中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 3 期: 344～356
www.scichina.com math.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

非线性中立型延迟积分微分方程单支方法的收敛性

王晚生 ①*, 李寿佛 ②

① 长沙理工大学数学与计算科学学院, 长沙 410004
② 湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭 411105
* E-mail: w.s.wang@163.com

收稿日期: 2008-01-17; 接受日期: 2008-10-27
国家自然科学基金 (批准号: 10871164)、湖南省自然科学基金 (批准号: 08JJ6002) 和长沙理工大学科学研究基金资助项目

摘要 获得了求解非线性中立型延迟积分微分方程单支方法的收敛性结果. 证明了当且仅当相应的常微分方程方法是 A- 稳定的且经典相容阶为 p $(p=1,2)$ 时, 单支方法是 p 阶 E (或 EB)- 收敛的. 数值实验结果验证了所获理论的正确性.

关键词 非线性中立型延迟积分微分方程 收敛性 单支方法

MSC(2000) 主题分类 65R20, 65L05, 65L20, 34K40

1 引言

泛函微分方程 (FDEs) 广泛出现于物理学、生物学、控制理论等领域 (例见文献 [1,2]), 由于其理论解一般难以获得, 只能用数值方法进行计算, 因而其算法理论的研究具有毋庸置疑的重要性. 近年来, 众多学者对各种类型的泛函微分方程, 如延迟微分方程 (DDEs)、延迟积分微分方程 (DIDEs)、中立型延迟微分方程 (NDDEs) 等的算法理论进行了深入研究, 取得了大量研究成果 (例见文献 [3–15]). 但对于中立型延迟积分微分方程 (NDIDEs), 迄今仅有少量文献研究了数值方法的稳定性和收敛性 (见文献 [16–23]), 基于单边 Lipschitz 条件数值方法的收敛性文献尚未见到. 本文基于单边 Lipschitz 条件对单支方法求解中立型延迟积分微分方程的收敛性进行了分析, 证明了当且仅当相应的常微分方程方法是 A- 稳定的且经典相容阶为 p $(p=1,2)$ 单支方法是 p 阶 E (或 EB)- 收敛的. 最后的数值实验结果验证了所获理论的正确性.

2 求解 NDIDEs 的单支方法

考虑非线性 NDIDEs,

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y(t), y(t-\tau), \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} K(t,s,y(s),y'(s))ds\right), \quad t\in[0,T], \\ y(t) \ = \phi(t), \quad t\in[-\tau,0], \end{cases} \tag{2.1}$$

引用格式: 王晚生, 李寿佛. 非线性中立型延迟积分微分方程单支方法的收敛性. 中国科学 A, 2009, 39(3): 344–356
Wang W S, Li X F. Convergence of one-leg methods for nonlinear neutral delay integro-differential equations. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0032-8

这里 $\tau > 0$ 及 $T > 0$ 是给定的常数, ϕ 是给定的充分光滑的初始函数, $f: [0,T] \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ 及 $K: [0,T] \times [-\tau, T] \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ 是给定的连续映射, 并假定 f 和 K 满足

$$\Re e\langle f(t,y_1,u,v) - f(t,y_2,u,v), y_1 - y_2\rangle \leqslant \alpha\|y_1 - y_2\|^2, \tag{2.2}$$

$$\|f(t,y,u_1,v_1) - f(t,y,u_2,v_2)\| \leqslant \beta\|u_1 - u_2\| + \gamma\|v_1 - v_2\|, \tag{2.3}$$

$$\|K(t,s,y_1,f(s,y_1,u,v)) - K(t,s,y_2,f(s,y_2,u,v))\| \leqslant L_K\|y_1 - y_2\|, \quad (t,s) \in \mathbb{D}, \tag{2.4}$$

$$\|K(t,s,y,u_1) - K(t,s,y,u_2)\| \leqslant \mu\|u_1 - u_2\|, \quad (t,s) \in \mathbb{D}, \tag{2.5}$$

这里 $t \in [0,T]$, $\mathbb{D} = \{(t,s): t \in [0,T], s \in [t-\tau, t]\}$, $y, y_1, y_2, u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in \mathbb{C}^N$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为空间 $\mathbb{C}^N$ 中的内积, $\|\cdot\|$ 是由该内积导出的范数.

为简单计, 用符号 $\mathscr{D}(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ L_K,\ \mu)$ 表示由一切满足条件 (2.2)–(2.5) 的初值问题 (2.1) 所构成的问题类. 用符号 $\mathscr{L}(\alpha,\beta,\gamma,L_y,L_\mu,\mu)$ 表示由一切满足条件 (2.2), (2.3), (2.5) 及

$$\|f(t,y_1,u,v) - f(t,y_2,u,v)\| \leqslant L_y\|y_1 - y_2\|, \quad t \in [0,+\infty), \quad \forall\, y_1, y_2, u, v \in \mathbb{C}^N, \tag{2.6}$$

$$\|K(t,s,y_1,u) - K(t,s,y_2,u)\| \leqslant L_\mu\|y_1 - y_2\|, \quad (t,s) \in \mathbb{D}, \quad \forall\, y, y_1, y_2, u, u \in \mathbb{C}^N \tag{2.7}$$

的初值问题 (2.1) 所构成的问题类.

注 2.1 当问题 (2.1) 右端函数不含积分项时, 也即退化为 DDEs 初值问题, 问题类 $\mathscr{D}(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ L_K,\ \mu)$ 与问题类 $\mathscr{L}(\alpha,\beta,\gamma,L_y,L_\mu,\mu)$ 一致, 并正是已被广泛用作关于 DDEs 数值方法的非线性稳定性和收敛性的试验问题类 $D_{\alpha,\beta}$ (例见文献 [7,24,25]). Torelli[3] 首次利用一个单边 Lipschitz 条件 (2.2) 和一些经典 Lipschitz 条件研究了非线性 DDEs 的数值稳定性. 其后, 许多研究者讨论了数值方法求解非线性 DDEs 的收敛性 (例见文献 [24–26] 及其中的参考文献).

注 2.2 当问题 (2.1) 右端函数不含导数项时, 问题退化为 DIDEs 的初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y(t), y(t-\tau), \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} K(t,s,y(s))ds\right), & t \in [0,T], \\ y(t) \ = \phi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{2.8}$$

此时, 问题类 $\mathscr{D}(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ L_K,\ \mu)$ 与问题类 $\mathscr{L}(\alpha,\beta,\gamma,L_y,L_\mu,\mu)$ 一致, 并正是已被 Zhang 和 Vandewalle[11] 作为 DIDEs 试验问题类所研究的问题类 $\mathbb{RI}(\alpha,\beta,\gamma,L_K)$. 在文献 [21] 中, Brunner 系统地研究了配置方法求解问题 (2.8) 的收敛性. Zhang 和 Vandewalle 在文献 [11,12] 中分别讨论了求解问题 (2.8) 的 Runge-Kutta 法的稳定性和一般线性方法的稳定性和收敛性. 李寿佛在文献 [8,9] 中分别研究了求解更加一般的 FDEs 的 Runge-Kutta 法和一般线性方法的稳定性和收敛性.

