中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 7 期: 855～860
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

格序群上的 C-拓扑

杨义川

北京航空航天大学数学系, "数学、信息与行为" 教育部重点实验室, 北京 100191
E-mail: ycyang@buaa.edu.cn

收稿日期: 2008-05-08; 接受日期: 2009-01-15;
教育部留学回国人员科研启动基金和北京市优秀人才基金 (批准号: 20071D1600600412) 资助项目

摘要 令 C 为格序群 A 的某些正元组成的一个容许子集, Gusić 证明 A 可以被赋予一个 C-拓扑使得 A 成为拓扑群. 本文证明 C-拓扑实际上使得 A 成为拓扑格序群, 给出了 Gusić 定理的推广, 并揭示了 Gusić C-群的自然性. 而且, 我们证明 C-拓扑使得任何 Archimedean 格序向量空间成为 T_2 拓扑格向量空间. 同时, 构造了一个简单的例子说明 C-群不一定是 T_2 的. 另一个例子证明 T_2 拓扑格向量空间也不一定为 C-Archimedean.

关键词 C-拓扑 格序群 Archimedean 格序群 T_2 拓扑 向量空间

MSC(2000) 主题分类 **06F30, 22A99**

1 引言

格序群 A[1, 第 6 章, 第 8, 9 节] 是一个偏序 Abel 群使得对于任意元素 $x, y \in A$, 存在上确界 $\sup(x, y)$ 和下确界 $\inf(x, y)$. 一个格序群被称作是 Archimedean, 如果其中没有非平凡的有界格子群. 例如, 令 X 为任意拓扑空间, $C(X)$ 为所有从 X 到赋予通常拓扑结构的实数拓扑空间 $\mathbb{R}$ 的全体连续函数组成的加法群, 则 $C(X)$ 在逐点序之下为一个 Archimedean 格序群. 事实上, 格序群的源泉可追溯到当 Dedekind 在研究 Fermat 大定理时发展的算术理论. 此后, 从 Hilbert 的几何基础开始, 到他的积分方程理论直至拓扑向量空间中的算子理论, 格序群理论逐渐出现在不同的数学领域. 例如, 以 Riesz 空间命名的格序实向量空间理论在泛函分析中也是很重要的.

文献 [2, 3] 刻画了格序群的一些有趣的拓扑结构. Gusić[4] 证明了格序群上可以建立相对于一个由某些正元组成的容许子集 C 的 C-拓扑, 并展现了关于格序群作为拓扑群的一些结果. 本文研究了格序群的 C-拓扑结构, 推广了 Gusić定理, 揭示了 Gusić C-群的自然性. 命题 2.2 证明了一个 2-可除的格序群可构成一个 C-群当且仅当其中含有强单位元. 然而, 这蕴涵着 C-群 A 的子集 C 是唯一的: C 恰好由 A 的强单位组成. 因此, Gusić 拓扑是自然的! 进而, 我们证明 Gusić 的 C-拓扑群实际上是拓扑格序群, 并且证明 C-拓扑使得任何 Archimedean 向量格空间成为 T_2 拓扑格向量空间 (定理 3.2). 同时, 构造了一个易懂的例子

引用格式: 杨义川. 格序群上的 C-拓扑. 中国科学 A, 2009, 39(7): 855–860
Yang Y C. On the C-topology of l-groups. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0098-3

(例 2.7) 说明 C-群不一定是 T_2 的. 另一个例子 (例 3.3) 证明 T_2 拓扑格向量空间也不一定为 C-Archimedean.

设 A 是一个 2-可除格序群. 定理 2.13 证明了任意 C-拓扑使 A 成为拓扑格, 因此是一个拓扑格序群. 令 $A_a=\{x\in A\ :\ x\geqslant a\}$, 并记 $A_{a,n}=\frac{1}{2^{n-1}}A_a$ $(n\in\mathbb{N})$. 定理 2.9 证明了 A 是 Archimedean 当且仅当对于任意严格正元 $a\in A$, A 相对于 $C=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_{a,n}$ 是一个 Hausdorff 空间, 这就为具有 2-可除的除性群的 Bézout 整环的完全整闭性质给出了拓扑刻画.

