中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 5 期: 593～604
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

关于广义置换子群理论中的一些公开问题

谢凤艳 ①, 郭文彬 ①*, 李保军 ②

① 徐州师范大学数学科学学院, 徐州 221116
② 成都信息工程学院, 成都 610225
* 通信作者 E-mail: wbguo@xznu.edu.cn

收稿日期: 2008-05-30; 接受日期: 2008-11-20
国家自然科学基金 (批准号: 10771180), 四川省教育厅科研基金 (批准号: 08zb059) 和成都信息工程学院引进人才科研启动项目

摘要 群 G 的子群 H 称为在 G 中弱 s-可补的, 如果 G 有子群 T, 使得 $HT=G$ 且 $H\cap T\leqslant H_{sG}$. 这里 H_{sG} 是包含在 H 中的 G 的最大的 s-置换子群. 本文构造了一个例子说明在 [J Algebra, **315**: 192–209, 2007] 中的公开问题 6.3 和 6.4 是不成立的, 并且证明了在许多情况下公开问题 6.4 成立. 由此统一和推广了一系列已知结果.

关键词 有限群 群系 弱 s-可补充子群 极大子群 极小子群

MSC(2000) 主题分类 20D10, 20D20

1 引言

本文中所有群皆为有限群.

如果对于 G 的任意 Sylow 子群 P 都有 $PH=HP$, 群 G 的一个子群 H 称为在 G 中 s-置换的. 在文献 [1] 中, 作者引入了下面广义 s-置换子群的概念: 1) 群 G 的一个子群 H 称为在 G 中弱 s-置换的, 如果 G 有次正规子群 T, 使得 $HT=G$ 且 $H\cap T\leqslant H_{sG}$. 2) 群 G 的一个子群 H 称为在 G 中弱 s-可补的, 如果 G 有子群 T, 使得 $HT=G$ 且 $H\cap T\leqslant H_{sG}$, 其中 H_{sG} 是包含在 H 中的 G 的最大 s-置换子群. 此外, 在文献 [1] 中, 作者提出了下列问题:

公开问题 1 ([1, 问题 6.4]) 设 $\mathfrak{F}$ 是包含所有超可解群的一个饱和群系, G 是一个群且 G 有一个正规子群 E, 使得 $G/E\in\mathfrak{F}$. 假设 E 的每一个非循环 Sylow 子群 P 有一个子群 D 满足 $1<|D|<|P|$ 且 P 的所有满足 $|H|=|D|$ 和 $|H|=2|D|$ (若 P 是非交换 2- 群且 $|P:D|>2$) 的子群 H 在 G 中弱 s-可补. 则 $G\in\mathfrak{F}$?

本文证明了下面的三个定理, 它们说明了在许多情形下 (对极大子群和极小子群) 这个公开问题是成立的.

定理 A 设 $\mathfrak{F}$ 是包含所有超可解群的一个饱和群系. 则群 $G\in\mathfrak{F}$ 的充要条件是 G 有一个正规子群 E 使得 $G/E\in\mathfrak{F}$ 且 E 的每个非循环 Sylow 子群的在 G 中没有 $\mathfrak{U}$-补充的极大子群在 G 中弱 s-可补.

引用格式: 谢凤艳, 郭文彬, 李保军. 关于广义置换子群理论中的一些公开问题. 中国科学 A, 2009, 39(5): 593–604
Xie F Y, Guo W B, Li B J. On some open questions in theory of generalized permutable subgroups. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0045-3

定理 B 设 $\mathfrak{F}$ 是包含所有超可解群的一个饱和群系. 则群 $G \in \mathfrak{F}$ 的充要条件是 G 有正规子群 E, 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$ 且 E 的每一个非循环 Sylow 子群的在 G 中没有 $\mathfrak{U}$-补充的素数阶循环子群或 4 阶循环子群 (若 E 的 Sylow 2-子群是非交换的) 在 G 中弱 s-可补.

定理 C 设 p 是一个素数, $\mathfrak{F}$ 是包含所有 p-幂零群的一个饱和群系. 假设对某一个不小于 1 的整数 n, 群 G 的阶满足 $(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))$=1. 则 $G \in \mathfrak{F}$ 的充要条件是 G 有一个正规子群 E, 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$ 且 E 有一个 Sylow p-子群 P, 使得 P 的每个在 G 中没有 p-幂零补充的 n-极大子群 (如果存在) 在 G 中弱 s-可补.