注 2.3 在文献 [19] 中, 直接基于条件 (2.5)–(2.7) 及 $\tau\mu < 1$, Enright 和 Hu 研究了连续 Runge-Kutta 方法求解方程

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) + \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} K(t,s,y(s),y'(s))ds, & t \in [0,T], \\ y(t) \ = \phi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{2.9}$$

的收敛性. 求解方程 (2.9) 的配置方法的收敛性已在 Brunner 的专著 [21] 中详细论述. 对于包含方程 (2.9) 的更加一般的中立型泛函微分方程 (NFDEs), Jackiewicz 在 f 关于第二个变量也满足经典 Lipschitz 条件的情况下给出了一些数值方法的收敛性结果 (例见文献 [16,17]).

将求解常微分方程 (ODEs) 初值问题的 k 步单支方法

$$\rho(E)y_n = hf(\sigma(E)t_n, \sigma(E)y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.10}$$

用于求解 NDIDEs 初值问题 (2.1), 得

$$\begin{cases} \rho(E)y_n = hf(\sigma(E)t_n, \sigma(E)y_n, \sigma(E)y_{n-m}, K_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ K_n = h\sum\limits_{j=0}^{m} \nu_j K(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_{n-j}, \sigma(E)y_{n-j}, \tilde{y}_{n-j}), \\ \tilde{y}_{n-j} = f(\sigma(E)t_{n-j}, \sigma(E)y_{n-j}, \sigma(E)y_{n-m-j}, K_{n-j}), \quad \sigma(E)t_{n-j} > 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

这里 $h = \tau/m > 0$ 是积分步长, m 是任一给定的正整数, $t_n = nh$, E 是位移算子: $Ey_n = y_{n+1}$, $\rho(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j$ 和 $\sigma(x) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j x^j$ 是生成多项式, 系数为实数且没有公因子, 并设 $\rho(1) = 0$, $\rho'(1) = \sigma(1) = 1$, y_n 和 $\tilde{y}_{n-j}$ 分别是 $y(t_n)$ 和 $y'(\sigma(E)t_n - jh)$ 的逼近, $-m \leqslant n \leqslant 0$ 时, $y_n = \phi(t_n)$, 当 $-\tau \leqslant \sigma(E)t_n - jh \leqslant 0$ 时, $\tilde{y}_{n-j} = \phi'(\sigma(E)t_n - jh)$, K_n 是 $\int_{\sigma(E)t_n-\tau}^{\sigma(E)t_n} K(t, s, y(s), y'(s))ds$ 的逼近, 其由某种复合求积公式得到. 本文采用复合梯形求积公式来计算 K_n, 即

$$\begin{aligned} K_n = h\Bigg[&\frac{1}{2}K(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_n, \sigma(E)y_n, \tilde{y}_n) + \sum_{j=1}^{m-1} K(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_n - jh, \sigma(E)y_{n-j}, \tilde{y}_{n-j}) \\ &+\frac{1}{2}K(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_n - \tau, \sigma(E)y_{n-m}, \tilde{y}_{n-m})\Bigg]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

不失一般性, 我们也假定 $\alpha_k \geqslant 0$. 对任意给定的 $k \times k$ 实对称正定矩阵 $G = [g_{ij}]$, 范数 $\|\cdot\|_G$ 定义为

$$\|U\|_G = \left(\sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}\langle u_i, u_j\rangle\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, U = [u_1, u_2, \ldots, u_k] \in \mathbb{C}^{Nk}.$$

3 收敛性分析

在研究中立型延迟积分微分方程的收敛性时, 我们总设问题 (2.1) 中 f, K 及 ϕ 在其定义域为 C^q- 函数, 其中 $q \geqslant 2$. 为了记号的方便, 我们也假定 $T = (M+1)\tau$, 其中 $M \geqslant 1$. 如此, 使用 Brunner 和 Zhang 在文献 [27] (也可参见文献 [21]) 中的技巧, 容易证明:

1. 初值问题 (2.1) 的解 $y(t)$ 在每一个左开区间 $I_i := (i\tau, (i+1)\tau]$, $(i = 0, 1, \ldots, M)$ 上 $(q+1)$ 次连续可微, 且在 $[0, T]$ 上存在有界的一阶导数.

2. 在由 $\xi_i = i\tau$ $(i = 0, 1, \ldots, \min\{q, M\})$ 定义的基本不连续点 $\{\xi_i\}$ 处, 有

$$\lim_{t\to\xi_i^-} y^{(i)}(t) = \lim_{t\to\xi_i^+} y^{(i)}(t),$$

而其 $(i+1)$ 阶导数一般在 $t = \xi_i$ 处不连续. 若 $\min\{q, M\} = q < M$, 则解在 $[\xi_q, T]$ 上具有连续的 $(q+1)$ 阶导数.

另一方面, 鉴于这约束网格, 即 $\tau = mh$, 其中 m 为正整数, 这些基本不连续点 $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}$ 都是网格节点. 因而, 在这些基本不连续点 $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}$ 处, 我们可以重新开始计算, 即用其他方法计算这些附加起始值 $y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{m+1}, \ldots, y_{m+k-1}, \ldots, y_{(q-1)m+1}, \ldots, y_{(q-1)m+k-1}$. 基于上述分析, 不失一般性, 我们总是假定初值问题 (2.1) 的解 $y(t)$ 在 $[0, T]$ 上

是 $(q+1)$ 次连续可微的, 并满足

$$\left\|\frac{d^i y(t)}{dt^i}\right\| \leqslant M_i, \quad i=1,2,\ldots,q+1. \tag{3.1}$$

对函数 $K(t,s,y(s),y'(s))$, 设其具有以下所需各阶偏导数, 并满足

$$\left\|\frac{\partial^i K(t,s,y(s),y'(s))}{\partial s^i}\right\| \leqslant N_i, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad -\tau\leqslant s\leqslant T. \tag{3.2}$$

如无特别说明, 下文中恒设 $\gamma\tau\mu<1$. 为研究方法 (2.11) 的收敛性, 首先给出下述定义.

定义 3.1 单支方法 (2.11) 称为是 p 阶 E- 收敛的, 如果该方法从起始值 $y_0,y_1,\ldots,y_{k-1}$ 出发按定步长 h 求解 $\mathscr{D}(\alpha,\beta,\gamma,L_K,\mu)$ 类初值问题 (2.1) 时, 所得到的逼近序列 $\{y_n\}$ 的整体误差有估计

$$\|y(t_n)-y_n\| \leqslant C(t_n)\Big(h^p+\max_{0\leqslant i\leqslant k-1}\|y(t_i)-y_i\|\Big), \quad n\geqslant k, \quad h\in(0,h_0], \tag{3.3}$$

这里误差函数 $C(t)$ 与最大容许步长 h_0 仅依赖于方法, 常数 $\alpha,\beta,\gamma,L_K,\mu,\tau$ 以及 M_i, N_i.

