

统计模拟中的数论方法

王元^{①*}, 方开泰^②

① 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100190

② 中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所, 北京 100190

E-mail: ywang@math.ac.cn, ktfang@uic.edu.hk

收稿日期: 2008-12-25; 接受日期: 2009-05-12; * 通信作者

国家科技奖励项目经费支持

摘要 受现实生活的一个案例形成的随机覆盖问题之启发, 我们在本文中讨论并比较了统计模拟中的几种方法, 包括 ELP 网、NT 网与其他网. 我们给出的一些结果对统计模拟是有用的.

关键词 数论方法 统计模型 几何概率

MSC(2000) 主题分类 65C05, 65C50

1 引言

由于统计中的许多问题都没有解析解, 所以统计模拟是一个重要工具. 命 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 为一个具有 c.d.f $F(x)$ 的总体的一个样本, T 为 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 的一个统计量. 统计模拟可以产生一个样本并构造出 T 的一个样本 T_1 . 重复上述过程 m 次, 我们得到 T 的一个样本集 T_1, \dots, T_m . 当 m 大时, T_1, \dots, T_m 的经验分布渐进于 T 的分布.

作为数论方法中 NT 网在统计模拟中的一个案例, 方开泰与王元^[1,2] 建议了一个固定圆被 m 个随机圆覆盖面积的分布模型, 现在我们将这个问题叙述如下:

命 $B_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 为单位圆. 假定有 m 个随机圆 O_1, \dots, O_m , 它们的中心与半径分别为 P_1, \dots, P_m 与 R_1, \dots, R_m , P_i 相互独立, 且

$$P_i \sim N_2(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \mathbf{I}_2), \quad 1 \leq i \leq m,$$

此处 $N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 为具有均值矢量 $\boldsymbol{\mu}$ 与协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的二元正态分布, $\sigma_i > 0$, $\mathbf{0} = (0, 0)$, \mathbf{I}_2 为 2×2 单位矩阵. 命 S 为 B_2 与所有随机圆的并的公共区域, 即

$$S = B_2 \cap (O_1 \cup \dots \cup O_m).$$

我们亦用 S 表示 S 的面积, 希望求出 S 的分布图. 图 1 表示 $m = 3$ 的一种情况, 其中 S 是有阴影的区域.

若 $m = 1$, 由于两个圆的公共面积可以由这两个圆的中心与半径的显式表示出来, 所以容易找到 S 的分布. 当 $m > 1$, 则难于找到 S 分布的一个简单公式.

引用格式: 王元, 方开泰. 统计模拟中的数论方法. 中国科学 A, 2009, 39(7): 775-782
Wang Y, Fang K T. On number-theoretic method in statistics simulation. Sci China Ser A, 2009, 52,
DOI: 10.1007/s11425-009-0126-3

若 $m = 1$, 我们可以对 S 的模拟结果与 S 的真值来进行比较. 在此, 经典方法, 即等距格点方法 (ELP 网) 与数论方法 (NT 网) 被用来作统计模拟. 一些数值实例表明 NT 网远比 ELP 网为优 (例如见文献 [1, 2]). 为简单计, 我们可以取 $m = 0$, 即 S 为单位圆的面积 π , 我们仅对模拟结果与 π 进行比较即可 (见文献 [3, 例 3a]).

本文的目的在于用几何数论的结果来对统计模拟中的几种方法作些比较说明.

2 ELP 网与 NT 网

命 $ABCD$ 为 S_2 的外接正方形, 如图 2 所示. 将 $ABCD$ 分割成边长为 $2/n$ 的 n^2 个面积相等的正方形, 则我们得到 $ABCD$ 中 n^2 个格点

$$\left\{ \left(-1 + \frac{2i}{n}, -1 + \frac{2j}{n} \right), 0 \leq i, j \leq n-1 \right\}. \quad (1)$$

点集 (1) 称为一个 ELP 网, 假定共有 N 个格子点落于 B_2 中, 现在我们用标准 Monte Carlo 方法生成 m 个随机圆, 它们的圆心与半径分别为 P_i 与 R_i ($1 \leq i \leq m$). 假定在这 N 个点中有 M 个点落于区域 $O_1 \cup \dots \cup O_m$ 之中, 则我们得到 S 的一个近似的观测值 $\pi M/N$. 重复这一步骤, 我们得到 S 的一个近似的观测值系, 从而获得 S 的一个经验分布. 我们称这个模拟程序为方法 I.

