中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 4 期: 507～514
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

二分图中关于 Enomoto 问题的结果

颜谨*, 高云澍

山东大学数学学院, 济南 250100
* E-mail: yanj@sdu.edu.cn

收稿日期: 2007-06-17; 接受日期: 2008-09-16
山东省中青年科学家科研奖励基金 (编号: 2007BS01021), 山东省泰山学者奖励计划, 教育部留学归国基金和国家自然科学基金 (批准号: 60673047) 资助项目

摘要 设 k, n_1 和 n_2 是 3 个正整数, $G=(V_1,V_2;E)$ 是一个二分图, 使得 $|V_1|=n_1$, $|V_2|=n_2$, 其中 $n_1\geqslant 2k+1$, $n_2\geqslant 2k+1$ 并且 $n_1-n_2\leqslant 1$. 如果对任意不相邻的 $x\in V_1$ 和 $y\in V_2$, 都有 $d(x)+d(y)\geqslant 2k+2$, 则 G 包含 k 个相互独立的圈. 以上结果部分地回答了 Enomoto 提出的关于二分图有独立圈的问题.

关键词 二分图 均衡二分图 相互独立的圈

MSC(2000) 主题分类 05C38, 05C70

1 引言

本文仅考虑有限无向简单图. 设 $G=(V,E)$ 是一个图, G 的一个子图集合称为点不交的或者相互独立的, 如果它们中的任何两个元素在 G 中没有公共顶点. 对 G 的两个相互独立子图 G_1 和 G_2, 用 $E(G_1,G_2)$ 表示其一顶点在 G_1 中另一顶点在 G_2 中的边集, 令 $e(G_1,G_2)=|E(G_1,G_2)|$. 设 x 和 H 分别是 G 的一个点和一个子图, 用 $N(x,H)$ 表示在 H 中和 x 邻接的点的集合, 令 $d(x,H)=|N(x,H)|$. 当 $H=G$ 时, $d(x)$ 表示 x 在 G 中的度. 图 G 的最小度用 $\delta(G)$ 表示. 给定集合 $U\subseteq V(G)$, $G[U]$ 表示 U 的点导出子图. 不含任何圈的图称为无圈图. 对于二分图 $G=(V_1,V_2;E)$, 定义如下的两种度和:

$$\delta_{1,1}(G)=\min\{d(x)+d(y)|x\in V_1,y\in V_2\},$$

以及

$$\sigma_{1,1}(G)=\min\{d(x)+d(y)|x\in V_1,y\in V_2,xy\notin E(G)\}.$$

如果 $|V_1|=|V_2|$, 则称图 G 是一个均衡二分图, 其他未说明的符号与术语请见文献 [1].

Corrádi 和 Hajnal[2] 证明了如果图 G 的顶点数 $n\geqslant 3k$ 并且最小度 $\delta(G)\geqslant 2k$, 则 G 包含 k 个相互独立的圈. 对于二分图, Wang[3] 得到了下面的结果:

定理 1.1[3] 设 $G=(V_1,V_2;E)$ 是一个二分图, 使得 $|V_1|=|V_2|=n\geqslant 2k+1$. 如果 $\delta(G)\geqslant k+1$, 则 G 包含 k 个相互独立的圈.

引用格式: 颜谨, 高云澍. 二分图中关于 Enomoto 问题的结果. 中国科学 A, 2009, 39(4): 507–514
Yan J, Gao Y S. On enomotos problems in a bipartite graph. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0012-z

对于定理 1.1, Enomoto[4] 提出了下面的两个问题:

问题 1.2[4] 能不能用 $\delta_{1,1}$ 或者 $\sigma_{1,1}$ 代替定理 1.1 中的 δ?

问题 1.3[4] 在定理 1.1 中, 如果不假定 $|V_1|=|V_2|$, 结论是否成立?

受上面两个问题的启发, 本文得到了下面的主要结果:

定理 1.4 设 k, n_1 和 n_2 是 3 个正整数, $G=(V_1,V_2;E)$ 是一个二分图, 使得 $|V_1|=n_1$, $|V_2|=n_2$, 其中 $n_1 \geqslant 2k+1$, $n_2 \geqslant 2k+1$. 如果 $\sigma_{1,1}(G) \geqslant 2k+2$ 并且 $|n_1-n_2| \leqslant 1$, 则 G 包含 k 个相互独立的圈.

注意到文献 [5,6] 也考虑了均衡二分图中包含指定圈的情形, 由定理 1.4 可以猜测其中的条件 “均衡” 也不是必要的.

下列反例说明定理 1.4 中的条件 “$\sigma_{1,1}(G) \geqslant 2k+2$” 不能减弱. 设 $G_1=(X_1,Y_1;E_1)$ 和 $G_2=(X_2,Y_2;E_2)$ 是两个相互独立的完全二分图, 使得 $|X_1|=k$, $|Y_1|=|X_2|=m \geqslant k+2$, $|Y_2|=k-1$. 则二分图 $G=(X,Y;E)=(X_1\cup X_2, Y_1\cup Y_2;E)$ 由 G_1, G_2 和 Y_1 与 X_2 之间的 k 条独立的边构成. 易见 $\sigma_{1,1}(G)=2k+1$ 并且 G 中任意圈至少含 $X_1\cup Y_2$ 中的两个点. 因为 $|X_1\cup Y_2|=2k-1$, 所以 G 不含 k 个独立的圈.

2 引理

在本节中, $G=(V_1,V_2;E)$ 表示一个给定的二分图. 我们用 $l(C)$ 和 $l(P)$ 分别表示圈 C 和路 P 的长度. 亦即 $l(C)=|V(C)|$, $l(P)=|V(P)|-1$. 称长度为 4 的圈为 4-圈. 为证明定理 1.4, 先给出几个引理.

