}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\\
&\quad=[I+T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ(T_yf_\omega\circ(T_xf_\omega)^{-1}-I)\circ(T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}]\circ T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ(T_{f_\omega x}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\frac{\|T_yf_\omega^j\circ(T_xf_\omega^j)^{-1}\|}{\|T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\circ(T_{f_\omega x}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\|}\\
&\qquad\leqslant1+\|T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\|\cdot\|(T_yf_\omega\circ(T_xf_\omega)^{-1}-I)\|\cdot\|(T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\|\\
&\qquad\leqslant1+C_2\cdot\|T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\|\cdot\|T_yf_\omega-T_xf_\omega\|\cdot\|(T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\|\\
&\qquad\leqslant1+C_1\cdot C_2\cdot\|T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1}\|\cdot|y-x|^{\alpha_0}\cdot\|(T_{f_\omega y}f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\|,\qquad(\text{由 (3.10) 式})
\end{aligned}\tag{3.11}$$

其中

$$C_2=\max_{(\omega,p)\in\Delta}\|(T_pf_\omega)^{-1}\|.$$

注意到不等式 (3.4) 保证了当 ε 充分小时常数 C_2 有意义.

下面估计 (3.11) 式中右边的每一项, 先从 $|y-x|^{\alpha_0}$ 开始. 我们有

$$|y-x| = |h_\omega^{(j)}(f_\omega^j y) - h_\omega^{(j)}(f_\omega^j x)| \leqslant \|T_z h_\omega^{(j)}\| \cdot |f_\omega^j y - f_\omega^j x|, \tag{3.12}$$

其中 z 是连结 $f_\omega^j y$ 与 $f_\omega^j x$ 的直线段上的一点, 由 $C_{d_\omega^n}(x,\delta)$ 的定义, 它也落在 $f_\omega^j B_{d_\omega^n}(x,\delta)$ 中. 于是对 $l=1,2,\dots,j$, 有

$$f_\omega^l h_\omega^{(j)} z \in f_\omega^l B_{d_\omega^n}(x,\delta) \subset B_d(f_\omega^l x, \delta). \tag{3.13}$$

由不等式 (3.6) 和 Δ 的随机紧性, 我们可以选取 $0<a<1$ 充分大, δ 充分小, 使得对任意 $\omega\in\Omega$ 以及 Δ_ω 的 δ 邻域中的任意点 z, 有

$$\|(T_z f_\omega)^{-1}\|^{1+\alpha_0} \cdot \|T_z f_\omega\| < a.$$

令 $\beta>0$, 使得 $e^{\alpha_0\beta}a<1$. 再次取得 δ 充分小, 可以假设对任意 $\omega\in\Omega$, 如果 $p,q\in\Delta_\omega(\delta)$ 且 $d(p,q)<2\delta$, 则

$$\big|\log\|(T_p f_\omega)^{-1}\| - \log\|(T_q f_\omega)^{-1}\|\big| \leqslant \beta.$$

从 (3.13) 式可得, 对 $l=0,1,\dots,n$, 有

$$\|(T_{f_\omega^l h_\omega^{(j)} z} f_{\vartheta^l\omega})^{-1}\| \leqslant e^\beta \cdot \|(T_{f_\omega^l y} f_{\vartheta^l\omega})^{-1}\|. \tag{3.14}$$

下面我们返回 (3.12) 式. 由于 $T_z h_\omega^{(j)} = (T_{h_\omega^{(j)} z} f_\omega^j)^{-1}$, 由 (3.14) 式, 可得

$$\|T_z h_\omega^{(j)}\| = \|(T_{h_\omega^{(j)} z} f_\omega^j)^{-1}\| \leqslant \prod_{l=0}^{j-1} \|(T_{f_\omega^l h_\omega^{(j)} z} f_{\vartheta^l\omega})^{-1}\| \leqslant C_3 \cdot e^{\beta j} \cdot \prod_{l=1}^{j} \|(T_{f_\omega^l y} F_{\vartheta^l\omega})^{-1}\|,$$