然而, 在第 4 节, 我们构造了一个例子说明在一般情况下上面的公开问题是不成立的. 同时, 这个例子还说明了另一个类似的公开问题 (参见文献 [1; 问题 6.3]) 也是不成立的.

在第 5 节, 我们指出了在许多文章中的结果都是我们定理的特殊情况.

文中未交待的符号和术语都是标准的, 读者可参阅专著 [2, 3].

2 预备知识

回想, 一个群类 $\mathfrak{F}$ 称为一个群系, 如果 $\mathfrak{F}$ 是关于同态像和次直积闭的. 一个群系 $\mathfrak{F}$ 称为饱和的, 如果它包含所有满足 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ 的群 G. 群系 $\mathfrak{F}$ 称为 s-闭的, 如果当 $G \in \mathfrak{F}$ 时, 则 G 的每个子群也属于 $\mathfrak{F}$. 我们用 $\mathfrak{U}$ 表示所有超可解群的群类. 众所周知, $\mathfrak{U}$ 是一个 s-闭的饱含群系. 设 $\mathfrak{F}$ 是一群系. 我们称群 G 的子群 H 在 G 中 $\mathfrak{F}$-可补充, 如果 G 有一个子群 $T \in \mathfrak{F}$, 使得 $HT = G$. 在这种情况下, 称 T 是 H 在 G 中的一个 $\mathfrak{F}$-补充.

为方便读者, 我们列举一些已知结果. 它们在后面的证明中是有用的.

引理 2.1 ([4, 推论 7.7.2]) 设 G 是一个可解群, $A \leqslant G$. 则:

(1) 如果 A 是 G 的次正规 Hall-子群, 那么 $A \trianglelefteq G$.

(2) 如果 A 是 G 的次正规 π-子群, 那么 $A \leqslant O_\pi(G)$.

引理 2.2 设 H 是群 G 的一个 s-置换子群. 则:

(1) H 在 G 中次正规 (参见文献 [5, 推论 I.6.3] 和 [1, 引理 2.6]).

(2) 如果 H 是 p-群, 对某个素数 p, 那么 $O^p(G) \leqslant N_G(H)$ (参见文献 [6; 引理 A]).

引理 2.3 ([5, 定理 I.6.1]) 设 G 是一个群且 $H \leqslant G$. 则

(1) 如果 H 在 G 中 s-置换且 θ 是 G 的一个同态映射, 那么 H^θ 在 G^θ 中 s-置换.

(2) 如果 $H \leqslant K \leqslant G$ 且 H 在 G 中是 s-置换的, 那么 H 在 K 中 s-置换.

引理 2.4 ([1, 引理 2.8]) 设 G 是一个群, $H \leqslant K \leqslant G$. 则下列断言成立

(1) H_{sG} 在 G 中 s-置换且 $H_G \leqslant H_{sG}$.

(2) $H_{sG} \leqslant H_{sK}$.

(3) 如果 H 在 G 中正规, 那么 $(K/H)_{s(G/K)} \leqslant K_{sG}/H$.

(4) 如果 H 是 G 的 Sylow 子群或者是 G 的极大子群, 那么 $H_{sG} = H_G$.

引理 2.5 ([7, 引理 2.3]) 设 $\mathfrak{F}$ 是包含 $\mathfrak{U}$ 的一个饱含群系, G 是一个群且有一个正规子群 E, 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$. 如果 E 循环, 则 $G \in \mathfrak{F}$.

引理 2.6 ([8, 引理 3.10]) 设 G 是一个群, p 和 q 是 $|G|$ 的两个不同的素因子, P 是 G 的一个非循环 Sylow$p$-子群且 Q 是 G 的 Sylow q-子群. 如果 P 的所有 (可能只有一个) 极大子群在 G 中有 q-闭补充, 则 G 是 q-闭的.

下面引理是显然成立的.

引理 2.7 设 $\mathfrak{F}$ 是群系, H 是群 G 的一个 $\mathfrak{F}$-可补充子群.

(1) 如果 $N \trianglelefteq G$, 则 HN/N 在 G/N 中 $\mathfrak{F}$-可补充.

(2) 如果 $H \leqslant K \leqslant G$ 且 $\mathfrak{F}$ 是 s-闭的, 则 H 在 K 中 $\mathfrak{F}$-可补充.