定义 3.2 单支方法 (2.11) 称为是 p 阶 EB- 收敛的, 如果该方法从起始值 $y_0,y_1,\ldots,y_{k-1}$ 出发按定步长 h 求解 $\mathscr{L}(\alpha,\beta,\gamma,L_y,L_\mu,\mu)$ 类初值问题 (2.1) 时, 所得到的逼近序列 $\{y_n\}$ 的整体误差有估计

$$\|y(t_n)-y_n\| \leqslant C(t_n)\Big(h^p+\max_{0\leqslant i\leqslant k-1}\|y(t_i)-y_i\|\Big), \quad n\geqslant k, h\in(0,h_0], \tag{3.4}$$

这里误差函数 $C(t)$ 与最大容许步长 h_0 仅依赖于方法, 常数 $\alpha,\beta,\gamma,\tau,\gamma\tau\mu L_y,L_\mu$ 以及 M_i, N_i.

ODEs 数值方法的 B- 收敛性是一个众所周知的概念, DDEs 数值方法的 D- 收敛性概念首先由张诚坚和周叔子在文献 [24] 中引进. 为不致混淆, 我们称求解 NDIDEs 甚至更一般的 NFDEs 的数值方法的收敛性为 E- 收敛性或 EB- 收敛性 (Extended B- 收敛性). 显然, 单支方法的 E (或 EB)- 收敛性蕴涵着方法的 B- 收敛性 (例见文献 [28]) 及方法的 D- 收敛性 (例见文献 [29]).

现考虑

$$\rho(E)\hat{y}_n+\alpha_k e_n = hf(\sigma(E)t_n,\sigma(E)\hat{y}_n+\beta_k e_n,\bar{y}_{n-m},\bar{K}_n), \quad n=0,1,\ldots, \tag{3.5}$$

这里

$$\hat{y}_n = y(t_n)+c_1h^2y''(t_n), \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\bar{K}_n = h\bigg[&\frac{1}{2}K(\sigma(E)t_n,\sigma(E)t_n,\sigma(E)\hat{y}_n+\beta_k e_n,\bar{Y}_n)+\sum_{j=1}^{m-1}K(\sigma(E)t_n,\sigma(E)t_{n-j},\bar{y}_{n-j},\bar{Y}_{n-j})\\ &+\frac{1}{2}K(\sigma(E)t_n,\sigma(E)t_{n-m},\bar{y}_{n-m},\bar{Y}_{n-m})\bigg],\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\bar{y}_i = y(\sigma(E)t_i), \quad i=0,1,2,\ldots,n-1, \tag{3.8}$$

$$\bar{Y}_i = \begin{cases} f(\sigma(E)t_n,\sigma(E)\hat{y}_n+\beta_k e_n,\bar{y}_{n-m},\bar{K}_n), & i=n,\\ y'(\sigma(E)t_i), \quad i=0,1,2,\ldots,n-1,\end{cases} \tag{3.9}$$

其中

$$c_1 = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\beta_j-\frac{\beta_k}{\alpha_k}\alpha_j\right)j^2-\frac{\beta_k}{\alpha_k}\sum_{j=0}^{k}j\beta_j+\frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{k}j\beta_j\right)^2.$$

由上可知, 对 $n \geqslant 0$, 当步长 h 满足一定条件时, e_n 由等式 (3.5) 唯一确定.

下面讨论方法 (2.11) 求解 $\mathscr{D}(\alpha,\beta,\gamma,\,L_K,\,\mu)$ 类问题的收敛性. 为方便计, 设本节出现的 h_i, d_i, c_i 依赖于方法, $\alpha,\ \beta,\ \gamma, L_K, \tau,\ \mu$ 和 $M_i,\ N_i$.

定理 3.1 若方法 (2.10) 是 A- 稳定的, 则方法 (2.11) 用于求解 $\mathscr{D}(\alpha,\beta,\gamma,\,L_K,\,\mu)$ 类初值问题 (2.1) 时成立

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_{n+1}\|_G^2 \leqslant{} & (1+h)\|\varepsilon_n\|_G^2 + d_1 h\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)\|^2 + d_2 h \max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|^2 \\ & + d_3 h^5 + d_4 h^{-1}\|e_n\|^2, \quad n=0,1,\ldots,\ h\in(0,h_1],\end{aligned} \tag{3.10}$$

这里 $\varepsilon_n = [(y_n-\hat{y}_n)^T, (y_{n+1}-\hat{y}_{n+1})^T, \ldots, (y_{n+k-1}-\hat{y}_{n+k-1})^T]^T$.

证明 由于 A- 稳定等价于 G- 稳定 (参见文献 [30]), 于是存在一个 $k\times k$ 实对称正定矩阵 G, 对任意实数列 $\{a_i\}_{i=0}^k$, 成立

$$A_1^T G A_1 - A_0^T G A_0 \leqslant 2\sigma(E)a_0\rho(E)a_0,$$

这里 $A_i = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1})^T\ (i=0,1)$. 由此按文献 [28, 30] 的方法, 有

$$\|\varepsilon_{n+1}\|_G^2 - \|\varepsilon_n\|_G^2 \leqslant 2\Re e\langle\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n), \rho(E)(y_n-\hat{y}_n)\rangle. \tag{3.11}$$

记 $\hat{\varepsilon}_{n+1} = [(y_{n+1}-\hat{y}_{n+1})^T, \ldots, (y_{n+k-1}-\hat{y}_{n+k-1})^T, (y_{n+k}-\hat{y}_{n+k}-e_n)^T]^T$. 注意其与 ε_{n+1} 的区别, 同理有

$$\|\hat{\varepsilon}_{n+1}\|_G^2 \leqslant \|\varepsilon_n\|_G^2 + 2\Re e\langle\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_k e_n, \rho(E)(y_n-\hat{y}_n)-\alpha_k e_n\rangle. \tag{3.12}$$

利用条件 (2.2) 和 (2.3), 由 (3.12) 式可得

$$\begin{aligned}\|\hat{\varepsilon}_{n+1}\|_G^2 \leqslant{} & \|\varepsilon_n\|_G^2 + 2h\Re e\langle\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_k e_n, f(\sigma(E)t_n, \sigma(E)y_n, \sigma(E)y_{n-m}, K_n) \\ & - f(\sigma(E)t_n, \sigma(E)\hat{y}_n+\beta_k e_n, \bar{y}_{n-m}, \bar{K}_n)\rangle \\ \leqslant{} & \|\varepsilon_n\|_G^2 + 2h[\alpha\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_k e_n\|^2 + \|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_k e_n\| \\ & \times(\beta\|\sigma(E)y_{n-m}-\bar{y}_{n-m}\| + \gamma\|K_n-\bar{K}_n\|)].\end{aligned} \tag{3.13}$$

另一方面, 利用条件 (2.3)–(2.5), 可得

$$\begin{aligned}\|K_n-\bar{K}_n\| \leqslant{} & \frac{1}{2}h[L_K\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_k e_n\| + \mu(\beta\|\sigma(E)y_{n-m}-\bar{y}_{n-m}\| \\ & + \gamma\|K_n-\bar{K}_n\|)] + h\sum_{j=1}^{m-1}[L_K\|\sigma(E)y_{n-j}-\bar{y}_{n-j}\| \\ & + \mu(\beta\|\sigma(E)y_{n-m-j}-\bar{y}_{n-m-j}\| + \gamma\|K_{n-j}-\bar{K}_{n-j}\|)] \\ & + \frac{1}{2}h[L_K\|\sigma(E)y_{n-m}-\bar{y}_{n-m}\| + \mu(\beta\|\sigma(E)y_{n-2m}-\bar{y}_{n-2m}\| \\ & + \gamma\|K_{n-m}-\bar{K}_{n-m}\|)],\end{aligned} \tag{3.14}$$