其中

$$C_3 = \frac{\sup\limits_{\omega\in\pi_\Omega\Delta,\ p\in\Delta_\omega(\delta)} \|(T_p f_\omega)^{-1}\|}{\inf\limits_{\omega\in\pi_\Omega\Delta,\ q\in\Delta_\omega(\delta)} \|(T_q f_\omega)^{-1}\|}$$

(π_Ω 是从 $\Omega\times X$ 到 Ω 的投射). 由 (3.12) 式得

$$|y-x|^{\alpha_0} \leqslant \delta^{\alpha_0} \|T_z h_\omega^{(j)}\|^{\alpha_0} \leqslant C_3^{\alpha_0} \delta^{\alpha_0} e^{\alpha_0\beta j} \prod_{l=1}^{j} \|(T_{f_\omega^l y} f_{\vartheta^l\omega})^{-1}\|^{\alpha_0}. \tag{3.15}$$

对 (3.11) 式右边剩余的项可以进行如下估计

$$\|T_{f_\omega y} f_{\vartheta\omega}^{j-1}\| \cdot \|(T_{f_\omega y} f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\| \leqslant \prod_{l=1}^{j} (\|T_{f_\omega^l y} f_{\vartheta^l\omega}\| \cdot \|(T_{f_\omega^l y} f_{\vartheta^l\omega})^{-1}\|). \tag{3.16}$$

我们从 (3.15) 和 (3.16) 式得到

$$|y-x|^{\alpha_0} \cdot \|T_{f_\omega y} f_{\vartheta\omega}^{j-1}\| \cdot \|(T_{f_\omega y} f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\| \leqslant C_3^{\alpha_0} \cdot \delta^{\alpha_0} \cdot e^{\alpha_0\beta j} \cdot \prod_{l=1}^{j} (\|(T_{f_\omega^l y} f_{\vartheta^l\omega})^{-1}\|^{1+\alpha_0} \|T_{f_\omega^l y} f_{\vartheta^l\omega}\|).$$

于是,

$$|y-x|^{\alpha_0} \cdot \|T_{f_\omega y} f_{\vartheta\omega}^{j-1}\| \cdot \|(T_{f_\omega y} f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\| \leqslant C_3^{\alpha_0} \cdot \delta^{\alpha_0} \cdot e^{\alpha_0\beta j} \cdot a^j.$$

由 (3.11) 式得对任意 $(\omega,x)\in\Delta, n\in\mathbb{N}, y\in C_{d_\omega^n}(x,\delta)$ 和 $j\in\{0,1,\dots,n\}$, 有

$$\|T_y f_\omega^j \circ (T_x f_\omega^j)^{-1}\| \leqslant \|T_{f_\omega y} f_{\vartheta\omega}^{j-1} \circ (T_{f_\omega x} f_{\vartheta\omega}^{j-1})^{-1}\| (1 + C\gamma^j),$$

其中 $C = C_1 C_2 C_3^{\alpha_0} \delta^{\alpha_0}$, $\gamma = e^{\alpha_0\beta} a < 1$, 我们得到

$$\|T_y f_\omega^n \circ (T_x f_\omega^n)^{-1}\| \leqslant \prod_{j=1}^{n-1} (1 + C\gamma^j) < \prod_{j=1}^{\infty} (1 + C\gamma^j) = \tau.$$

于是,

$$\begin{aligned}\|T_y f_\omega^n\|_E &= \|T_y f_\omega^n \circ (T_x f_\omega^n)^{-1} \circ T_x f_\omega^n\|_E \\ &\leqslant \|T_y f_\omega^n \circ (T_x f_\omega^n)^{-1}\| \cdot \|T_x f_\omega^n\|_E \\ &< \tau \|T_x f_\omega^n\|_E, \end{aligned} \tag{3.17}$$

从而不等式 (3.9) 得证.