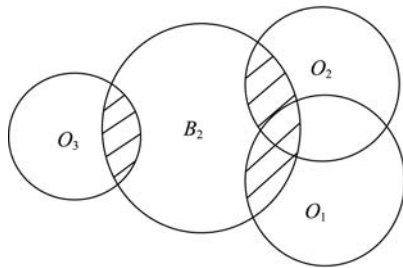


图 1

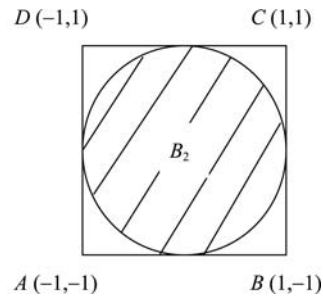


图 2

若用一个 NT 网代替集合 (1). 例如取 $ABCD$ 上的一个佳格点网 (好格子点网, glp 网), 并如前所述进行模拟, 则称这个程序为方法 II.

这两个方法都基于 $ABCD$ 上的均匀散布点集, 而不是直接用 B_2 上的均匀散布点集. 我们当然可以用 B_2 上的一个网来进行模拟. 变换

$$\begin{cases} x = r \cos 2\pi\theta, \\ y = r \sin 2\pi\theta, \end{cases}$$

将单位正方形 $U_2 = \{(r, \theta) : 0 \leq r, \theta \leq 1\}$ 映射为 B_2 , 我们有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \iint_{U_2} 2\pi r dr d\theta. \quad (2)$$

命 $P_q = \{P_q(i) = (r_i, \theta_i), 1 \leq i \leq q\}$ 为 U_2 上的一个均匀散布点集 (NT 网). 则

$$Q_q = \{Q_q(i) = (r_i \cos 2\pi\theta_i, r_i \sin 2\pi\theta_i), 1 \leq i \leq q\}$$

为 B_2 上的 q 个点所成之点集. 注意 $\{Q_q\}$ 在 B_2 上不是均匀散布的. 但是由 (2) 可知我们可以用加权和 $\sum_{i=1}^q 2\pi r_i = N^*$ 来代替 N . 假定 $Q_q(i_j)$ ($1 \leq j \leq t$) 为 $\{Q_q(i)\}$ 中被

$O_1 \cup \dots \cup O_m$ 覆盖的诸点, 则 $\sum_{j=1}^t 2\pi r_{ij} = M^*$ 可以用来代替 M . 因此我们可以如前一样来进行模拟, 并称这个程序为方法 III.

我们可以直接定义 B_2 上的 NT 网如下: 命 P_q 为 U_2 上的一个 NT 网, 它有 Weyl^[4] 意义下的偏差

$$D(q) = \sup_{(r,\theta) \in U_2} \left| \frac{N(r,\theta)}{q} - r\theta \right|, \quad (3)$$

此处 $N(r,\theta)$ 表示满足 $r_i \leq r, \theta_i \leq \theta$ 的点 $P_q(i) = \{(r_i, \theta_i), 1 \leq i \leq q\}$ 的个数. 则 $\{(x_i, y_i), 1 \leq i \leq q\}$ 是一个 B_2 上的均匀散布点集, 其中

$$\begin{cases} x_i = \sqrt{r_i} \cos 2\pi\theta_i, \\ y_i = \sqrt{r_i} \sin 2\pi\theta_i, \quad 1 \leq i \leq q. \end{cases} \quad (4)$$

我们可以证明

$$\sup_R \left| \frac{N(R)}{q} - \theta r \right| = D(q), \quad (5)$$

此处 $N(R)$ 表示落入扇形区域 $\{r_i \leq r, \theta_i \leq \theta\}$ 中的点数, 如图 3 所示^[1, 2]. (5) 式的左端称为 B_2 上的集合 (4) 的 F -偏差, 它是用来度量 B_2 上的集合均匀性的测度. (5) 式表示 B_2 上的集合 (4) 的 F -偏差, 它等于 U_2 上的集合 $P_q(i)$ 的偏差. 因此我们可以直接用集合 (4) 来做统计模拟, 这个程序被称为方法 IV.