文中没有解释的术语、记号和概念, 请读者参考文献 [1, 5].

2 格序群上的 C-拓扑

令 A 为一个格序群. A 的范数 N[1, 第 6 章, 定义 4] 定义为: 对于任意 $x\in A$, $N(x)=\sup(x,-x)$. 设 $a\in A$, 则 a 的正部是 $a^+=\sup(a,0)$, a 的负部是 $a^-=\sup(-a,0)$. 易验证

$$N(a)=a^++a^-,\quad a=a^+-a^-,\quad \inf(a^+,a^-)=0,$$

且 $N(a)=0$ 当且仅当 $a=0$. 格序群 A 的一个非空正元素子集 F 被称作是一个滤子, 如果 $a,b\in F$ 蕴涵 $\inf(a,b)\in F$, 且 $c\in F$ 只要 $c\geqslant a\in F$.

设 A 为一个 2-可除的格序群, A 的一个由某些严格正元组成的滤子 C 叫作 A 的一个容许子集 [4], 如果 $x\in C$ 蕴涵 $x/2\in C$. 对于一个容许子集 $C\subseteq A$, 我们说 A 是 C-Archimedean[2] 如果对 C 中所有的元素 x,y, 存在自然数 n 使得 $ny>x$. 格序群 A 叫作是一个 C-群 [4] 如果 A 是 2-可除的且是 C-Archimedean.

若 A 是一个 2-可除并带有一个容许子集 C 的格序群. 以 $r\in C$ 为半径, 以 $x_0\in A$ 为中心的开 C-球 [4] 是集合

$$U_{x_0,r}=\{x\in A\ :\ r-N(x-x_0)\in C\}.$$

格序群 A 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称作是依范数收敛于 x, 如果对于 A 的所有严格正元 ϵ, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使得对于任意 $n\geqslant m$ 有 $N(x_n-x)<\epsilon$ 成立. A 中的递降序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称作是收敛于 x, 如果 $x=\inf_n\{x_n\}$ 存在, 并表示为 $\lim(x_n)=x$. A 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称作是依序收敛于 x 如果存在某个递降于 0 (即 $\lim(p_n)=0$) 的序列 p_n, 使得对所有的 n 有 $N(x_n-x)\leqslant p_n$. A 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ C-收敛于 x 如果 $\forall\epsilon\in C$, $\exists m\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n\geqslant m$ 成立 $N(x_n-x)<\epsilon$, 并记作 $\lim_C(x_n)=x$.

评注 2.1 易见条件 "C-Archimedean" 等价于

$$\forall x\geqslant 0,\ \forall y\in C,\ \exists n\in\mathbb{N},\ (ny>x),$$

或 0 是 A 中任意正元序列 $\{2^{-n}x\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个 C-极限. 然而, 应注意到一个 C-Archimedean 格序群不必是 Archimedean (见例 2.7 和定理 2.9), 反之, Archimedean 格序群也未必是 C-Archimedean (见例 3.3).

一个格序群 A 是单的当且仅当 A 的任一严格正元 y 是一个强单位 [6]:

$$\forall x\geqslant 0,\ \exists n\in\mathbb{N},\ (ny>x),$$

即, A 是实数集 $\mathbb{R}$ 的 Archimedean 线性序子群. 值得注意的是, 一个格序群是 $\mathbb{R}$ 的子群当且仅当序收敛、范数收敛和 C-收敛一致. 假设 a 是 2-可除格序群 A 的一个严格正元. 取