注意到 $\frac{1}{2}\gamma\mu h < 1$, 进而易得

$$\begin{aligned}\|K_n-\bar{K}_n\| \leqslant{} & \frac{2}{2-\gamma\mu h}\bigg[\frac{1}{2}h(L_K\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_k e_n\| \\ & + \mu\beta\|\sigma(E)y_{n-m}-\bar{y}_{n-m}\|) + \tau L_K\max_{1\leqslant j\leqslant m}\|\sigma(E)y_{n-j}-\bar{y}_{n-j}\| \\ & + \beta\tau\mu\max_{m\leqslant j\leqslant 2m}\|\sigma(E)y_{n-j}-\bar{y}_{n-j}\| + \gamma\tau\mu\max_{1\leqslant j\leqslant m}\|K_{n-j}-\bar{K}_{n-j}\|\bigg];\end{aligned} \tag{3.15}$$

对于 $i<n$, 同理可得

$$
\begin{aligned}
\|K_i-\bar{K}_i\| \leqslant & \frac{1}{2}h[L_K\|\sigma(E)y_i-\bar{y}_i\|+\mu(\beta\|\sigma(E)y_{i-m}-\bar{y}_{i-m}\|+\gamma\|K_i-\bar{K}_i\|)] \\
& +h\sum_{j=1}^{m-1}[L_K\|\sigma(E)y_{i-j}-\bar{y}_{i-j}\|+\mu(\beta\|\sigma(E)y_{i-m-j}-\bar{y}_{i-m-j}\| \\
& +\gamma\|K_{i-j}-\bar{K}_{i-j}\|)]+\frac{1}{2}h[L_K\|\sigma(E)y_{i-m}-\bar{y}_{i-m}\| \\
& +\mu(\beta\|\sigma(E)y_{i-2m}-\bar{y}_{i-2m}\|+\gamma\|K_{i-m}-\bar{K}_{i-m}\|)] \\
\leqslant & \tau L_K\max_{0\leqslant j\leqslant m}\|\sigma(E)y_{i-j}-\bar{y}_{i-j}\|+\beta\tau\mu\max_{m\leqslant j\leqslant 2m}\|\sigma(E)y_{i-j}-\bar{y}_{i-j}\| \\
& +\gamma\tau\mu\max_{0\leqslant j\leqslant m}\|K_{i-j}-\bar{K}_{i-j}\|.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

由 Taylor 展式易知存在 c_2, 使得

$$
\|\sigma(E)\hat{y}_i-y(\sigma(E)t_i)\|\leqslant c_2M_2h^2,\quad i\leqslant n-1.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\|\sigma(E)y_i-\bar{y}_i\| &= \|\sigma(E)y_i-y(\sigma(E)t_i)\| \\
&\leqslant \|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|+\|\sigma(E)\hat{y}_i-y(\sigma(E)t_i)\| \\
&\leqslant \|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|+c_2M_2h^2.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

将上式代入 (3.16) 式, 并注意 $y_j=y(t_j)$ 及 $K_j=\bar{K}_j$, $j\leqslant 0$, 可得

$$
\begin{aligned}
\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|K_i-\bar{K}_i\| \leqslant & \tau(L_K+\beta\mu)\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|+c_2M_2h^2\Big) \\
& +\gamma\tau\mu\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|K_i-\bar{K}_i\|,
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

从而

$$
\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|K_i-\bar{K}_i\|\leqslant\frac{\tau(L_K+\beta\mu)}{1-\gamma\tau\mu}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|+c_2M_2h^2\Big). \tag{3.19}
$$

将 (3.19) 式代入 (3.15) 式可进一步推出

$$
\begin{aligned}
\|K_n-\bar{K}_n\| \leqslant & \frac{2}{2-\gamma\mu h}\bigg[\frac{1}{2}h(L_K\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_ke_n\| \\
& +\mu\beta\|\sigma(E)y_{n-m}-\bar{y}_{n-m}\|)+\tau(L_K+\beta\mu)\max_{1\leqslant j\leqslant 2m}\|\sigma(E)y_{n-j}-\bar{y}_{n-j}\| \\
& +\gamma\tau\mu\frac{\tau(L_K+\beta\mu)}{1-\gamma\tau\mu}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|+c_2M_2h^2\Big)\bigg] \\
\leqslant & \frac{h}{2-\gamma\mu h}(L_K\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_ke_n\|+\mu\beta\|\sigma(E)y_{n-m}-\bar{y}_{n-m}\|) \\
& +\frac{2\tau(L_K+\beta\mu)}{(2-\gamma\mu h)(1-\gamma\tau\mu)}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|+c_2M_2h^2\Big),
\end{aligned}
$$

并将其代入 (3.13) 式得

$$
\|\hat{\varepsilon}_{n+1}\|_G^2\leqslant\|\varepsilon_n\|_G^2+2h\Big\{\alpha\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_ke_n\|^2+\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_ke_n\|
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\bigg[\beta\|\sigma(E)y_{n-m}-\bar{y}_{n-m}\|+\frac{\gamma hL_K}{2-\gamma\mu h}\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_k e_n\|\\
&+\frac{\gamma h\mu\beta}{2-\gamma\mu h}\|\sigma(E)y_{n-m}-\bar{y}_{n-m}\|\\
&+\frac{2\tau(L_K+\beta\mu)}{(2-\gamma\mu h)(1-\gamma\tau\mu)}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|+c_2M_2h^2\Big)\bigg]\bigg\}\\
\leqslant{}&\|\varepsilon_n\|_G^2+2h\bigg[\bigg(\alpha+\frac{\gamma hL_K}{2-\gamma\mu h}+\frac{(\gamma\tau L_K+\beta)}{(2-\gamma\mu h)(1-\gamma\tau\mu)}\bigg)\\
&\times\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_k e_n\|^2\\
&+\frac{(\gamma\tau L_K+\beta)}{(2-\gamma\mu h)(1-\gamma\tau\mu)}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|+c_2M_2h^2\Big)^2\bigg].
\end{aligned}\tag{3.20}
$$

于是, 易得

$$
\begin{aligned}
\|\hat{\varepsilon}_{n+1}\|_G^2\leqslant{}&\|\varepsilon_n\|_G^2+c_3h\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_k e_n\|^2+\frac{2(\gamma\tau L_K+\beta)h}{(1-\gamma\tau\mu)^2}c_2^2M_2^2h^4\\
&+\frac{2(\gamma\tau L_K+\beta)h}{(1-\gamma\tau\mu)^2}\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|^2,\quad h\leqslant\tau,
\end{aligned}\tag{3.21}
$$