定理证毕.

由定理 3.1 和定理 3.5, 即到如下结果.

推论 3.6 设 $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 为 $C^{1+\alpha_0}$ $(0<\alpha_0\leqslant 1)$ 的可微映射, $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^m$ 为 f 的一个排斥子, 且 f 在其上有 α_0-bunched 导数. 则存在 f 在 $C^{1+\alpha_0}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 中的开邻域 $\mathscr{U}(f)$, 使得对随机动力系统 $F:\Omega\to\mathscr{U}(f)$, 任意的 F-不变测度 μ, 以及由命题 3.3 得到的随机排斥子 Δ 上 μ-a.e. (ω,x), 有

$$\Lambda_k^+(\omega,x)=c_k^+(\omega,x)=\rho_k^+(\omega,x), \quad k\in\{1,2,\dots,m\}.$$

3.3 可逆的情形

设 $F:\Omega \to$Homeo$(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上连续的随机动力系统, 其中 Homeo$(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的同胚构成的空间. 类似于 3.1 节, 对任意 $\omega\in\Omega, x\in\mathbb{R}^m$ 和 $k\in\{1,2,\dots,m\}$, 我们定义

$$\Lambda_k^-(\omega,x)=\inf_{L\in L_{\omega,x,m-k+1}} \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{|n|} \log \sup_{y\in C_{d_\omega^n}(x,\delta)\cap L} \frac{d(f_\omega^n x, f_\omega^n y)}{d(x,y)},$$

其中

$$C_{d_\omega^n}(x,\delta)=\{y\in B_{d_\omega^n}(x,\delta)\setminus\{x\}: f_\omega^j x+t(f_\omega^j y-f_\omega^j x)\in f_\omega^j B_{d_\omega^n}(x,\delta), n\leqslant j\leqslant 0, t\in[0,1]\},$$

对 $n<0$, 度量 d_ω^n 如下定义

$$d_\omega^n(x,y)=\max_{n\leqslant k\leqslant 0} d(f_\omega^i x, f_\omega^i y), \quad x,y\in\mathbb{R}^m.$$

显然,

$$\Lambda_1^-(\omega,x)\geqslant\Lambda_2^-(\omega,x)\geqslant\cdots\geqslant\Lambda_m^-(\omega,x),$$

我们称这些值为 F 在 (ω,x) 的 (负向) Lyapunov 指数.

设 $F:\Omega\to$Diff$^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的随机微分同胚, 则我们可以对任意 $\omega\in\Omega, x\in\mathbb{R}^m$ 和 $k\in\{1,2,\dots,m\}$ 定义

$$c_k^-(\omega,x)=\inf_{\dim E=m-k+1} \limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{|n|} \log \sup_{v\in E\cap S^{m-1}} |T_x f_\omega^n v|.$$

显然,

$$c_1^-(\omega,x)\geqslant c_2^-(\omega,x)\geqslant\cdots\geqslant c_m^-(\omega,x).$$

类似于 3.2 节中的定理 3.1 和命题 3.2, 即到如下结论.

定理 3.7 设 $F:\Omega\to$Diff$^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的随机微分同胚, μ 为 F 的不变测度. 假设 $\log^+\|T_x f_\omega^{-1}\|\in L^1(\Omega\times\mathbb{R}^m)$. 则对 μ-a.e. $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^m$ 和任意 $k\in\{1,2,\dots,m\}$, 存在某一 $i\in\{1,2,\dots,s^-(\omega,x)\}$, 使得

$$\rho_k^-(\omega,x)=c_k^-(\omega,x)=\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{|n|}\log\sup_{v\in G\cap S^{m-1}}|T_x f_\omega^n v|=\lambda_i^-(\omega,x),$$

其中 G 是包含于 $V_{i+1}^-(\omega,x)$ 中的任意 $k\,(>\dim V_i^-(\omega,x))$ 维子空间.