引理 2.1[7] 设 C 是图 G 中的一个圈, x 是 G 中不在 C 上的点. 如果 $d(x,C) \geqslant 2$, 则 $C+x$ 包含圈 C', 使得 $l(C')<l(C)$, 除非 C 是一个 4-圈.

引理 2.2[3] 设 s 和 t 是两个正整数, 使得 $t \geqslant s \geqslant 2$ 并且 $t \geqslant 3$, C_1 和 C_2 是 G 中的两个相互独立的圈, 其长度分别为 $2s$ 和 $2t$. 如果 $e(C_2,C_1) \geqslant 2t+1$, 则 $G[V(C_1\cup C_2)]$ 包含两个相互独立的圈 C_1^* 和 C_2^*, 使得 $l(C_1^*)+l(C_2^*)<2s+2t$.

引理 2.3[7] 设 C 是图 G 中的一个 4-圈, $x \in V_1$ 和 $y \in V_2$ 是不在 C 上的两个点. 如果 $d(x,C)+d(y,C) \geqslant 3$, 则存在 $z \in V(C)$, 使得 $C-z+x$ 为一个 4-圈并且 $yz \in E$, 或者 $C-z+y$ 为一个 4-圈并且 $xz \in E$.

引理 2.4[3] 设 T 是一棵顶点数至少为 2 的树, 其二部划分 (X,Y) 满足 $|Y| \geqslant |X|$. 令 $p=|Y|-|X|$, 则 Y 至少包含 T 中的 $p+1$ 个端点.

引理 2.5[8] 设 $P=x_1x_2\cdots x_p$ 和 $e=y_1y_2$ 为图 G 中两条相互独立的路, $p \geqslant 3$ 是奇数并且 $\{x_1,y_1\} \subseteq V_a$, 其中 $a \in \{1,2\}$. 假设存在 4-圈 C, 使得 C 和 P 以及 e 是相互独立的并且 $e(\{x_1,x_2,x_p,y_1\},C)+2d(y_2,C) \geqslant 7$, 则 $G[V(P\cup C)\cup\{y_1,y_2\}]$ 包含一个 4-圈 C' 和一条路 P', 使得 P' 和 C' 是相互独立的, 并且 $l(P')>l(P)$.

引理 2.6[3] 设 $P=x_1x_2x_3$ 和 $Q=y_1y_2y_3$ 是 G 中两条相互独立的路, 其中, $x_1 \in V_1$ 且 $y_1 \in V_2$. 设 C 为 G 的一个 4-圈, 使得 C 和 P 以及 Q 是彼此相互独立的. 如果 $e(\{x_1,x_3,y_1,y_3\},C) \geqslant 5$, 则 $G[V(C\cup P\cup Q)]$ 包含一个 4-圈 C' 和一个顶点数为 6 的路 P^*, 使得 P^* 与 C' 是相互独立的.

引理 2.7[3] 设 C 是 G 中的一个 4-圈, uv 和 xy 是 G 中两条相互独立的边, 使得这两条边与 C 是相互独立. 如果 $e(\{u,v,x,y\},C) \geqslant 5$, 则 $G[V(C)\cup\{u,v,x,y\}]$ 包含一个 4-圈 C'

和一条顶点数为 4 的路 P^*, 使得 P^* 和 C' 是相互独立的.

引理 2.8[3] 设 C 和 P 分别是图 G 中的 4-圈和一条顶点数为 $s \geqslant 6$ 的路, 使得 C 和 P 是相互独立的的. 如果 $e(P,C) \geqslant s+1$, 则 $G[V(C \cup P)]$ 包含两个相互独立的圈.

3 定理 1.4 的证明

设 k, n_1 和 n_2 是 3 个正整数, $G=(V_1,V_2;E)$ 是一个满足定理 1.4 条件的二分图, 其中, $|V_1|=n_1$, $|V_2|=n_2$. 不失一般性, 假定 $n_1 \geqslant n_2$. 可以断言, G 包含圈. 如果 $\delta(G) \geqslant 2$, 则断言成立. 因此设 $\delta(G) \leqslant 1$ 并且取 $v \in V_a$, 使得其度数至多为 1. 注意到 $\sigma_{1,1}(G) \geqslant 2k+2$, 于是对于每一个和 v 不邻接的点 $x \in V_b$, 其度数至少为 $2k+1$, 这里 $\{a,b\}=\{1,2\}$, 从而 $e(G) \geqslant (2k+1)(n-1) > 2n-1$, 因此 G 不是森林, 即 G 包含圈.

设 m 为使得 G 包含 m 个相互独立的圈的最大值. 如果 $m \geqslant k$, 则定理 1.4 成立, 因此, $m \leqslant k-1$. 选择 G 中 m 个相互独立的圈 $C_1,\ldots,C_m$, 使得

$$\sum_{i=1}^{m} l(C_i) \quad \text{尽可能的小}. \tag{1}$$

在满足 (1) 式的前提下, 我们选择 $C_1,\ldots,C_m$, 使得

$$G-V\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) \quad \text{中的最长路尽可能的长}. \tag{2}$$

设 $P=x_1x_2\cdots x_p$ 为 $G-V(\bigcup_{i=1}^{m} C_i)$ 中的一条最长路. 在满足 (1) 和 (2) 式的前提下, 如果 $p \geqslant 2$, 我们在 G 中选择 $C_1,\ldots,C_m$, 使得

$$d\left(x_{p-1}, G-V\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right)\right) \quad \text{最小}. \tag{3}$$