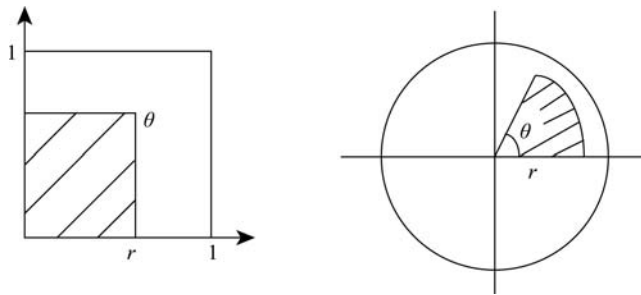


图 3

用 ELP 网与 NT 网 (glp 网) 做模拟的一些数值算例表明方法 II, III 与 IV 皆比方法 I 为优, 而方法 III 与 IV 具有同等精密度, 且均比方法 II 为优^[1, 2].

3 圆问题

命 $A_2(x)$ 表示圆 $\{(u, v) : u^2 + v^2 \leq x\}$ 内格点或整点 (u, v) 的个数. Gauss^[5] 证明了

$$A_2(x) - \pi x = O(x^{1/2}). \quad (6)$$

命 θ 为使关系式

$$A_2(x) - \pi x = O(x^\theta)$$

成立的 θ 的下界. 寻求 θ 的最佳估计是一个几何数论的著名问题, 称为圆问题. 估计 (6) 表示 $\theta \leq 1/2$. 这一结果不断地被改进, 例如 Sierpinski^[6] ($\theta \leq 1/3$), Van der Corput^[7] ($\theta \leq 37/112$), Titchmarsh^[8] ($\theta \leq 15/46$), 华罗庚^[9] ($\theta \leq 13/40$), 陈景润^[10] ($\theta \leq 12/37$) 等. 目前, 最佳记录是由 Iwaniec 与 Mozzochi^[11] 得到的:

$$A_2(x) - \pi x = O(x^{\frac{7}{22} + \varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \quad (7)$$

这表示 $\theta \leq 7/22$. 另一方面, Hardy^[12] 证明了 $\theta \geq 1/4$, 更精确地说, 他证明了

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{A_2(x) - \pi x}{x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x} > 0. \tag{8}$$

将 (6) 式的两端均除以 x , 则得

$$\frac{A_2(x)}{x} - \pi = O(x^{-1/2}), \tag{9}$$

此处 $A_2(x)/x$ 可以看作 B_2 中以 $1/\sqrt{x}$ 为边长的所有方形的面积之和. 记 $N_2 = A_2(x)/x$. 则 (9) 可以写成

$$N_2 - \pi = O(x^{-\frac{1}{2}}). \tag{10}$$

但由 (8) 可知 (10) 的右端不能改进得比

$$O(x^{-\frac{3}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x) \tag{11}$$

更好. 这是方法 I (ELP 网) 精密度的极限.

若在 (5) 中取 $\theta = 1$, 则扇形区域 R 为以原点为中心、 r 为半径的圆, 如图 4 所示. 命 $N(r)$ 为点集 (4) 落入圆 $\{(u, v) : u^2 + v^2 \leq r^2\}$ 中的点集, 则由 (5) 可知

$$\sup_r \left| \frac{N(r)}{q} \pi r^2 - \pi r^2 \right| = O(D(q)). \tag{12}$$

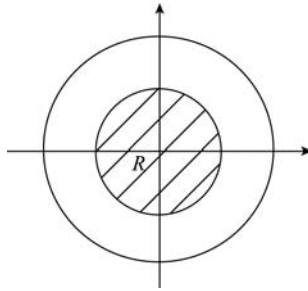


图 4

我们引入一个有低偏差 $D(q)$ 的 U_2 上的一个 NT 网, 及由此诱导出一个 B_2 上的 NT 网, 具有 F -偏差 $D(q)$, 如下:

命 $\{F_n\}$ 为 Fibonacci 序列, 此处诸 F_n 为由下面的递推公式定义的整数

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1),$$

或直接由关系式

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

定义. Bahvalov^[13], 华罗庚与王元^[14] 独立地建议了 U_2 上的点集

$$\left(\frac{k}{F_n}, \left\{ \frac{kF_{n-1}}{F_n} \right\} \right), \quad 1 \leq k \leq F_n, \tag{13}$$

其中 $n \geq 3$, $\{y\}$ 表示 y 的分数部分. 他们还用集合 (13) 来构造 U_2 上的求积公式. Zaremba^[15] 证明了集合 (13) 有偏差

$$D(F_n) = O\left(\frac{\log F_n}{F_n} \right). \tag{14}$$

由 Schmidt^[16] 关于均匀分布的著名定理可知 (14) 的右端是臻于至善的. 如果我们用 (13) 诱导的 B_2 上的网作模拟, 则仅导致误差 $O(\log F_n/F_n)$. 这说明 ELP 网与 NT 网给出的模拟误差分别为

$$O(q^{-\frac{3}{4}} \log^{\frac{1}{4}} q) \quad \text{与} \quad O(q^{-1} \log q), \quad (15)$$

此处 q 为网中所含点数, 这可以看作为在模拟中用 NT 网比 ELP 网为佳这个问题的说明.

注记 1 ELP 网的偏差不会比 $O(q^{-1/2})$ 更好^[17]. 因此若一个 ELP 网映射至 B_2 , 则诱导的集合仅有 F -偏差 $O(q^{-1/2})$.

4 高维球问题

第一节引进的统计模拟模型可以推广至 $s (> 2)$ 维情形. 命 B_s 为 S 维单位球:

$$B_s = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) : x_1^2 + \dots + x_s^2 \leq 1\}.$$

假定有 m 个随机球 O_1, \dots, O_m , 它们的中心与半径分别为 P_1, \dots, P_m 与 R_1, \dots, R_m , P_i 相互独立, 且 $P_i \sim N_s(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \mathbf{I}_s)$, 其中 N_s 为多元正态分布, $\sigma_i > 0$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)'$ 及 \mathbf{I}_s 为 $s \times s$ 单位矩阵. 试求 $S = B_s \cap (O_1 \cup \dots \cup O_m)$ 的体积的分布, 此处我们仍用 S 表示 S 的体积.

我们用 $A_s(x)$ 表示球 $\{(x_1, \dots, x_s) : x_1^2 + \dots + x_s^2 \leq x\}$ 中的整点 (x_1, \dots, x_s) 个数. 则类似于 Gauss 圆问题, 我们可以证明

$$A_s = v(B_s)x^{s/2} + O(W), \quad (16)$$

此处

$$v(B_s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} \quad (17)$$

为 B_s 的体积, $W = O(x^\varphi)$, 其中 φ 为一个满足 $0 < \varphi < s/2$ 的数.

当 $s = 3$ 时, 陈景润^[18] 与 Vinogradov^[19] 独立地证明了 $\varphi = \frac{2}{3} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). 但是我们有 $W = \Omega(x^{1/2} \log^2 x)$, 这就是说, 应用 ELP 网的误差极限为

$$N_3 - v(B_3) = O(q^{-2/3} \log^2 q), \quad (18)$$

此处 $N_3 = A_3(x)/q$, $q = [x^{3/2}]$, 其中 $[y]$ 表示 y 的整数部分.

当 $s \geq 4$ 时, Walfisz^[20] 与 Landau^[21] 证明了 (16) 式的误差项适合

$$W = \begin{cases} O(x \log^2 x), & \text{当 } s = 4, \\ O(x^{s/2-1}), & \text{当 } s > 4. \end{cases} \quad (19)$$

Jarnik^[22] 证明了

$$W = \Omega(x^{s/2-1}), \quad s \geq 4.$$

因此除去 $s = 4$ 的对数阶外, 估计 (19) 是臻于至善的.