引理 2.8 ([1, 引理 2.10]) 设 G 是一个群, $H \leqslant K \leqslant G$. 则下列断言成立:

(i) 如果 H 在 G 中弱 s-可补, 则 H 在 K 中弱 s-可补;

(ii) 假设 $H \trianglelefteq G$. 则 K/H 在 G/H 中弱 s-可补当且仅当 K 在 G 中弱 s-可补.

(iii) 如果 $H \trianglelefteq G$, 则对于每个在 G 中弱 s-可补的且满足 $(|E|, |H|) = 1$ 的子群 E, 有 HE/H 在 G/H 中弱 s-可补.

引理 2.9 假设群 G 的每个非循环的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 $\mathfrak{U}$-可补充. 则 G 是超可解的.

证明 假设引理不真, 并令 G 为极小阶反例. 设 p 是 $|G|$ 的一个最大素因子, 且 P 是 G 的一个 Sylow p-子群. 我们断言: P 在 G 中正规. 事实上, 设 q 是 $|G|$ 的最小素因子, 且 Q 是 G 的一个 Sylow q-子群. 如果 Q 循环, 那么由文献 [3, 定理 IV. 2.8] 知, G 是 q-幂零的. 因此 G 有正规 Hall q'-子群 T. 由引理 2.7 知, T 满足假设条件. 由 G 的极小选择知, T 是超可解的. 由此得到 $P \trianglelefteq T$, 从而 $P \trianglelefteq G$. 如果 Q 非循环, 那么 Q 的每个极大子群在 G 中有 $\mathfrak{U}$-补充 T. 由 p 的极大性知, T 是 p-闭的. 从而由引理 2.6, $P \trianglelefteq G$. 于是我们的断言成立. 设 N 是包含在 P 中 G 的一个极小正规子群. 则 N 是初等交换 p-群. 由引理 2.7 知, G/N 满足引理假设. 由 G 的选择, G/N 是超可解的. 从而 N 是包含在 P 中 G 的唯一极小正规子群且 $N \not\subseteq \Phi(G)$. 因此 $P = O_p(G) = N$. 因为 G/P 是超可解的但 G 非超可解, 所以由引理 2.5 知, P 非循环. 由假设, P 的每个极大子群 P_1 在 G 中有 $\mathfrak{U}$-补充 T. 这表明 $PT = G$. 因为 $P = N$ 是交换的, 所以 $P \cap T$ 在 G 中正规. 又因为 P 是 G 的极小正规子群, 所以 $P \cap T = 1$ 或者 $P \cap T = P$. 如果 $P \cap T = 1$, 那么 $|P||T| = |G| = |P_1||T|$. 这是不可能的. 故 $P \cap T = P$, 从而 $G = T$ 是超可解的. 这一最后的矛盾完成了引理的证明.

引理 2.10 ([1, 引理 2.11]) 设 N 是群 G 的一个初等交换正规子群. 假设 N 有一个子群 D 满足 $1 < |D| < |N|$ 且 N 的所有满足 $|H = |D|$ 的子群 H 在 G 中弱 s-置换. 则 N 的某个极大子群在 G 中正规.

引理 2.11 设 G 是一个群, p 是一个素数且对某一个 $\geqslant 1$ 的整数 n, $p^{n+1} \nmid |G|$. 如果 $(|G|, (p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))$=1, 那么 G 是 p-幂零的.

证明 假设引理不真, 并令 G 为一个极小阶反例. 显然, G 的每个子群满足引理的条件. 由 G 的极小选择知, G 是极小非 p-幂零群. 由文献 [9, 定理 10.3.3] 和 [2, 定理 3.11] 知, $G = [P]Q$ 是两个 Sylow 子群的半直积. 易见 G 的每个真商群也满足引理的条件. 因此 $\Phi(P) = \Phi(G) = 1$. 从而 P 是初等交换 p-群. 因为 $|P| \leqslant p^n$, 所以 $|\mathrm{Aut}_G(P)|$ 整除 $(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)$. 又因为 $N_G(P)/C_G(P) \simeq \mathrm{Aut}_G(P)$, 所以由条件知 $N_G(P)/C_G(P) = 1$. 因此由文献 [9, 定理 10.1.8] 知, G 是 p-幂零的. 这一矛盾完成了引理的证明.

引理 2.12 设 p 是一个素数, G 是一个群且 $(|G|, p-1)$=1. 假设 P 是 G 的一个 Sylow p-子群且 P 的每个极大子群在 G 中 p-幂零可补充. 则 G 是 p-幂零的.