$$A_a=\{x\in A\ :\ x\geqslant a\}$$

并对 $n \in \mathbb{N}$ 记 $A_{a,n} = \frac{1}{2^{n-1}}A_a$. 则对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $A_{a,n+1} \supseteq A_{a,n}$. 令 $C = \cup_{n\in\mathbb{N}}A_{a,n}$, 则 C 是含有 a 的最小容许子集 [4]. 并且, 对于 2-可除 Archimedean 格序群中这样的容许子集来说, 一个 C-收敛序列显然是序收敛的. 进而易见, 如果 A 是一个 C-群, 则对任意 $a \in C$ 有 $C = \cup_{n\in\mathbb{N}}A_{a,n}$. 因此, 我们得到 C-群 A 的子集 C 是唯一的: 它刚好由 A 的强单位组成. 所以, Gusić 拓扑是自然的.

命题 2.2 若 A 为 2-可除格序群, 则 A 有一个强单位当且仅当存在容许子集 C 使得 A 是 C-群.

用范数收敛可给出 2-可除 Archimedean 格序群是单的条件刻画.

命题 2.3 若 A 是 2-可除 Archimedean 格序群, 则 A 是单的, 当且仅当 A 的任意正元序列 $\{\frac{p}{2^{n-1}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 范数收敛于 0.

证明 如果 A 是单的, 且有 A 的正元序列 $\{\frac{p}{2^{n-1}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 不依范数收敛到 0. 则存在 $\epsilon > 0$, 对于无限多 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $2^{-n}p \not< \epsilon$, 于是对几乎所有 n 有 $2^n\epsilon \leqslant p$ 成立. 这样, 由 A 的 Archimedean 性质得到 $\epsilon = 0$, 矛盾.

反之, 若 A 非单, 则存在元素 $a \in A$ 与 0 不可比. 则对所有 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\inf(na^+, a^-) = 0$, 因而 $\{\frac{a^-}{2^n}\}$ 不依范数收敛到 0[6].

文献 [7] 给出了一些序收敛和范数收敛间的有趣结果. 我们这里用序收敛来刻画 2-可除格序群的 Archimedean 性质.

命题 2.4 若 A 是 2-可除格序群, 则 A 是 Archimedean 当且仅当 A 的任意正元序列 $\{\frac{p}{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 序收敛于 0.

证明 对 $p = 0$ 结论是平凡的, 不妨假设 $p > 0$, 则只需证明序列 $\{\frac{p}{2^n}\}$ 的任意下界 l 满足 $l \leqslant 0$ 即可. 事实上, 令 l 是该序列的一个下界, 则

$$0 \leqslant s := \sup(l, 0)$$

仍是一个下界, 所以对所有 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$0 \leqslant 2^n s \leqslant p.$$

于是, 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 有 $0 \leqslant ns \leqslant p$. 由于 A 是 Archimedean, 因而 $s = 0$ 且 $l \leqslant 0$.

反之, 令 $v \in A$ 并假设对所有 $n \in \mathbb{N}$, 有 $nv \leqslant p \in A^{\geqslant 0}$. 则对所有 $n \in \mathbb{N}$ 有 $v \leqslant \frac{p}{2^n}$. 因为 $\inf_n(\frac{p}{2^n}) = 0$ 蕴涵着 $v \leqslant 0$, 所以 A 是 Archimedean.

设 S 是格序群 A 的子集, 定义 S 的 C-闭为

$$CL(S) := \{\lim_C(x_n) \in A \mid \{x_n\} \subset S\},$$

相应地, 我们说 S 是 C-闭的当且仅当 $S = CL(S)$. 对于 C-收敛, 有

命题 2.5 令 A 为 2-可除 Archimedean 格序群, a 为 A 的任意严格正元, $C = \cup_{n\in\mathbb{N}}A_{a,n}$. 则 A 的正锥 $A^{\geqslant 0}$ 是 C 的 C-闭: $A^{\geqslant 0} = CL(C)$.