在满足 (1)–(3) 式的前提下, 我们在 G 中选择 $C_1,\ldots,C_m$ 和 P, 使得

$$G-V(P)\cup V\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right) \quad \text{中的最长路尽可能的长}. \tag{4}$$

设 $Q=y_1y_2\cdots y_q$ 为 $G-V(P)\cup V(\bigcup_{i=1}^{m} C_i)$ 中的最长路. 最后, 在满足 (1)–(4) 式的前提下, 如果 $q \geqslant 2$, 则在 G 中选择 $C_1,\ldots,C_m$, P 和 Q, 使得

$$d\left(y_2, G-V(P)\cup V\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right)\right)+d\left(y_{q-1}, G-V(P)\cup V\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i\right)\right) \quad \text{最小}. \tag{5}$$

设 $H=\bigcup_{i=1}^{m} C_i$, $D=G-V(H)$, $D_0=D-V(P)$ 以及 $|V(D)|=d$. 首先证明 D 包含一条顶点数至少为 $d-2$ 的路, 然后证明存在 $C_i \in H$, 使得 $V(D \cup C_i)$ 包含两个相互独立的圈, 这样就和 m 的选择矛盾. 证明过程中常常用 V_a 和 V_b, 其中 $\{a,b\}=\{1,2\}$ 表示二分图 G 的两个划分. 我们的证明包含几个断言.

断言 1 $d \geqslant 6$.

证明 若不然, 假定 $d \leqslant 5$. 为方便, 设 $l(C_1) \leqslant \cdots \leqslant l(C_m)$. 注意到 $n_1 \geqslant 2k+1$, $n_2 \geqslant 2k+1$, 因此, $l(C_m) \geqslant 6$. 由引理 2.1 和 (1) 式, C_m 不包含弦并且对于任意的 $y \in V(D)$, $d(y,C_m) \leqslant 1$. 由引理 2.2 和 (1) 式, 对于任意的 $i \in \{1,\ldots,m-1\}$, $\sum_{x\in V(C_m)} d(x,C_i) \leqslant l(C_m)$. 结合 $\sigma_{1,1}(G) \geqslant 2k+2$, 得到

$$(k+1)l(C_m) \leqslant \sum_{x\in V(C_m)} d(x) \leqslant (m+1)l(C_m)+d \leqslant (k+1)l(C_m)-1.$$

矛盾, 断言证毕.

断言 2 $d(y_2,D_0)+d(y_{q-1},D_0)\leqslant 5$.

证明 若不然, 假定 $d(y_2,D_0)+d(y_{q-1},D_0)\geqslant 6$, 则对于每一个 $i\in\{2,q-1\}$, $d(y_i,D_0)\geqslant 3$, 或者存在 $i\in\{2,q-1\}$, 使得 $d(y_i,D_0)\geqslant 4$. 在后一种情形下, 不失一般性, 设 $d(y_2,D_0)\geqslant 4$. 取 D_0 中的两个端点 u_1 和 u_2, 使得 $u_iy_2\in E(u_iy_{q-1}\in E)$ 并且 $u_i\neq y_1,y_q$. 显然, 由于 D 是无圈图, 所以 $d(u_1,P)+d(y_1,P)\leqslant 1$. 不妨设 $d(u_1,P)=0$. 于是有以下两种情形:

情形 1 q 是偶数.

注意到 D 是无圈图, $d(y_q,P)\leqslant 1$, 从而 $d(u_1,H)+d(y_q,H)\geqslant 2(k+1)-3=2(k-1)+1$. 根据鸽笼原理, 存在 $C_i\in H$, 使得 $d(u_1,C_i)+d(y_q,C_i)\geqslant 3$. 由引理 2.1 和 (1) 式, $l(C_i)=4$. 由引理 2.3, $G[V(C_i)\cup\{u_1,y_q\}]$ 包含一个 4-圈 C_i' 和边 e', 使得其相互独立, 并且 u_1 和 y_q 中刚好有一个是 e' 的端点. 如果用 C_i' 替换 C_i, 则 D_0 包含一条顶点数为 $q+1$ 的路, 和选择 (4) 式矛盾, 而这时 (1)–(3) 式仍然成立.

情形 2 q 是奇数.

令 $y_1\in V_a$, $D_1=D_0-V(Q)\cup\{u_1,u_2\}$ 的二部划分 (A,B) 满足 $A\subseteq V_a$ 和 $B\subseteq V_b$, 其中 $\{a,b\}=\{1,2\}$, 则 $|(V(Q)\cup\{u_1,u_2\})\cap V_a|-|(V(Q)\cup\{u_1,u_2\})\cap V_b|=3$. 由于 $|V(P)\cap V_a|-|V(P)\cap V_b|\geqslant -1$, $n_1-n_2\leqslant 1$, 故得到 $|B|\geqslant |A|+1$. 注意到 D 是无圈图, 所以, $d(v,P)\leqslant 1$ 并且对于任意的 $v\in B$, $d(v,Q\cup\{u_1,u_2\})\leqslant 1$. 先证明始终可以选择 $v\in B$, 使得 $d(v,D)\leqslant 2$. 如果存在 $v\in B$, 使得 $d(v,D_1)=0$, 则 $d(v,D)\leqslant 2$, 因此 D_1 是一棵树. 由引理 2.4, B 中包含至少两个端点 v_1 和 v_2. 由于 D 是无圈图, 因而 $e(\{v_1,v_2\},Q\cup\{u_1,u_2\})\leqslant 1$, 于是可以选择端点 $v_1\in B$, 使得 $d(v_1,Q\cup\{u_1,u_2\})=0$, 从而 $d(v_1,D)\leqslant 2$.