这里

$$
c_3=\begin{cases}0, & 2\alpha+\dfrac{\gamma\tau L_K}{1-\gamma\mu\tau}+\dfrac{\gamma\tau L_K+\beta}{(1-\gamma\mu\tau)^2}\leqslant 0,\\[2ex] 2\alpha+\dfrac{\gamma\tau L_K}{1-\gamma\mu\tau}+\dfrac{\gamma\tau L_K+\beta}{(1-\gamma\mu\tau)^2}, & 2\alpha+\dfrac{\gamma\tau L_K}{1-\gamma\mu\tau}+\dfrac{\gamma\tau L_K+\beta}{(1-\gamma\mu\tau)^2}>0.\end{cases}
$$

因为

$$
\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)-\beta_k e_n\|^2=2\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)\|^2+2\beta_k^2\|e_n\|^2,\tag{3.22}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\|\varepsilon_{n+1}\|_G^2&\leqslant\|\hat{\varepsilon}_{n+1}\|_G^2+\lambda_{\max}^G\|e_n\|^2+2\sqrt{\lambda_{\max}^G}\|e_n\|\|\hat{\varepsilon}_{n+1}\|_G\\
&\leqslant(1+h)\|\hat{\varepsilon}_{n+1}\|_G^2+\Big(1+\frac{1}{h}\Big)\lambda_{\max}^G\|e_n\|^2,
\end{aligned}\tag{3.23}
$$

其中 $\lambda_{\max}^G$ 为 G 的最大特征值, 故

$$
\begin{aligned}
\|\varepsilon_{n+1}\|_G^2\leqslant{}&(1+h)\bigg[\|\varepsilon_n\|_G^2+2c_3h\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)\|^2+2c_3\beta_k^2h\|e_n\|^2\\
&+\frac{2(\gamma\tau L_K+\beta)h}{(1-\gamma\tau\mu)^2}\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|^2\\
&+\frac{2(\gamma\tau L_K+\beta)h}{(1-\gamma\tau\mu)^2}c_2^2M_2^2h^4+h^{-1}\lambda_{\max}^G\|e_n\|^2\bigg]\\
\leqslant{}&(1+h)\|\varepsilon_n\|_G^2+d_1h\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)\|^2+d_2h\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|^2\\
&+d_3h^5+d_4h^{-1}\|e_n\|^2,\quad n=0,1,\dots,\quad h\in(0,h_1],
\end{aligned}\tag{3.24}
$$

其中

$$
h_1=\min\{1,\tau\},\quad d_1=4c_3,\quad d_2=\frac{4(\gamma\tau L_K+\beta)}{(1-\gamma\tau\mu)^2},\quad d_3=\frac{4(\gamma\tau L_K+\beta)}{(1-\gamma\tau\mu)^2}c_2^2M_2^2,
$$

$$
d_4=4c_3\beta_k^2+2\lambda_{\max}^G.
$$

由此完成定理的证明.

定理 3.2 设方法 (2.10) 是 A- 稳定的, 则存在常数 d_5 和 h_2, 使得

$$\|e_n\| \leqslant d_5 h^{p+1}, \quad h \in (0, h_2], \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.25}$$

其中 p 为单支方法的经典相容阶, $p = 1, 2$.

证明 由于方法 (2.10) 是 A- 稳定的, 于是 $\frac{\beta_k}{\alpha_k} > 0$ (见参考文献 [28,30]), 其经典相容阶 $p = 1, 2$. 考虑

$$y(\sigma(E)t_n) = \sum_{j=0}^{k-1}\left(\beta_j - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\alpha_j\right)\hat{y}_{n+j} + \frac{\beta_k}{\alpha_k} h y'(\sigma(E)t_n) + R_1^{(n)}, \tag{3.26}$$

$$\rho(E)\hat{y}_n = h y'(\sigma(E)t_n) + R_2^{(n)}. \tag{3.27}$$

由 Taylor 展式易知存在常数 c_4, 使得

$$R_1^{(n)} \leqslant c_4 M_3 h^3, \tag{3.28}$$

$$R_2^{(n)} \leqslant c_4 M_{p+1} h^{p+1}. \tag{3.29}$$

由复化梯形求积公式的误差分析易知存在 c_5, 使得

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\sigma(E)t_n-\tau}^{\sigma(E)t_n} K(\sigma(E)t_n, s, y(s), y'(s))ds - \bar{K}_n \right\| \\
&\quad = \left\| \int_{\sigma(E)t_n-\tau}^{\sigma(E)t_n} K(\sigma(E)t_n, s, y(s), y'(s))ds - \tilde{K}_n \right. \\
&\qquad + \frac{h}{2}\Big[K(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_n, y(\sigma(E)t_n), y'(\sigma(E)t_n)) \\
&\qquad \left. - K(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_n, \sigma(E)\hat{y}_n + \beta_k e_n, \bar{K}_n)\Big] \right\| \\
&\quad \leqslant c_5 \tau N_2 h^2 + \frac{h}{2}\Big[L_K \|y(\sigma(E)t_n) - \sigma(E)\hat{y}_n - \beta_k e_n\| \\
&\qquad + \gamma\mu \left\| \int_{\sigma(E)t_n-\tau}^{\sigma(E)t_n} K(\sigma(E)t_n, s, y(s), y'(s))ds - \bar{K}_n \right\| \Big],
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_n = h\Big[&\frac{1}{2}K(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_n, y(\sigma(E)t_n), y'(\sigma(E)t_n)) + \sum_{j=1}^{m-1} K(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_{n-j}, \bar{y}_{n-j}, \bar{Y}_{n-j}) \\
&+ \frac{1}{2}K(\sigma(E)t_n, \sigma(E)t_{n-m}, \bar{y}_{n-m}, \bar{Y}_{n-m})\Big],
\end{aligned}$$

并进而有

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\sigma(E)t_n-\tau}^{\sigma(E)t_n} K(\sigma(E)t_n, s, y(s), y'(s))ds - \bar{K}_n \right\| \\
&\quad \leqslant \frac{c_5 \tau N_2}{1-\gamma\mu\tau} h^2 + \frac{h L_K}{2(1-\gamma\mu\tau)} \|y(\sigma(E)t_n) - \sigma(E)\hat{y}_n - \beta_k e_n\|, \quad h \leqslant \tau.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

由 (3.5) 式和 (3.26) 式可知

$$\begin{aligned}
&y(\sigma(E)t_n) - \sigma(E)\hat{y}_n - \beta_k e_n \\
&\quad = \frac{\beta_k}{\alpha_k} h[y'(\sigma(E)t_n) - f(\sigma(E)t_n, \sigma(E)\hat{y}_n + \beta_k e_n, \bar{y}_{n-m}, \bar{K}_n)] + R_1^{(n)}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