将 (16) 的两端除以 $x^{s/2}$ 则得

$$N_s - v(B_s) = O(q^{-2/s}), \quad (20)$$

此处 $N_s = A_s(x)/x^{s/2}$, $q = [x^{s/2}]$, 其中在计算 $s = 4$ 的情况时, 对数项被忽略了, 这就是 ELP 网的极限.

现在我们取一个 U_s 上的 NT 网, 并推荐使用 Korobov^[23] 与 Hlawka^[24] 独立建议的 glp 网:

$$\left(\left\{ \frac{a_1 k}{q} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{q} \right\} \right), \quad 1 \leq k \leq q, \quad (21)$$

此处 $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_s\}$ 为一个整矢量. 他们证明了, 当 $q = p$ 为素数时, 存在一个矢量 \mathbf{a} 使集合 (21) 有偏差

$$D(p) = O\left(\frac{\log^s p}{p}\right). \quad (22)$$

我们将集合 (21) 记为 $\{c_k = (c_{k1}, \dots, c_{ks}), 1 \leq k \leq q\}$. 当 $s = 3$ 时, 我们定义

$$\begin{cases} x_{k1} = c_{k1}^{1/3}(1 - 2c_{k2}), \\ x_{k2} = 2c_{k1}^{1/3} \sqrt{c_{k2}(1 - c_{k2})} \cos(2\pi c_{k3}), \\ x_{k3} = 2c_{k1}^{1/3} \sqrt{c_{k2}(1 - c_{k2})} \sin(2\pi c_{k3}), \end{cases} \quad 1 \leq k \leq q.$$

若 $q = p$ 为一个素数, 则存在 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 使 $\{\mathbf{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}), 1 \leq k \leq p\}$ 为 B_s 上的一个 NT 网, 其中 F -偏差为 $O(\log^3 p/p)$.

当 $s > 3$ 时, 我们取 U_s 上含有 p 个元素的一个 glp 网. 记它为 $\{c_k = \{(c_{k1}, \dots, c_{ks}), 1 \leq k \leq p\}$. 命

$$F_j(\varphi) = \begin{cases} \varphi^s, & \text{当 } j = 1, \\ \frac{\pi}{B(\frac{1}{2}, \frac{s-j+1}{2})} \int_0^\varphi (\sin \pi t)^{s-j} dt, & \text{当 } 2 \leq j \leq s, \end{cases}$$

此处 $B(a, b)$ 为 Beta 函数. 记

$$\begin{cases} b_{k1} = c_{k1}^{1/s}, \\ b_{ki} = F_i^{-1}(c_{ki}), \quad 2 \leq i \leq s, \quad 1 \leq k \leq p, \end{cases}$$

此处 $F_i^{-1}(x)$ 为 x_i 的 c.d.f. $F_i(x)$ 的逆函数. 定义

$$\begin{cases} x_{kj} = b_{k1} \prod_{i=2}^j S_{ki} C_{k,j+1}, \quad 1 \leq j \leq s-1, \\ x_{ks} = b_{k1} \prod_{i=2}^s S_{ki}, \end{cases}$$

此处

$$\begin{aligned} S_{ki} &= \sin(\pi b_{ki}), \quad C_{ki} = \cos(\pi b_{ki}), \quad 2 \leq i \leq s-1, \\ S_{ks} &= \sin(2\pi b_{ks}), \quad C_{ks} = \cos(2\pi b_{ks}), \quad 1 \leq k \leq p. \end{aligned}$$

则 $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, \dots, x_{ks}), 1 \leq k \leq p$ 为 B_s 上的一个 NT 网, 它的 F -偏差等于 c_k 的偏差, 即有阶^[1,2]

$$O(p^{-1} \log^s p). \quad (23)$$

(22) 与 (23) 是

$$O(q^{-2/s}) \quad \text{与} \quad O(q^{-1} \log^s q) \quad (24)$$

的比较, 这可以看作在统计模拟中, NT 网比 ELP 网优越的说明.