由条件 $d(u_1,P)=0$, 我们得到 $d(v,D)+d(u_1,D)\leqslant 3$, 从而 $d(u_1,H)+d(v,H)\geqslant 2(k-1)+1$. 即存在 $C_i\in H$, 使得 $d(u_1,C_i)+d(v,C_i)\geqslant 3$. 结合引理 2.1 和 2.3 及 (1) 和 (4) 式, $G[V(C_i)\cup\{u_1,v\}]$ 包含一个 4-圈 C_i' 和边 e', 使得 C_i' 和 e' 是相互独立的, 并且 u_1 和 v 中刚好有一个是 e' 的端点. 不妨令 $u_1\in V(C_i')$, v 是 e' 的一个端点. 记 $e'=vz$, 其中 $z\in V(C_i)$. 令 $H'=H-V(C_i)\cup V(C_i')$ 以及 $D_0'=D_0-u_1+z$. 如果 $zy_2\in E$, 则 D_0' 包含一条顶点数为 $q+1$ 的路 $Q'=vzy_2\cdots y_q$, 和 (4) 式矛盾, 因此, $zy_2\notin E$. 类似地, $zy_{q-1}\notin E$. 这样, 我们有 $d(y_2,D_0')=d(y_2,D_0)-1$ 并且 $d(y_{q-1},D_0')\leqslant d(y_{q-1},D_0)$, 和 (5) 式矛盾, 此时 (1)–(4) 式仍然成立. 断言证毕.

下列断言 3 的证明和断言 2 中的情形 2 类似.

断言 3 如果 p 是满足条件 $3\leqslant p\leqslant d-2$ 的奇数, 则 $d(x_{p-1},D)=2$.

证明 假定 $d(x_{p-1},D)\geqslant 3$. 令 u 为 D 中不在路 P 上的端点, 使得 $ux_{p-1}\in E$ 并且 $D-V(P)\cup\{u\}$ 的二部划分 (A,B) 满足 $A\cup\{x_p\}\subseteq V_a$, $B\subseteq V_b$. 通过类似于断言 2 中情形 2 的讨论, 我们可以证明 $|B|\geqslant |A|+1$ 并且存在 $v\in B$, 使得 $d(u,C_i)+d(v,C_i)\geqslant 3$. 进一步, $G[V(C_i)\cup\{u,v\}]$ 包含一个 4-圈 C_i' 和边 e', 使得 C_i' 与 e' 相互独立, 并且有 $u\in V(C_i')$ 以及 $e'=vz$, 这里 $z\in V(C_i)$. 记 $H'=H-V(C_i)\cup V(C_i')$, $D'=D-u+z$. 则很容易得到 $d(x_{p-1},D')=d(x_{p-1},D)-1$. 这就和 (3) 式矛盾, 断言证毕.

断言 4 如果存在 $v_1\in V_1\cap D_0$ 以及 $v_2\in V_2\cap D_0$, 则 $q\geqslant 2$.

证明 否则, 设 $q=1$. 因为 D 是无圈图, 所以 $d(v_1,P)+d(v_2,P)\leqslant 2$, 从而 $d(v_1,H)+d(v_2,H)\geqslant 2(k-1)+2$, 即存在 $C_i\in H$, 使得 $d(v_1,C_i)+d(v_2,C_i)\geqslant 3$. 由引理 2.1 和 (1) 式,

$l(C_i)=4$. 由引理 2.3, $G[V(C_i)\cup\{v_1,v_2\}]$ 包含 4-圈 C_i' 和边 e, 使得他们是相互独立的. 如果用 C_i' 替换 C_i, 则 D_0 包含一条边, 此时 P 仍然是一条最长的路, 矛盾. 断言证毕.

断言 5 $p\geqslant d-2$ 并且如果等号成立, 则 $q=1$.

证明 若不然, 假设 $p\leqslant d-2$ 并且如果等号成立, 则 $q=2$. 考虑下面两种情形:

情形 1 p 是偶数.

因为 $p\leqslant d-2$ 并且 p 是偶数, 所以存在 $v_1\in V_1\cap D_0$ 和 $v_2\in V_2\cap D_0$. 由断言 4, $q\geqslant 2$. 令 $R=\{x_1,x_p,y_1,y_2\}$, 则 $\sum_{z\in R}d(z,D)\leqslant 7$. 由断言 2 和 (2) 式, 得到 $d(y_1,D_0)+d(y_2,D_0)\leqslant 4$ 以及 $d(x_1,D)+d(x_p,D)=2$. 注意到 D 是无圈图, 故有 $e(P,Q)\leqslant 1$. 于是 $\sum_{z\in R}d(z,H)\geqslant 4(k-1)+1$. 即存在 $C_i\in H$, 使得 $\sum_{z\in R}d(z,C_i)\geqslant 5$. 由引理 2.1 和 (1) 式, $l(C_i)=4$. 令 $C_i=u_1u_2u_3u_4u_1$. 不失一般性, 假定 $\{u_1,x_1,y_1\}\subseteq V_a$ 以及 $d(x_1,C_i)+d(y_2,C_i)\geqslant 3$, 这里 $a\in\{1,2\}$. 由引理 2.3 和 (2) 式, 有 $d(x_1,C_i)=2$ 以及 $d(y_2,C_i)=1$, 记 $e=y_2u_1$ 以及 $C_i'=C_i-u_1+x_1$, 从而 $d(x_p,C_i)+d(y_1,C_i)\geqslant 2$. 不妨设 $d(y_1,C_i)\geqslant 1$, 否则 $d(x_p,C_i)=2$, 则存在一条顶点数为 $p+2$ 的路 $P'=x_2\cdots x_pu_1y_2y_1$, 使得 P' 和 C_i' 是相互独立的, 和 (2) 式矛盾. 设 $y_1u_2\in E$. 如果用 $C_i''=u_1u_2y_1y_2u_1$ 替换 C_i, 则得到一条点数为 $p+2$ 的路 $P'=u_3u_4x_1\cdots x_p$, 和 (2) 式又一次矛盾. 情形 1 证毕.