证明 首先, 注意到我们有 $C = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{a}{2^{n-1}} + p \ : 0 \leqslant p \in A\}$. 特别地, 我们得到 0 是序列 $\{\frac{a}{2^{n-1}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个 C-极限. 假设 x 是序列 $\{\frac{a}{2^{n-1}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的另一个 C-极限, 则对所有 $\epsilon \in C$, 有 $N(x) < \epsilon$ 成立, 于是, 对所有 $n \in \mathbb{N}$, $N(x) < \frac{a}{2^{n-1}}$, 所以 A 的 Archimedean 性质蕴涵着 $N(x) = 0$ 且 $x = 0$. 从而 $\{\frac{a}{2^{n-1}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 C-极限是唯一的. 类似地, 应用 A 的 Archimedean 性质可以证明 A 中的任意 C-收敛序列的 C-极限唯一. 其次, 对所有 $0 \leqslant p \in A$,

显然 $\lim_n(\frac{a}{2^{n-1}}+p)=p$ 且对所有 $n\in\mathbb{N}$, 有 $\frac{a}{2^{n-1}}+p\in C$ 成立. 这样, 我们已证明 A 的正锥是 C-闭的子集.

另一方面, 令 x 是 A 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个 C-极限. 则范数的连续性 (见引理 2.12 的证明) 蕴涵着序列 $\{N(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ C-收敛于 $N(x)$. 因而 C 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的 C-极限必是正元. 所以, C-闭又是 A 的正锥的子集.

一个拓扑群既是群又是拓扑空间并使得群的加法映射和逆影射都是连续的. 注意, 一个拓扑群是 T_0, T_1, T_2 或 0 的邻域的一个基本系统之交为 0 是等价的. 由文献 [4], 我们可以提炼到下述重要结果.

定理 2.6 设 A 是格序群 (不必 2-可除), 并设 C 是 A 的一个容许子集. 则开 C-球形成 A 的一个拓扑 (C-拓扑) τ 的基. 若 A 还是 2-可除的, 则 A 是一个拓扑群.

这里不重述 Gusić 所列举的有趣例子和评注, 有兴趣的读者请参阅文献 [4]. 然而, 正如下例所证, 我们指出 C-群不一定是 Hausdorff 空间:

例 2.7 令 $A=\mathbb{R}\oplus_l\mathbb{R}$, 其中序是反字典序. 则 A 是线性序化可除群. 取 $C=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_{(0,1),n}$. 易见, A 是一个 C-群. 但是, A 在 C-拓扑下不是 T_2. 例如 $(1,0)$ 和 $(2,0)$ 不能被 C-球分离.

然而, 如果 A 的正锥是 C-闭的, 则 C-拓扑群 A 既是 C-群又是 Hausdorff 空间.

推论 2.8 设 C 是格序群 A 的一个容许子集. 若 $A^{\geqslant 0}$ 是 C-闭的, 则 A 上的 C-拓扑是 Hausdorff 的.

证明 由定理 2.6 知 A 是拓扑群. 再由 $A^{\geqslant 0}$ 闭知 $(-A^{\geqslant 0})$ 亦闭, 所以 $0=A^{\geqslant 0}\cap(-A^{\geqslant 0})$, 即证得 A 是 Hausdorff 空间.

注意, 如 A 不是 Archimedean, 则 A 中序列的 C-极限可能不唯一 (参见例 2.7). 应该说下述定理本身很有趣.

定理 2.9 设 A 是 2-可除格序群. 则下述各项等价:

(i) A 是 Archimedean;

(ii) 对任意 $a>0$, $A^{\geqslant 0}$ 相对于 $C=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_{a,n}$ 是闭的;

(iii) 对任意 $a>0$, A 相对于 $C=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_{a,n}$ 是 Hausdorff 的.

证明 由命题 2.5 和推论 2.8 易得: (i)⇒(ii)⇒(iii). (iii)⇒(i): 设 A 是非 Archimedean, 则存在 A 的严格正元 a 和 b 使得对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $nb\leqslant a$. 令 $C=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_{a,n}$, 则 b 和 $2b$ 不能在 C-拓扑中分离, 因此 A 不是 T_2 的.