由此及 (3.30) 式进一步可得

$$\begin{aligned}\|y(\sigma(E)t_n)-\sigma(E)\hat{y}_n-\beta_k e_n\|^2 \leqslant & \frac{\beta_k}{\alpha_k}h\|y(\sigma(E)t_n)-\sigma(E)\hat{y}_n-\beta_k e_n\| \\ & \times\Bigg[\alpha\|y(\sigma(E)t_n)-\sigma(E)\hat{y}_n-\beta_k e_n\| \\ & +\gamma\Bigg\|\int_{\sigma(E)t_n-\tau}^{\sigma(E)t_n}K(\sigma(E)t_n,s,y(s),y'(s))ds-\bar{K}_n\Bigg\|\Bigg] \\ & +R_1^{(n)}\|y(\sigma(E)t_n)-\sigma(E)\hat{y}_n-\beta_k e_n\| \\ \leqslant & \frac{\beta_k}{\alpha_k}\left(\alpha+\frac{\gamma\tau L_K}{2(1-\gamma\mu\tau)}\right)h\|y(\sigma(E)t_n)-\sigma(E)\hat{y}_n-\beta_k e_n\|^2 \\ & +\frac{c_5\gamma\tau N_2\beta_k}{(1-\gamma\mu\tau)\alpha_k}h^3\|y(\sigma(E)t_n)-\sigma(E)\hat{y}_n-\beta_k e_n\| \\ & +R_1^{(n)}\|y(\sigma(E)t_n)-\sigma(E)\hat{y}_n-\beta_k e_n\|.\end{aligned}$$

于是当 $\frac{\beta_k}{\alpha_k}(\alpha+\frac{\gamma\tau L_K}{2(1-\gamma\mu\tau)})h<1$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\|y(\sigma(E)t_n)-\sigma(E)\hat{y}_n-\beta_k e_n\| \\ &\leqslant\frac{2\alpha_k(1-\gamma\mu\tau)}{2\alpha_k(1-\gamma\mu\tau)-[2\alpha(1-\gamma\mu\tau)+\gamma\tau L_K]h\beta_k}\left[\frac{c_5\gamma\tau N_2\beta_k}{(1-\gamma\mu\tau)\alpha_k}+c_4M_3\right]h^3 \\ &\leqslant c_6h^3.\end{aligned}\tag{3.32}$$

其中

$$c_6=\sup_{h\in(0,h_1]}\left[\frac{2\alpha_k(1-\gamma\mu\tau)}{2\alpha_k(1-\gamma\mu\tau)-[2\alpha(1-\gamma\mu\tau)+\gamma\tau L_K]h\beta_k}\left(\frac{c_5\gamma\tau N_2\beta_k}{(1-\gamma\mu\tau)\alpha_k}+c_4M_3\right)\right].$$

将 (3.32) 式代入 (3.31) 式得

$$\begin{aligned}&\|hy'(\sigma(E)t_n)-hf(\sigma(E)t_n,\sigma(E)\hat{y}_n+\beta_k e_n,\bar{y}_{n-m},\bar{K}_n)\| \\ &\leqslant\frac{\alpha_k}{\beta_k}\|y(\sigma(E)t_n)-\sigma(E)\hat{y}_n-\beta_k e_n\|+\frac{\alpha_k}{\beta_k}\|R_1^{(n)}\| \\ &\leqslant\frac{\alpha_k}{\beta_k}(c_4M_3+c_6)h^3.\end{aligned}\tag{3.33}$$

另一方面, 因

$$\alpha_k e_n=hf(\sigma(E)t_n,\sigma(E)\hat{y}_n+\beta_k e_n,\bar{y}_{n-m},\bar{K}_n)-hy'(\sigma(E)t_n)-R_2^{(n)},$$

从 (3.33) 式可以推出

$$\alpha_k\|e_n\|\leqslant\frac{\alpha_k}{\beta_k}(c_4M_3+c_6)h^3+c_4M_{p+1}h^{p+1}.\tag{3.34}$$

令

$$h_2=\begin{cases}h_1, & 若\alpha+\dfrac{\gamma\tau L_K}{2(1-\gamma\tau\mu)}\leqslant 0;\\ \min\left\{h_1,\dfrac{\alpha_k(1-\gamma\mu\tau)}{\beta_k[2(1-\gamma\mu\tau)\alpha\beta_k+\gamma\tau L_K]}\right\}, & 若\alpha+\dfrac{\gamma\tau L_K}{2(1-\gamma\tau\mu)}>0,\end{cases}\tag{3.35}$$

于是从 (3.34) 式立得 (3.25) 式, 其中

$$d_5=\frac{c_4M_3+c_6}{\beta_k}+\frac{c_4M_{p+1}}{\alpha_k}.$$

证毕.

定理 3.3 方法 (2.11) p 阶 E- 收敛的充分必要条件为常微分方程方法 (2.10) 是 A- 稳定的且其经典相容阶为 p, $p=1,2$.

证明 首先注意到, 方法 (2.11) p 阶 E- 收敛意味着方法 (2.10) p 阶 B- 收敛, 进而意味着 A- 稳定且其经典相容阶为 p $(p=1,2)$ (例参见文献 [25]).

另一方面, 由定理 3.1 和 3.2 可知

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_{n+1}\|_G^2 \leqslant{}& (1+h)\|\varepsilon_n\|_G^2 + d_1 h\|\sigma(E)(y_n-\hat{y}_n)\|^2 + d_2 h \max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|^2\\ &+d_3h^5+d_4d_5h^{2p+1},\quad n=0,1,\ldots,\quad h\in(0,h_2],\end{aligned}$$

上式递推下去, 有

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_{n+1}\|_G^2 \leqslant{}& \|\varepsilon_0\|_G^2 + h\sum_{i=0}^{n}\Big[\|\varepsilon_i\|_G^2 + d_1\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|^2\\ &+d_2\max_{1\leqslant l\leqslant i-1}\|\sigma(E)(y_l-\hat{y}_l)\|^2+d_3h^4+d_4d_5h^{2p}\Big].\end{aligned}\tag{3.36}$$

于是

$$\begin{aligned}\|y_{n+k}-\hat{y}_{n+k}\|^2 \leqslant{}& \frac{\lambda_{\max}^G}{\lambda_{\min}^G}\sum_{j=0}^{k-1}\|y_j-\hat{y}_j\|^2 + \frac{h}{\lambda_{\min}^G}\sum_{i=0}^{n}\Big[\lambda_{\max}^G\sum_{j=0}^{k-1}\|y_{i+j}-\hat{y}_{i+j}\|^2\\ &+d_1\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|^2\\ &+d_2\max_{1\leqslant j\leqslant i-1}\|\sigma(E)(y_j-\hat{y}_j)\|^2+d_3h^4+d_4d_5h^{2p}\Big],\end{aligned}\tag{3.37}$$

其中 $\lambda_{\min}^G$ 为 G 的最小特征值. 容易验证, 存在 d_6 使得

$$\|\sigma(E)(y_i-\hat{y}_i)\|^2 = \Big\|\sum_{j=0}^{k}\beta_j(y_{i+j}-\hat{y}_{i+j})\Big\|^2 \leqslant d_6\sum_{j=0}^{k}\|y_{i+j}-\hat{y}_{i+j}\|^2.$$