注记 2 由均匀分布的一个重要猜想可知, 对于 U_s 上任何 q 个点的集合, 其偏差皆适合 $D(q) = \Omega(q^{-1} \log^{s-1} q)$.

注记 3 Halton 网可以达到估计 $D(q) = O(q^{-1} \log^{s-1} q)$, 但是 Halton 网的构造比 glp 网要复杂 [25].

注记 4 对于一个素数 p , glp 网的构造依赖于矢量 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(p)$. 但求出 $\mathbf{a}(p)$ 需要 $O(p^2)$ 次初等运算, 所以由数值分析的角度看, 这个方法只是存在性结果. 我们将 Fibonacci 网 (13) 推广至 U_s ($s > 2$), 但其偏差却大于 (23) [17].

5 其他区域

首先, 对于有理椭球

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} x_i x_j,$$

此处 $a_{ij} = a_{ji}$ 及 $a_{ij} \in Q$, 存在一个有理系数的线性变换 T , 它将 $Q(\mathbf{x})$ 映射至 B_s . 因此第四节所述的结果对 $Q(\mathbf{x})$ 亦成立 (见文献 [26]). 当 $s = 2$ 时, Jarnik [22] 证明了下面定理:

命 L 为一个闭 Jordan 曲线, 它的长度亦记为 L . 假定 $L \geq 1$, 命 A 为由 L 包围的区域, 此处 A 的面积亦记为 A . 命 N 为 A 中整点之个数, 则

$$|A - N| < L. \quad (25)$$

这个结果的精密度等于 Gauss 关于圆的问题的精密度 (见 (6)). 取 A 为单位正方形, 则由 A 上 ELP 网的偏差之上, 下界估计可知 (25) 右端的无穷大阶是臻于至善的.

若 $s > 2$, 则由 U_s 上 ELP 网的偏差可知 (25) 的右端应不会优于 A 的边界的 $(s-1)$ 维测度.

命 A 为一个 s 维有界区域. 假定存在一个变换将 U_s 映射至 A , 则由逆变换法, 我们可得到一个由 U_s 上的 NT 网 \tilde{U}_s 诱导出来的 A 上的一个 NT 网 \tilde{A} , 其中 \tilde{A} 的 F -偏差等于 Weyl 意义之下 \tilde{U}_s 的偏差 (见文献 [1, 2]). 因此我们建议用 \tilde{A} 来作 A 上统计量的统计模拟, 即我们推荐用第二节所讲的方法 IV.

若 A 是 s 维空间的一个有界区域, 但其维数 t 小于 s , 例如 A 是 B_s 的边界 S_{s-1} , 则需要一个将 U_t 映射至 A 的映射 φ . 现在我们可以用 A 的体积元素去定义 c.d.f. $F(\mathbf{x})$, 然后我们可以决定由 U_t 上的一个 NT 网 \tilde{U}_t 诱导出来的 A 上的 NT 网 \tilde{A} , 从而仍可以如前一样应用方法 IV [1, 2].

我们有由 U_t 至下面每一个区域的映射:

$$A_s = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_s \leq 1\},$$

$$B_s = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) : x_1^2 + \dots + x_s^2 \leq 1\},$$

$$S_{s-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) : x_1^2 + \dots + x_s^2 = 1\},$$

$$V_s = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}_s^+ : x_1 + \dots + x_s \leq 1\},$$

$$T_{s-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}_s^+ : x_1 + \dots + x_s = 1\},$$

$$T_{s-1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}_s^+ : x_1 + \dots + x_s = 1, 0 \leq a_i \leq x_i \leq b_i \leq 1, 1 \leq i \leq s\},$$

此处 \mathbb{R}_s^+ 表示所有非负元素矢量构成的集合, 及 $a'_i s$ 与 $b'_i s$ 为 $[0, 1]$ 中的常数 (见文献 [1, 2, 27]).