评注 2.10 用文献 [8] 中的术语, C-群是一个 T_1-群使得映射 $a\mapsto -a+x+a$ (x 固定) 是连续的. 所以, 由定理 2.9 和定理 2.6 前的评注我们得到一个 Archimedean 2-可除 C-拓扑格序群是一个 C-群. 然而, 我们将在下述反例 3.3 中举出说明这对 Gusić 的一般 C-群不成立.

推论 2.11 设 A 是 Archimedean 2-可除 C-拓扑格序群, 则 A 的一个子群的闭是子群.

证明 由评注 2.10 和文献 [8, 定理 8.1] 即得.

引理 2.12 令 A 是 2-可除格序群, 则 A 相对于 A 的任意容许子集 C 是一个拓扑格.

证明 由于对任意 a, $b\in A$ 有

$$N(N(a)-N(b))\leqslant N(a+b)\leqslant N(a)+N(b)$$

成立 [1], 根据定理 2.6, 我们只需证明范数

$$N : A \to A,\ x \mapsto N(x)$$

连续. 对于任意 $\epsilon \in C$, 令 $U_{N(a),\ \epsilon}$ 是一个半径为 ϵ 围绕 $N(a)$ 的开 C-球, 并令 $U_{a,\epsilon}$ 是一个半径为 ϵ 围绕 a 的开 C-球. 取 $x \in U_{a,\epsilon}$, 则

$$\epsilon - N(N(x) - N(a)) \geqslant \epsilon - N(x-a) = \epsilon - (\epsilon - c_x) = c_x \in C,$$

这里 $\epsilon - N(x-a) = c_x \in C$. 既然 x 是任意选取的, 我们得到 $N(U_{a,\epsilon}) \subseteq U_{N(a),\ \epsilon}$, 所以格的连续性证毕.

于是, 由定理 2.6 和引理 2.12 得到

定理 2.13 2-可除格序群 A 上的任意 C-拓扑使得 A 成为一个拓扑格序群.

3 格向量空间上的 C-拓扑

易见, 文献 [4] 中以及上述格序群的 C-拓扑理论自然地可应用于向量空间. 特别地, 由定理 2.13 和推论 2.8 我们有

命题 3.1 设 L 是 Riesz 空间, 则任意 C-拓扑 τ 使得 L 成为拓扑格序群. 如果 L 是 Riesz C-空间 (即, 该格序群是 C-Archimedean) 且 $L^{\geqslant 0}$ 是闭的, 则 L 是 Archimedean. 并且, 任何 Riesz-Archimedean$C$-空间是 Archimedean 函数格.

对于 Archimedean 全序域上的 Archimedean 格向量空间, 我们有以下定理.

定理 3.2 设 F 为 Archimedean 全序域, V 为 F 上的 Archimedean 格向量空间, v 是 V 中的任意严格正元. 令 $C = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_{v,n}$, 则 V 上的 C-拓扑使得 V 成为 T_2 拓扑向量空间.

证明 由命题 3.1, 只需证明映射

$$m:\ F \times V \to V,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

连续. 对所有的 $\epsilon \in C$,

$$\epsilon - N(\lambda x - \lambda_0 x_0) \geqslant \epsilon - \|\lambda\| \cdot N(x - x_0) + N(x) \cdot \|\lambda - \lambda_0\|,$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 Archimedean 全序域 F 上的绝对值. 所以, 如我们分别选 $n \in \mathbb{N}$, $0 < \delta_{\lambda_0} \in F$ 和 $0 < \delta_{x_0} \in C$ 使得

$$\delta_{\lambda_0} < \frac{1}{2^{3+n}},\ \delta_{x_0} < \frac{\epsilon}{2^{3+n}},\ \frac{|x_0|}{2^n} < \frac{\epsilon}{8} \text{ 且 } \frac{\|\lambda_0\|}{2^n} < \frac{1}{8},$$