命题 3.8 设 $F:\Omega\to\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的随机微分同胚. 则对任意 $\omega\in\Omega, x\in\mathbb{R}^m$ 和 $k\in\{1,2,\dots,m\}$, 有

$$\Lambda_k^+(\omega,x)\geqslant c_k^+(\omega,x),\quad \Lambda_k^-(\omega,x)\geqslant c_k^-(\omega,x).$$

我们可以调整定理 3.5 的证明, 对随机双曲集得到类似结果. 设 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为微分同胚. 称紧集 $\Delta_0\subset\mathbb{R}^m$ 为 f 的一个双曲集, 如果 $f^{-1}\Delta_0=\Delta_0$, 并且存在常数 $C>0, 0<\lambda_0<1$ (λ_0 称为双曲常数) 和连续分解 $T_{\Delta_0}\mathbb{R}^m=E^s_{\Delta_0}\oplus E^u_{\Delta_0}$, 使得对任意 $x\in\Delta_0$, 有

$$T_xfE_x^s=E^s_{f(x)},\quad T_xfE_x^u=E^u_{f(x)}$$

以及

$$|T_xfv|\leqslant C\lambda_0|v|,\quad v\in E_x^s,$$
$$|T_xfv|\geqslant C\lambda_0^{-1}|v|,\quad v\in E_x^u.$$

通过改变 Riemann 度量可使 $C=1$, 如前面一样, 为方便起见, 我们直接假设 $C=1$.

由文献 [19], 我们有如下结果.

命题 3.9 设 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为微分同胚, Δ_0 为 f 的一个双曲集, 双曲常数为 λ_0. 则对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\lambda_0<\lambda<1$, 存在 f 在 $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 中的开集 $\mathscr{U}(f)$, 使得对随机动力系统 $F:\Omega\to\mathscr{U}(f)$, 有如下结果成立:

(1) 存在不变随机紧集 $\Delta=\{\Delta_\omega:\omega\in\Omega\}$, 使得对任意 $\omega\in\Omega$,

$$d(\Delta_0,\Delta_\omega)<\varepsilon;$$

(2) 存在连续分解 $T_\Delta\mathbb{R}^m=E^s_\Delta\oplus E^u_\Delta$, 使得对任意 $(\omega,x)\in\Delta$, 有

$$T_xf_\omega E^s_{(\omega,x)}=E^s_{(\vartheta\omega,f_\omega x)},\quad T_xf_\omega E^u_{(\omega,x)}=E^u_{(\vartheta\omega,f_\omega x)},$$

并且

$$|T_xf_\omega v|\leqslant\lambda|v|,\quad v\in E^s_{(\omega,x)},$$
$$|T_xf_\omega v|\geqslant\lambda^{-1}|v|,\quad v\in E^u_{(\omega,x)}.$$

此时称 Δ 为 F 的一个随机双曲集.

调整定理 3.5 的证明, 我们对随机双曲集立即得到如下结果.

定理 3.10 设 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 为 $C^{1+\alpha_0}$ 的微分同胚, Δ_0 为 f 的一个双曲集, 且在其上有

$$\|T_xf|_{E_x^s}\|^{1+\alpha_0}\cdot\|(T_xf|_{E_x^s})^{-1}\|<1,\quad \|(T_xf|_{E_x^u})^{-1}\|^{1+\alpha_0}\cdot\|T_xf|_{E_x^u}\|<1.$$

则存在 f 在 $\mathrm{Diff}^{1+\alpha_0}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 中的开邻域 $\mathscr{U}(f)$, 使得对随机动力系统 $F:\Omega\to\mathscr{U}(f)$ 以及由命题 3.9 得到的随机双曲集 Δ 上任意点 (ω,x), 有

$$\Lambda_k^+(\omega,x)=c_k^+(\omega,x)=-\Lambda_k^-(\omega,x)=-c_k^-(\omega,x),$$

$k\in\{1,2,\dots,m\}$.