情形 2 p 是奇数.

情形 2.1 $q=2$.

令 $Q=y_1y_2$, 其中 $y_1\in V_a$. 由断言 3, $d(x_{p-1},D)=2$. 注意到 D 是无圈图并且 $q=2$, 易得 $d(y_1,D)+2d(y_2,D)\leqslant 5$. 由此 $e(\{x_1,x_p,x_{p-1},y_1\},H)+2d(y_2,H)\geqslant 6(k+1)-9=6(k-1)+3$. 即存在 $C_i\in H$, 使得 $e(\{x_1,x_p,x_{p-1},y_1\},C_i)+2d(y_2,C_i)\geqslant 7$. 由引理 2.1 和 (1) 式, $l(C_i)=4$. 由引理 2.5, $G[V(P\cup Q\cup C_i)]$ 包含一个 4-圈 C_i' 和一条路 P' 使得 P' 和 C_i' 是相互独立的并且 $l(P')>l(P)$. 用 C_i' 替换 C_i, 我们得到一条更长的路, 和 (2) 式矛盾.

情形 2.2 $q\geqslant 3$.

首先证明如果 $q=3$, 则可以选择 Q, 使得 y_1 和 x_1 在不同的二部划分中. 假定 $\{x_1,y_1\}\subseteq V_a$, 其中 $a\in\{1,2\}$. 令 $D_1=D_0-V(Q)$ 的二部划分 (A,B) 满足 $A\subseteq V_a$ 以及 $B\subseteq V_b$, 这里 $\{a,b\}=\{1,2\}$. 注意到 p 和 q 都是奇数以及 $n_1-n_2\leqslant 1$, 于是 $|B|\geqslant|A|+1$. 我们断言 D_0 包含两条相互独立的边. 若不然, 令 $v\in B$ 为 D_1 中的惟一点, 则 $d(v,D)+d(y_3,D)\leqslant 3$, 从而 $d(v,H)+d(y_3,H)\geqslant 2(k-1)+1$, 即存在 $C_i\in H$, 使得 $d(v,C_i)+d(y_3,C_i)\geqslant 3$. 结合引理 2.1 和 2.3 及 (1) 和 (4) 式, 我们得到 $l(C_i)=4$, $d(v,C_i)=1$ 以及 $d(y_3,C_i)=2$. 取 $z\in V(C)$, 使得 $zv\in E$. 如果用 $C_i'=C_i-z+y_3$ 替换 C_i, 则 D_0 中包含两条相互独立的边 y_1y_2,vz. 依据 Q 的极大性, $e(y_1y_2,vz)=0$. 因而 $e(\{y_1y_2,zv\},H)\geqslant 4(k-1)+2$, 即存在 $C_j\in H$, 使得 $e(\{y_1y_2,zv\},C_j)\geqslant 5$. 由引理 2.1 和 2.7, $G[V(C_j\cup D_0)]$ 包含一个 4-圈 C_j' 和一条顶点数为 4 的路, 使得它们相互独立, 和 (4) 式矛盾, 因此如果 $q=3$, 则可以选择 Q, 使得 $\{x_1,y_1\}\subseteq V_a$, 其中 $a\in\{1,2\}$.

为方便起见, 假定 $x_1\in V_a$. 令 $T=\{x_1,x_{p-1},x_p,z_1,z_2,z_3\}$, 其中, z_1,z_2,z_3 是 D_0 中的点, 其选取规则如下: $z_1\in V_a$, $\{z_2,z_3\}\subseteq V_b$, 使得 $\{z_1,z_2\}=\{y_1,y_2\}$, $z_3\in\{y_{q-1},y_q\}$. 结合断言 2 和 3, 以及 (2) 和 (4) 式, 则 $\sum_{u\in T}d(u,D)\leqslant 11$. 依据断言 3, 显然 $x_1z_1\notin E,x_pz_3\notin E$ 并且 $x_{p-1}z_2\notin E$. 注意到 G 的度和条件, 我们得到 $\sum_{u\in T}d(u,H)\geqslant 6(k+1)-11=6(k-1)+1$,