于是, 对所有 $\lambda \in U_{\lambda_0,\ \delta_{\lambda_0}}$ 和 $x \in U_{x_0,\delta_{x_0}}$, 我们有

$$\begin{aligned}
\epsilon - N(\lambda x - \lambda_0 x_0) &\geqslant \epsilon - (\|\lambda\|\delta_{x_0} + N(x)\delta_{\lambda_0}) \\
&\geqslant \epsilon - ((\delta_{\lambda_0} + \|\lambda_0\|)\delta_{x_0} + (\delta_{x_0} + N(x_0))\delta_{\lambda_0}) \\
&\geqslant \epsilon - \left(\left(\frac{1}{2^{3+n}} + \frac{2^n}{8} \right) \frac{\epsilon}{2^{3+n}} + \left(\frac{\epsilon}{2^{3+n}} + \frac{2^n \epsilon}{8} \right) \frac{1}{2^{3+n}} \right) \\
&\geqslant \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} \in C,
\end{aligned}$$

证毕.

现在我们举例说明不是所有的 T_2 拓扑格向量空间是 C-Archimedean, 而是所有的 T_2 拓扑格序群是 C-Archimedean.

[1] 注意, 这些不等式只在交换格序群中成立. 对于更一般的情形, 我们推荐读者参考文献 [9].

例 3.3 文献 [10] 证明了 Wilson[11] 构造的 $\mathbb{R}$ 上的任一格序 $\leqslant$ 是 Archimedean. 并且, 相对于 $\mathbb{R}$ 的每个 Wilson 序 $\leqslant$, 有一个最大 Archimedean 全序子域 F. 显然, $\mathbb{R}$ 是 F 上的格向量空间. 令 $\leqslant$ 是实数域上一个相对于最大 Archimedean 全序子域 F 的 Wilson 序, 且相对于 Wilson 序下的任意实数 $r>0$ 取 $C=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_{r,n}$. 则该 C-拓扑 τ 使得 $\mathbb{R}$ 成为一个 T_2 拓扑 Archimedean 向量空间, 但不是 C-Archimedean. 事实上, 由 Artin-Schreier 理论, 文献 [11] 中构造的序中 $\mathbb{R}$ 没有强单位, 由于该构造是通过无限多次连续的域扩张, 因此 $\mathbb{R}$ 中任意严格正元在后继域扩张中将不再是强单位. 所以这样构造序之后的 $\mathbb{R}$ 不是 C-Archimedean.

致谢 作者感谢几位审稿人的宝贵评论.

参考文献

1 Bourbaki N. Algèbre II. Paris: Massan, 1981

2 Rump W. The absolute of a topological space and its application to abelian l-groups. *Appl Categ Structures*, DOI: 10.1007/s10485-008-9133-8

3 Rump W, Yang Y C. The essential cover and the absolute cover of a schematic space. *Colloq Math*, **114**: 53–75 (2009)

4 Gusić I. A topology on lattice-ordered groups. *Proc Amer Math Soc*, **126**(9): 2593–2597 (1998)

5 Schaefer H H, Wolff M P. Topological Vector Spaces. 2nd ed. GTM 3. New York: Springer-Verlag, 1999

6 Yang Y C. Embedding of Archimedean sublattices in lattice-ordered groups. *Int Math J*, **3**(5): 549–553 (2003)

7 Selinger P. Towards a semantics for higher-order quantum computation. In: Proceedings of the second International Workshop on Quantum Programming Languages. No. 33. Turku: Turku Centre for Computer Science General Publication, 2004, 127–143

8 Kaplansky I. An Introduction to Differential Algebra. 2nd ed. Paris: Hermann, 1976

9 Yang Y C. A characterization of l-ideals in l-grougs. *Algebra Colloq*, in press

10 Yang Y C. The existence and the number of archimedean non-linear lattice orders on some real subfields. *Internet Math J*, **5**(4): 365–369 (2004)

11 Wilson R R. Lattice orders on the real field. *Pacific J Math*, **63**(2): 571–577 (1976)