由定理 3.7 和定理 3.10, 即得如下结论.

推论 3.11 设 f 如定理 3.10 中所定义. 则存在 f 在 $\mathrm{Diff}^{1+\alpha_0}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ 中的开邻域 $\mathscr{U}(f)$, 使得对随机动力系统 $F:\Omega\to\mathscr{U}(f)$, 任意 F- 不变测度 μ 以及由命题 3.9 得到的随机双曲集 Δ 上 μ-a.e.(ω,x), 有

$$\Lambda_k^+(\omega,x)=c_k^+(\omega,x)=\rho_k^+(\omega,x)=-\Lambda_k^-(\omega,x)=-c_k^-(\omega,x)=-\rho_k^-(\omega,x),\quad k\in\{1,\dots,m\}.$$

致谢 根据审稿人的建议, 我们对文章作了很多有益的改进. 为此, 作者对审稿人表示衷心的感谢.

参考文献

1 Barreira L, Pesin Ya. Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory. University Lecture Series 23. Providence, RI: Amer Math Soc, 2002

2 Pesin Y B. Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications. Chicago: The University of Chicago Press, 1998

3 Liao S T. Certain ergodic properties of a differential systems on a compact differentiable manifold. *Acta Sci Natur Univ Pekinensis*, **9**: 241–265, 309–327 (1963)

4 Oseledets V. A muliplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans Moscow Math Soc*, **19**: 197–231 (1968)

5 Liao S T. On characteristic exponents construction of a new borel set for the muliplicative ergodic theorem for vector fields. *Acta Sci Natur Univ Pekinensis*, **29**: 277–302 (1993)

6 Liao S T. Notes on study of vector bundle dynamical systems I-part 1. *Appl Math Mech* (*English Ed*), **16**: 813–823 (1995)

7 Liao S T. Notes on study of vector bundle dynamical systems I-part 2. *Appl Math Mech* (*English Ed*), **17**: 805–818 (1996)

8 Liao S T. Notes on study of vector bundle dynamical systems II. *Appl Math Mech* (*English Ed*), **18**: 421–440 (1997)

9 Dai X P. Exponential stability of nonautonomous linear differential equations with linear perturbations by liao methods. *J Differential Equations*, **225**: 549–572 (2006)

10 Dai X P. Integral expressions of Lyapunov exponents for autonomous ordinary differential systems. *Science in China Series A: Mathematics*, **52**(1): 195–216 (2009)

11 Kifer Y. Characteristic exponents of dynamical systems in metric space. *Ergod Th Dynam Sys*, **3**: 119–127 (1983)

12 Barreira L. A Non-additive thermodynamic formalism and applications to dimension theory of hyperbolic dynamical systems. *Ergod Th Dynam Sys*, **16**: 871–927 (1996)

13 Barreira L, Silva C. Lyapunov exponents for continuous transformations and dimension theory. *Discrete Contin Dynam Sys*, **13**(2): 469–490 (2005)

14 Arnold L. Random Dynamical Systems. New York: Springer, 1998

15 Liu P D. Dynamics of random transformations: smooth ergodic theory. *Ergod Th Dynam Sys*, **21**: 1279–1319 (2001)

16 Kifer Y. Ergodic Theory of Random Transformations. Boston: Birkhäuser, 1986

17 Kifer Y, Liu P D. Random Dynamical Systems. Hasselblatt B and Katok A, Handbook of Dynamical Systems, Vol 1B, eds. Elsevier, 2006, 379–499

18 Liu P D, Qian M. Smooth Ergodic Theory of Random Dynamical Systems. Lecture Notes in Math 1606, Berlin: Springer, 1995

19 Liu P D. Random perturbations of axiom a sets. *J Stat Phys*, **90**: 467–490 (1998)