将其代入 (3.37) 式可得

$$\begin{aligned}&\|y_{n+k}-\hat{y}_{n+k}\|^2\\ &\quad\leqslant \frac{\lambda_{\max}^G}{\lambda_{\min}^G}\sum_{j=0}^{k-1}\|y_j-\hat{y}_j\|^2 + \frac{h}{\lambda_{\min}^G}\sum_{i=0}^{n}\Big[\lambda_{\max}^G\sum_{j=0}^{k-1}\|y_{i+j}-\hat{y}_{i+j}\|^2\\ &\qquad+d_1d_6\sum_{j=0}^{k}\|y_{i+j}-\hat{y}_{i+j}\|^2+d_2d_6(k+1)\max_{1\leqslant j\leqslant i+k-1}\|y_j-\hat{y}_j\|^2+d_3h^4+d_4d_5h^{2p}\Big]\\ &\quad\leqslant \frac{\lambda_{\max}^G}{\lambda_{\min}^G}\sum_{j=0}^{k-1}\|y_j-\hat{y}_j\|^2 + \frac{(k+1)h}{\lambda_{\min}^G}(\lambda_{\max}^G+d_1d_6+d_2d_6)\sum_{i=0}^{n+k-1}\|y_i-\hat{y}_i\|^2\\ &\qquad+\frac{n+1}{\lambda_{\min}^G}(d_3h^5+d_4d_5h^{2p+1})+\frac{hd_1d_6}{\lambda_{\min}^G}\|y_{n+k}-\hat{y}_{n+k}\|^2.\end{aligned}\tag{3.38}$$

当 $\frac{hd_1d_6}{\lambda_{\min}^G}<1$ 时, 易知存在 c_0,d_0,h_0,d_7 使得

$$\begin{aligned}\|y_{n+k}-\hat{y}_{n+k}\|^2 \leqslant{}& d_7\sum_{j=0}^{k-1}\|y_j-\hat{y}_j\|^2 + d_0h\sum_{i=0}^{n+k-1}\|y_i-\hat{y}_i\|^2+c_0t_{n+k}h^{2p}\\ &n=0,1,2,\ldots,\quad h\in(0,h_0],\end{aligned}\tag{3.39}$$

其中

$$\begin{aligned}&h_0=\min\Big\{h_2,\frac{\lambda_{\min}^G}{2d_1d_6}\Big\},\quad d_7=\frac{\lambda_{\max}^G}{\lambda_{\min}^G},\\ &d_0=\frac{(k+1)}{\lambda_{\min}^G}(\lambda_{\max}^G+d_1d_6+d_2d_6),\quad c_0=\frac{d_3+d_4d_5}{\lambda_{\min}^G}.\end{aligned}$$

利用离散的 Bellman 不等式, 由 (3.39) 式可得

$$\|y_{n+k}-\hat{y}_{n+k}\|^2 \leqslant \left[k(d_0+d_7)\max_{0\leqslant i\leqslant k-1}\|y_i-\hat{y}_i\|^2+c_0t_{n+k}h^{2p}\right]\exp(d_0t_{n+k})$$
$$n=0,1,2,\ldots,\quad h\in(0,h_0]. \tag{3.40}$$

于是

$$\begin{aligned}\|y_{n+k}-y(t_{n+k})\| &= \|y_{n+k}-\hat{y}_{n+k}+\hat{y}_{n+k}-y(t_{n+k})\|\\ &\leqslant |c_1|M_2h^2+\left[\sqrt{k(d_0+d_7)}\Big(\max_{0\leqslant i\leqslant k-1}\|y_i-y(t_i)\|+|c_1|M_2h^2\Big)\right.\\ &\quad\left.+\sqrt{c_0t_{n+k}}h^p\right]\exp\left(\frac{1}{2}d_0t_{n+k}\right),\quad n=0,1,2,\ldots,\ h\in(0,h_0].\end{aligned}$$

这意味着单支方法的收敛阶为 p ($p=1$ 或 2). 定理 3.3 证毕.

类似地, 我们可以证明下面的定理.

定理 3.4 方法 (2.11) p 阶 EB- 收敛的充分必要条件为相应的常微分方程方法 A- 稳定且其经典相容阶为 p, 其中 $p=1,2$.

注 3.1 如前所述, 由于在实际问题中

$$\lim_{t\to0^+}y'(t)\neq\lim_{t\to0^-}y'(t)=\phi'(0),$$

致使问题 (2.1) 的解 $y(t)$ 一般在基本不连续点 ξ_i 处具有较低的正则性. 尽管如此, 由于本文考虑的方法仅是 A- 稳定的 (见定理 3.3 和 3.4), 它们的阶不会超过 2 阶 (例参见文献 [31]), 从而能够影响定理 3.1–3.3 的证明及方法的具体实施的基本不连续点仅有 $\xi_0=0$ 和 $\xi_1=\tau$. 在这两个点处, 我们需要使用其他方法去计算附加起始值 $y_1,\ldots,y_{k-1}$ 及 $y_{m+1},\ldots,y_{m+k-1}$, 例如, 使用中点公式 (MPR) 及求积节点包含点 ξ_0 或 ξ_1 的复合梯形公式 (可稍微修改 (2.12) 式). 这样, 即使正则性假定条件 (3.1) 和 (3.2) 在点 $\xi_0=0$ 和点 $\xi_1=\tau$ 处不成立, 我们仍有定理 3.3 和 3.4.

4 数值实验

对非线性方程 (2.11), 我们考虑如下的迭代解法

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_iy_{n+i}+\alpha_ky_{n+k}^{[l]}=hf(\sigma(E)t_n,\sum_{i=0}^{k-1}\beta_iy_{n+i}+\beta_ky_{n+k}^{[l]},\sigma(E)y_{n-m},K_n^{[l-1]}),\\ \qquad n=0,1,\ldots,\\ \displaystyle K_n^{[l-1]}=h\Big[\frac{1}{2}K(\sigma(E)t_n,\sigma(E)t_n,\sum_{i=0}^{k-1}\beta_iy_{n+i}+\beta_ky_{n+k}^{[l-1]},\tilde{y}_n^{[l-1]})\\ \displaystyle\qquad\qquad+\sum_{j=1}^{m-1}K(\sigma(E)t_n,\sigma(E)t_{n-j},\sigma(E)y_{n-j},\tilde{y}_{n-j})\\ \displaystyle\qquad\qquad+\frac{1}{2}K(\sigma(E)t_n,\sigma(E)t_{n-m},\sigma(E)y_{n-m},\tilde{y}_{n-m})\Big],\\ \displaystyle\tilde{y}_n^{[l-1]}=f\Big(\sigma(E)t_n,\sum_{i=0}^{k-1}\beta_iy_{n+i}+\beta_ky_{n+k}^{[l-1]},\sigma(E)y_{n-m},K_n^{[l-1]}\Big),\quad\sigma(E)t_{n-j}>0.\end{cases}\tag{4.1}$$

容易知道上述迭代过程对充分小的 h 是收敛的 (例参见文献 [19,31]).