从而

$$存在某个\ C_i \in H, 使得 \quad \sum_{u \in T} d(u, C_i) \geqslant 7. \tag{6}$$

由引理 2.1 和 (1) 式, $l(C_i) = 4$. 令 $C_i = u_1u_2u_3u_4u_1$, 其中 $u_1 \in V_a$. 如果 $d(z_2, C_i) = 2$ 或者 $d(z_3, C_i) = 2$, 易见 $d(x_1, C_i) + d(x_p, C_i) \geqslant 1$, 或者 $d(x_1, C_i) + d(x_p, C_i) = 0$ (这两种情形下, 都有 $d(x_{p-1}, C_i) + d(z_1, C_i) + d(z_3, C_i) \geqslant 5$), 于是, $G[V(C_i \cup P) \cup \{z_1, z_2, z_3\}]$ 包含一个 4-圈 C' 和一条路 P', 使得 C' 和 P' 是相互独立的, 并且 P' 比 P 长, 和 (2) 式矛盾. 由此, $d(z_2, C_i) \leqslant 1$ 并且 $d(z_3, C_i) \leqslant 1$. 先考虑情形 $d(z_1, C_i) = 0$. 由 (6) 式得到 $d(x_1, C_i) + d(x_p, C_i) \geqslant 3$, 则存在 $V(C_i) \cap V_b$ 中的点, 不妨设为 u, 使得 $\{x_1u, x_pu\} \subseteq E$. 注意到 $C' = uPu$ 是一个圈, 这样 $G[V(C_i \cup Q) - u]$ 即为无圈图. 因此, $d(x_1, C_i) = d(x_{p-1}, C_i) = d(x_p, C_i) = 2$, 并且存在 $j \in \{2, 3\}$, 使得 $d(z_j, C_i) = 1$, 不妨设为 $z_ju_1 \in E$. 于是 $G[V(C_i \cup P \cup Q)]$ 包含一个 4-圈 $C' = x_{p-1}x_pu_4u_3x_{p-1}$ 和一条顶点数为 $p+1$ 的路 $P' = z_ju_1u_2x_1 \cdots x_{p-2}$, 使得 P' 和 C' 是相互独立的, 和 (2) 式矛盾.

下面考虑情形 $d(z_1, C_i) \geqslant 1$. 不妨设 $d(z_2, C_i) = 0$. 若不然, $d(z_2, C_i) = 1$. 令 $\{u_1z_2, u_2z_1\} \subseteq E$. 则 $C' = u_1u_2z_1z_2u_1$ 是一个 4-圈. 由 P 的极大性, $e(\{x_1, x_{p-1}, x_p\}, \{u_3, u_4\}) = 0$. 由 (6) 式, 对于任意的 $u \in T - \{z_1\}$, $d(u, C_i) = 1$ 并且 $d(z_1, C_i) = 2$, 故 $G[V(C_i \cup P \cup Q)]$ 包含两个相互独立的圈 C' 和 u_2Pu_2, 与 m 的极大性矛盾.

假定 $d(z_3, C_i) = 0$, 即 $\{x_1, x_{p-1}, x_p, z_1\}$ 中存在惟一的点, 不妨设为 u^*, 使得 $d(u^*, C_i) \geqslant 1$ 并且对于所有的 $u \in \{x_1, x_{p-1}, x_p, z_1\} - \{u^*\}$, $d(u, C_i) = 2$. 于是 $\{u_iz_1, u_ix_1, u_jx_p\} \subseteq E$ 并且 $x_{p-1}u_h \in E$, 其中 $\{i, j\} = \{2, 4\}$, $h \in \{1, 3\}$, 从而 $G[V(C_i \cup P \cup Q)]$ 包含 $C' = x_{p-1}x_pu_ju_hx_{p-1}$ 和一条顶点数为 $p+1$ 的 $P' = z_2z_1u_ix_1 \cdots x_{p-2}$, 使得 C' 和 P' 是相互独立的, 和 (2) 式矛盾. 因此 $d(z_3, C_i) = 1$. 不失一般性, 不妨设 $\{u_1z_3, u_2z_1\} \subseteq E$. 注意到 $G[V(Q) \cup \{u_1, u_2\}]$ 包含一个圈, 则 $G[V(P) \cup \{u_3, u_4\}]$ 是无圈图, 于是 $e(\{x_1, x_{p-1}, x_p\}, \{u_3, u_4\}) \leqslant 1$. 又因 $d(z_1, C_i) + d(z_3, C_i) \leqslant 3$, 故 $d(x_1, C_i) + d(x_{p-1}, C_i) + d(x_p, C_i) = 4$. 于是 $d(z_1, C_i) = 2$ 并且 $x_{p-1}u_1 \in E$. 因为 4-圈 $z_1u_2u_3u_4z_1$ 和顶点数为 $p+1$ 的路 $x_1 \cdots x_{p-1}u_1z_3$ 是相互独立的, 和 (2) 式矛盾. 断言证毕.

我们用上述的几个断言来完成定理 1.4 的证明. 首先考虑情形 $p = d-2$ 并且 $q = 1$. 根据假设, 此时 $p = d-2$, $n_1 - n_2 = 1$ 并且由断言 4, D_0 包含两个孤立的点 $\{y_1, v\} \subseteq V_b$. 不失一般性, 设 $x_1 \in V_1$. 由于 $y_1x_p \notin E(G)$ 并且 $d(y_1, P) \leqslant 1$, 则 $d(y_1, H) + d(x_p, H) \geqslant 2(k+1) - 2 = 2(k-1) + 2$, 即存在 $C_i \in H$, 不妨设为 C_1, 使得 $d(y_1, C_1) + d(x_p, C_1) \geqslant 3$. 结合引理 2.1 和 (1) 式, $l(C_1) = 4$. 由引理 2.3 和 (2) 式, $d(y_1, C_1) = 1$, $d(x_p, C_1) = 2$. 设 $y \in V(C_1)$, 使得 $C_1^* = C_1 - y + x_p$ 为一个 4-圈并且 $y_1y \in E$. 令 $H_1 = H - V(C_1)$. 由 P 的极大性, $d(v, C_1 \cup D) + d(x_1, C_1 \cup D) \leqslant 5$, 从而 $d(v, H_1) + d(x_1, H_1) \geqslant 2(k-2) + 1$, 则存在 $C_j \in H_1$, 不妨设为 C_2, 使得 $d(v, C_2) + d(x_1, C_2) \geqslant 3$. 结合引理 2.1 和 2.3 及 (1) 和 (2) 式, $l(C_2) = 4$, $d(v, C_2) = 1$ 并且 $d(x_1, C_2) = 2$. 选择 $v' \in V(C_2)$, 使得 $C_2^* = C_2 - v' + x_1$ 是 4-圈并且 $vv' \in E(G)$. 根据 D 的顶点数, 分别考虑情形 $d = 7$ 和 $d \geqslant 9$.