若 A 是一个 s 维区域, 但我们不能明确写出由 U_s 至 A 的映射, 则我们可以定义一个包围 A 的长方体 R . 然后利用 R 上的一个 NT 网来对 A 上的统计量作统计模拟, 即用第二节

引进的方法 II. 一般说来, 这个方法的误差大于方法 IV 的误差, 但仍比 GLP 网为优 (即方法 I).

致谢 感谢周永道博士和宋谢冰小姐协助中文 Latex 输入工作, 感谢周宏先生的许多帮助.

参考文献

- 1 Fang K T, Wang Y. Number-Theoretic Methods in Statistics. Boca Raton: Chapman and Hall, 1994
- 2 Wang Y, Fang K T. Number theoretic methods in applied statistics. *Chin Ann Math Ser B*, **11**: 41–55 (1990); II, *Chin Ann Math Ser B*, **11**: 384–394 (1990)
- 3 Ross S D. A Course in Simulation. New York: Macmillan Publishing Company, 1991
- 4 Weyl H. Über die gleichverteilung der zahlen mod Eins. *Math Ann*, **77**: 313–352 (1916)
- 5 Gauss C F. De nexu inter multitudinem classium etc. *Werke*, **2**: 269–291 (1863)
- 6 Sierpinski W. O pewnem zagadnieniu z rachunka funkcji asymptotycznych. *Prace Mat-Fiz*, **17**: 77–118 (1906)
- 7 van der Corput J G. Neue zahlentheoretische abschätzungen. I, *Math Ann*, **89**: 215–254 (1923); II, *Math Z*, **29**: 397–428 (1928)
- 8 Titchmarsh E C. The lattice points in a circle. *Proc London Math Soc*, **38**: 96–115 (1935)
- 9 Hua L K. The lattice points in a circle. *Quart J Math Oxford*, **13**: 18–29 (1942)
- 10 Chen J R. The circle problem. *Acta Math Sin*, **13**: 299–313 (1963)
- 11 Iwaniec H, Mozzochi C J. On divisor and circle problems. *J Numer Theory*, **29**: 60–93 (1988)
- 12 Hardy G H. On Dirichlet's divisor problem. *Proc London Math Soc*, **15**: 1–25 (1916)
- 13 Bahvalov N S. Approximate computation of multiple integrals. *Ves Mos Univ Ser Math*, **4**: 3–18 (1959)
- 14 Hua L K, Wang Y. Remarks concerning numerical integration. *Sci Rec*, **4**: 8–11 (1960)
- 15 Zaremba S K. Good lattice points, discrepancy and numerical integration. *Ann Mat Pura Appl* (4), **73**: 293–318 (1966)
- 16 Schmidt W M. Irregularities of distribution, VII. *Acta Arith*, **21**: 45–50 (1972)
- 17 Hua L K, Wang Y. Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin/Beijing: Springer-Verlag/Science Press, 1981
- 18 Chen J R. Improvement of asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimensions (II). *Sci Sin*, **12**: 751–764 (1963)
- 19 Vinogradov I M. The number of integral points in a sphere. *Izv AN SSSR*, **27**: 957–968 (1963)
- 20 Walfisz A. Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen ellipsoiden. *Math Z*, **19**: 300–307 (1924)
- 21 Landau E. Über gitterpunkte in mehrdimensionalen ellipsoiden. *Math Z*, **21**: 126–132 (1924)
- 22 Jarník V. Über Gitterpunkte in der Ebene. *Rospravy*, **33**: (1924)
- 23 Korobov N M. The approximate computation of multiple integrals. *DAN SSSR*, **124**: 1027–1210 (1959)
- 24 Hlawka E. Zur angenaherten Berechnung mehrfacher Integrale. *Mon Math*, **66**: 140–151 (1962)
- 25 Halton J H. On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. *Numer Math*, **2**: 84–90 (1960)
- 26 Hua L K. On Estimation of Exponential Sums and Their Applications in Number Theory. Enz Teubner Verlag, 1959
- 27 Wang Y, Fang K T. Uniform design of experiments with mixtures. *Sci Sin*, **26**: 1–10 (1996)