现考虑偏中立型泛函微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial^2 x}u(x,t)+au(x,t-1)+b\int_{t-1}^{t}e^{-s}\sin u(x,s)\frac{\partial}{\partial s}u(x,s)ds+g(x,t),$$
$$x\in[0,1],\quad t\in[0,10],\tag{4.2}$$

初边值条件为

$$u(x,t)=(x-x^2+1)e^{-t},\qquad x\in[0,1],\quad t\in[-1,0],\tag{4.3}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=e^{-t},\qquad t\in[0,10].\tag{4.4}$$

选取函数 $g(t,x)$ 使得问题的真解为 $u(x,t)=(x-x^2+1)e^{-t}$. 因此, 可用有限差分在网格点 $x_i=i/N_x$, $i=1(1)N_x-1$ 上代替二阶偏导并且没有截断误差, 这里 N_x 为任给的正整数. 记 $u_i(t)=u(x_i,t)$, $\Delta x=1/N_x$. 应用线方法之后可得如下中立型延迟积分微分方程

$$u_i'(t)=\frac{1}{\pi\Delta x^2}[u_{i-1}(t)-2u_i(t)+u_{i+1}(t)]+au_i(t-1)+b\int_{t-1}^{t}e^{-s}\sin u_i(s)\cos u_i'(s)ds$$
$$+g_i(t),\quad t\in[0,10],\tag{4.5}$$

$$u_0(t)=u_{N_x}(t)=e^{-t},\ t\in[0,10],\ u_i(t)=(i\Delta x-i^2\Delta x^2+1),\ i=1,\dots,N_x-1,\ t\in[-1,0].$$

因而, 我们有 $\alpha=-\frac{4N_x^2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2N_x}$, $\beta=|a|$, $\gamma=|b|$, $L_K=e+4eN_x^2/\pi$, $\mu=e$, $L_y=4N_x^2/\pi$, $L_\mu=e$.

对线方法, 取 $\Delta x=0.1$, 而对问题 (4.5) 的求解, 我们采用 2 阶 BDF 方法 (BDF2) 及中点公式 (MPR). 迭代求解 (4.1) 时, 取 $l=2$. 以

$$E(T)=\max_{1\leqslant i\leqslant N_x-1}|U_i(T)-u(x_i,T)|$$

表示方法应用于问题 (4.5) 的误差, 其中 $U_i(T)$ 表示在点 $T=10$ 的数值逼近. 表 4.1 列出了 $a=-e^{-1}$ 及 $b=0.01$ 时的数值结果, 这些数值结果证实了本文所获收敛性结果的正确性.

表 4.1 2 阶 BDF 方法 (BDF2) 及中点公式 (MPR) 应用于问题 (4.5) 时的误差 $E(T)$ $(h=1/m)$

m	10	20	40	80
BDF2	7.748076×10^{-8}	1.866404×10^{-8}	4.579712×10^{-9}	1.134266×10^{-9}
MPR	3.212700×10^{-8}	8.039485×10^{-9}	2.010355×10^{-9}	5.026191×10^{-10}

致谢 衷心感谢评审人的仔细审阅和宝贵意见, 同时衷心感谢 H. Brunner 教授有关解的正则性的有益讨论.

参考文献

1 Kolmanovskii V B, Myshkis A. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Dordrecht: Kluwer Academy, 1999

2 Hale J K, Lunel S M V. Introduction to Functional Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1993

3 Torelli L. Stability of numerical methods for delay differential equations. *J Comput Appl Math*, **25**: 15–26 (1989)

4 Huang C M, Fu H Y, Li S F, et al. Stability analysis of Runge-Kutta methods for non-linear delay differential equations. *BIT*, **39**: 270–280 (1999)

5 Baker C T H. Retarded differential equations. *J Comput Appl Math*, **125**: 309–335 (2000)
6 Bellen A, Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations. Oxford: Clarendon Press, 2003
7 Kuang J X, Cong Y H. Stability of Numerical Methods for Delay Differential Equations. Beijing: Science Press, 2005
8 李寿佛. 刚性 Volterra 泛函微分方程 Runge-Kutta 法的 B- 理论. 中国科学 A, **33**(2): 124–135 (2003)
9 Li S F. B-theory of general linear methods for stiff Volterra functional differential equations. *Appl Numer Math*, **53**: 57–72 (2005)
10 李寿佛. Banach 空间中非线性刚性 Volterra 泛函微分方程的稳定性分析. 中国科学 A, **35**(3): 286–301 (2005)
11 Zhang C J, Vandewalle S. Stability analysis of Runge-Kutta methods for nonlinear Volterra delay-integro-differential equations. *IMA J Numer Anal*, **24**: 193–214 (2004)
12 Zhang C J, Vandewalle S. General linear methods for Volterra integro-differential equations with memory. *SIAM J Sci Comput*, **27**: 2010–2031 (2006)
13 王晚生, 李寿佛. 非线性中立型延迟微分方程稳定性分析. 计算数学, **26**(3): 303–314 (2004)
14 Wang W S, Li S F. On the one-leg θ-methods for solving nonlinear neutral functional differential equations. *Appl Math Comput*, **193**: 285–301 (2007)
15 Wang W S, Zhang Y, Li S F. Nonlinear stability of one-leg methods for delay differential equations of neutral type. *Appl Numer Math*, **58**: 122–130 (2008)
16 Jackiewicz Z. One-step methods of any order for neutral functional differential equations. *SIAM J Numer Anal*, **21**: 486–511 (1984)
17 Jackiewicz Z. Qualsilinear multistep methods and variable step predictor-corrector methods for neutral functional differential equations. *SIAM J Numer Anal*, **23**: 423–452 (1986)
18 Brunner H. The numerical solutions of neutral Volterra integro-differential equations with delay arguments. *Ann Numer Math*, **1**: 309–322 (1994)
19 Enright W H, Hu M. Continuous Runge-Kutta methods for neutral Volterra integro-differential equations with delay. *Appl Numer Math*, **24**: 175–190 (1997)
20 Brunner H, Vermiglio R. Stability of solutions of neutral functional integro-differential equations and their discretiztion. *Computing*, **71**: 229–245 (2003)
21 Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
22 Brunner H. High-order collocation methods for singular Volterra functional equations of neutral type. *Appl Numer Math*, **57**: 533–548 (2007)
23 余越昕, 李寿佛. 非线性中立型延迟积分微分方程 Runge-Kutta 方法的稳定性. 中国科学 A, **36**(12): 1343–1354 (2006)
24 Zhang C J, Zhou S Z. Nonlinear stability and D-convergence of Runge-Kutta methods for DDEs. *J Comput Appl Math*, **85**: 225–237 (1997)
25 Huang C M, Li S F, Fu H Y, et al. Stability and error analysis of one-leg methods for nonlinear delay differential equations. *J Comput Appl Math*, **103**: 263–279 (1999)
26 Enright W H, Hayashi H. Convergence analysis of the solution of retarded and neutral delay differential equations by continuous numerical methods. *SIAM J Numer Anal*, **35**: 572–585 (1998)
27 Brunner H, Zhang W. Primary discontinuities in solutions for delay integro-differential equations. *Methods Appl Anal*, **6**: 525–533 (1999)
28 李寿佛. 刚性微分方程算法理论. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1997
29 Huang C M, Li S F, Fu H Y, et al. D-convergence of one-leg methods for stiff delay differential equations. *J Comput Math*, **19**: 601–606 (2001)
30 Dahlquist G. G-stability is equivalent to A-stability. *BIT*, **18**: 384–401 (1978)
31 Hairer E, Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential Algebraic Problems. Berlin: Spring-Verlag, 1991