若 $d = 7$, 则 $p = 5$. 记 $H' = (H - C_1 \cup C_2) \cup C_1^* \cup C_2^*$, $D' = G - V(H')$, $P' = P - x_1 - x_p$ 以及 $D_0' = \{v'v, yy_1\}$. 不妨设 D_0' 导出一条顶点数为 4 的路 Q'. 若不然, 注意到 D' 是无圈图, 则 $\sum_{z \in D_0'} d(z, D') \leqslant 6$. 由此 $e(D_0', H') \geqslant 4(k-1) + 2$, 即存在 $C_t \in H'$, 使得 $e(D_0', C_t) \geqslant 5$.

由引理 2.1 和 2.7 以及 (1) 式, C_t 是一个 4-圈并且 $G[V(C_t \cup D_0')]$ 包含一个 4-圈 C_t' 和一条顶点数为 4 的路, 使得它们是相互独立的. 不失一般性设 $Q' = yy_1v'v$. 令 $S = \{x_2, x_4, y, v'\}$, 通过类似的讨论, 可以证明存在某个 $C_t \in H$, 使得 $e(S, C_t) \geqslant 5$. 由引理 2.1 和 2.6 及 (1) 式, $G[V(C_t \cup P' \cup Q')]$ 包含一个 4-圈 C^* 和一条顶点数为 6 的路 P^*, 使得 P^* 和 C^* 是相互独立的. 用 C^* 替换 C_t, 则得到和 P 的极大性相矛盾的结论.

因此 $d \geqslant 9$ 并且 $p \geqslant 7$. 由于 D 是无圈图并且 p 是奇数, $P - x_p$ 中包含 $(p-1)/2$ 对不相邻的点. 我们要证 $\sum_{z \in V(P-x_p)} d(z, D) = 2p-1$. 如果存在 $C_i \in H$, 使得 $e(P - x_p, C_i) \geqslant p$. 注意到 $p-1 \geqslant 6$, 由引理 2.1 和 (1) 式, $l(C_i) = 4$. 从而由引理 2.8 得到 $G[V(P-x_p) \cup V(C_i)]$ 包含两个相互独立的圈, 这就和 m 的极大性矛盾, 因此对于每一个 $C_i \in H$, $e(P - x_p, C_i) \leqslant p-1$. 于是

$$(p-1)(k+1) - \sum_{z \in V(P-x_p)} d(z, D) \leqslant e(P - x_p, H) \leqslant (p-1)(k-1),$$

由上式得到, $\sum_{z \in V(P-x_p)} d(z, D) \geqslant 2p-2$ 并且如果等号成立, 则对于每一个 $C_i \in H$ 都有 $e(P - x_p, C_i) = p-1$. 注意到 $d(x_p, C_1) = 2$, 于是 $e(P, C_i) = p+1$. 经过和上面类似的讨论可知, $G[V(P \cup C_i)]$ 包含两个相互独立的圈, 矛盾, 因此, $\sum_{z \in V(P-x_p)} d(z, D) \geqslant 2p-1$. 由于 D 是无圈图并且 $p = d-2$, 所以 $\sum_{z \in V(P-x_p)} d(z, D) = 2p-1$.

在这种情形下, 存在 $x_s, x_t \in V(P-x_p) \cap V_1$ (有可能 $x_s = x_t$), 使得 $e(\{x_s, x_t\}, \{y_1, v\}) = 2$. 由于 D 是无圈图, 故 $P + v$ 包含 $(p+1)/2$ 对不相邻的点. 于是

$$e(P+v, H) \geqslant (p+1)(k+1) - (2p+1) = (p+1)(k-1) + 1.$$

即存在 $C_i \in H$, 使得 $e(P+v, C_i) \geqslant p+2$. 由引理 2.8 和 P 的极大性, 不妨设 $e(P, C_i) = p$, $d(v, C_i) = 2$ 并且 $d(x_1, C_i) = d(x_p, C_i) = 0$. 令 $P_1 = x_1 \cdots x_s$ 并且 $P_2 = x_s \cdots x_p$. 由对称性假定 $s - 1 \geqslant p - s$, 亦即 P_1 不会比 P_2 短. 注意到 $e(P, C_i) = p$ 以及 $d(v, C_i) = 2$, 由引理 2.8, 不妨设 $e(P_1, C_i) \leqslant |P_1| - 1$, $e(P_2, C_i) \geqslant |P_2| + 1$ 以及 $|P_2| \leqslant 4$, $x_s = x_t$. 否则 $G[V(P_j + v) \cup V(C_i)]$ 包含两个相互独立的圈, 这里 $j \in \{1, 2\}$. 由于 $x_s \in V_1$, $|P_2| = 3$, 设 $P_2 = x_s x_{s+1} x_p$. 由 $d(x_p, C_i) = 0$ 得到 $d(x_s, C_i) = d(x_{s+1}, C_i) = 2$ 以及 $e(P_1, C_i) = |P_1| - 1$. 注意到对于每一个 $z \in V(C_i)$, $G[\{x_s, x_{s+1}, v, z\}]$ 包含 4-圈, 不妨设 $d(z, P_1 - x_s) \leqslant 1$. 令 $C_i = a_1 b_1 a_2 b_2 a_1$, 因为 $G[\{x_s, v, a_i, b_i\}]$ 包含 4-圈 $(i = 1, 2)$, 所以 $e(C_i, P_1 - x_s) \leqslant 2$, 从而由 $e(P_1, C_i) = |P_1| - 1$ 以及 $p \geqslant 7$ 得到 $|P_1| = 5$.

令 $P' = x_1 \cdots x_5 y_1$, 则 $e(P', H) \geqslant 6(k+1) - 12 = 6(k-1)$. 由引理 2.1 和 2.8 及 (1) 式, 不妨设对于任意的 $C_i \in H$, $e(P', C_i) = 6$. 特别地, $e(P'+v, C_2) = 7$ 以及 $d(x_1, C_2) = 2$. 令 $C_2 = u_1 u_2 u_3 u_4 u_1$ 并且 $vu_3 \in E$. 注意到对 $i = 1, 3$, $C_2 - u_i + x_1$ 包含 4-圈, 不妨设 $e(\{u_1, u_3\}, P') \leqslant 1$, 从而 $e(\{u_2, u_4\}, \{x_3, x_5\}) \geqslant 3$. 设 $d(u_4, \{x_3, x_5\}) = 2$, 从而 $G[V(P' \cup C_2) \cup \{v\}]$ 包含两个相互独立的圈 $u_4 x_3 x_4 x_5 u_4$ 和 $x_1 u_2 u_3 x_2 x_1$, 与 m 的极大性矛盾.

最后证明情形 $p \geqslant d-1$ 下定理仍然成立. 由断言 1 和 5, $p \geqslant 5$. 首先考虑 $p \geqslant 6$ 的情形. 定义

$$t = \begin{cases} p, & \text{如果 } p \text{ 是偶数}, \\ p-1, & \text{否则}. \end{cases}$$

显然, D 中存在 t 对不相邻的点并且 $\sum_{i=1}^{t} d(x_i, D) \leqslant 2t$, 因而,

$$\sum_{i=1}^{t} d(x_i, H) \geqslant t(k+1) - 2t = t(k-1).$$

类似于情形 $p = d-2$ 中的讨论, 不妨设对于任意 $C_j \in H$, $\sum_{i=1}^{t} d(x_i, C_j) = p$ 并且 $\sum_{i=1}^{t} d(x_i, D) = 2t$. 在这种情形下, $p = d-1$, p 是偶数并且刚好有一个点 $x_s \in V(P) \cap V_1$, 使得 $d(x_s, D-P) = 1$. 令 $v \in D-P$. 不失一般性, 设 $x_1 \cdots x_s$ 为 P 的一条子路, 其长度不小于 $x_s \cdots x_p$. 于是, $P' = x_1 \cdots x_s v$ 是一条顶点数至少为 6 的路且 $|P'|$ 为偶数, 使得 $\sum_{z \in V(P')} d(z, D) \leqslant 2|V(P')| - 1$, 从而 $\sum_{z \in V(P')} d(z, H) \geqslant |V(P')|(k-1) + 1$, 继续和上面类似的讨论, 我们可以完成情形 $p \geqslant 6$ 时的证明, 这里不再赘述.

因而, 由断言 1 和 5 得到 $p \leqslant 5$, 从而 $p = 5$ 以及 $d = 6$. 令 $v \in V(D) - V(P)$. 与前面的证明一样, 不妨设存在 4-圈 $C_i \in H$, 使得 $d(x_1, C_i) = 2$, $d(v, C_i) = 1$. 取 $u \in V(C_i)$, 使得 $C_i' = C_i - u + x_1$ 并且 $uv \in E$. 令 $H_1 = H - V(C_i)$, 可以证明存在另一个 4-圈 $C_j \in H_1$, 使得 $d(v, C_j) = 1$ 并且 $d(x_5, C_j) = 2$. 类似地, 选择 $w \in V(C_j)$, 使得 $C_j' = C_j - w + x_5$ 是一个 4-圈并且 $wv \in E$. 令 $H' = H - V(C_i \cup C_j) \cup V(C_i' \cup C_j')$, $D' = G - V(H')$, $T = \{x_2, x_4, u, w\}$. 则 $\sum_{z \in T} d(z, H') \geqslant 4(k-1) + 4$. 通过类似于情形 $p = d-2$ 中的讨论, 可以看到存在 4-圈 $C^* \in H'$, 使得 $G[V(C^* \cup D')]$ 包含一个 4-圈 C^{**} 和一条顶点数为 6 的路 P^*, 使得 C^{**} 和 P^* 是相互独立的, 这就和 P 的极大性矛盾. 定理 1.4 证毕.

致谢 作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. 2nd ed. New York: Springer, 2008

2 Corrádi K, Hajnal A. On the maximal number of independent circuits in a graph. *Acta Math Acad Sci Hung*, **14**: 423–439 (1963)

3 Wang H. On the maximum number of independent cycles in a bipartite graph. *J Comb Theory Ser B*, **67**: 152–164 (1996)

4 Enomoto H. Graph partition problems into cycles and paths. *Discrete Math*, **233**: 93–101 (2001)

5 Wang H. Large vertex-disjoint cycles in a bipartite graph. *Graphs Comb*, **16**: 359–366 (2000)

6 Wang H. Proof of a conjecture on cycles in a bipartite graph. *J Graph Theory*, **31**: 333–343 (1999)

7 Wang H. On 2-factors of a bipartite graph. *J Graph Theory*, **31**: 101–106 (1999)

8 Li X, Wei B, Yang F. Independent cycles in a bipartite graph. *Ars Combinatoria*, **73**: 173–186 (2004)