证明 如果 $p^2 \nmid |G|$, 那么由引理 2.11 知, G 是 p-幂零的. 假设 $p^2||G|$, 并令 P_1 是 P 的极大子群. 由假设, P_1 在 G 中有 p-幂零补充 T_1. 设 K_1 是 T_1 的一个正规 Hall p'-子群. 显然, K_1 是 G 的一个 Hall p'-子群. 因此 $G = P_1T_1 = P_1N_{T_1}(K_1) = P_1N_G(K_1)$. 我们断言: K_1 在 G

中正规. 事实上, 如果 K_1 在 G 中不正规, 那么 $N_P(K_1)=N_G(K_1)\cap P\neq P$. 从而 P 有极大子群 P_2, 使得 $N_P(K_1)\leqslant P_2$. 因为 $P=P\cap G=P\cap P_1N_G(K_1)=P_1(P\cap N_G(K_1))=P_1N_P(K_1)$, 所以 $P_1\neq P_2$. 由假设, P_2 在 G 中 p-幂零可补充. 重复上面的过程, 我们可以找到 G 的一个 Hall p'-子群 K_2 使得 $G=P_2N_G(K_2)$. 如果 $p=2$, 那么由 [10; 主要定理] 知, K_1 和 K_2 在 G 中共轭. 如果 $p>2$, 那么由 Feit-Thompson 定理知, G 是可解的. 从而 K_1 和 K_2 在 G 中共轭. 即存在 $g\in P$ 使得 $(K_2)^g=K_1$. 则 $G=(P_2N_G(K_2))^g=P_2N_G(K_1)$. 从而 $P=P\cap G=P\cap P_2N_G(K_1)=P_2(P\cap N_G(K_1))=P_2N_P(K_1)=P_2$. 此矛盾完成了引理的证明.

3　定理 A, B 和 C 的证明

定理 A 的证明　必要性是显然的, 我们仅需证明充分性. 假设充分性不成立. 选定一个饱和群系 $\mathfrak{F}$, 并设 G 是一个极小阶反例. 则

(1) E 是可解的.

显然, $E/E\in\mathfrak{U}$. 由引理 2.7 和 2.8, 我们知道 E 的每个非循环 Sylow 子群的极大子群要么在 E 中 $\mathfrak{U}$-可补充, 要么在 E 中是弱 s-可补的. 如果 $E<G$, 那么由 G 的选择可知, E 是超可解的. 因此我们能够假设 $G=E$. 在这种情形下, $G/E\in\mathfrak{U}$.

假设对 $|G|$ 的任意素因子 p, 有 $O_p(G)$=1. 由引理 2.9, 存在一个素数 p 整除 $|G|$ 使得 G 有一个非循环的 Sylow p-子群 P 且 P 有一个极大子群 P_1 在 G 中不是 $\mathfrak{U}$-可补充的. 则由定理的条件, P_1 在 G 中弱 s-可补. 从而在 G 中存在一个非超可解子群 T 使得 $P_1T=G$ 且 $P_1\cap T\leqslant(P_1)_{sG}$. 由引理 2.1 和 2.2 知, $P_1\cap T\leqslant O_p(G)=1$. 于是 $|T|_p=p$. 显然, $T/T\in\mathfrak{U}$. 假设 Q 是 T 的一个非循环的 Sylow q-子群, 其中 q 是整除 $|T|$ 的一个素数. 则 $q\neq p$ 且 Q 是 G 的一个非循环的 Sylow q-子群. 由假设, Q 的每个极大子群在 G 中要么 $\mathfrak{U}$-可补充, 要么弱 s-可补. 因此, 由引理 2.7 和 2.8 知, Q 的每个极大子群在 T 中要么 $\mathfrak{U}$-可补, 要么弱 s-可补. 这表明 $(\mathfrak{U}, T)$ 满足定理的条件. 由 G 的选择知, T 是超可解的. 这一矛盾说明了存在某个素数 p 整除 $|G|$ 使得 $O_p(G)\neq 1$.

现在我们声称: $(\mathfrak{U}, G/O_p(G))$ 满足定理的条件. 事实上, $(G/O_p(G))/(G/O_p(G))\in\mathfrak{U}$. 假设 $q\in\pi(G/O_p(G))$ 且 $T/O_p(G)$ 是 $G/O_p(G)$ 的一个非循环的 Sylow q-子群. 如果 $q=p$, 那么 T 是 G 的非循环 Sylow q-子群. 对 $T/O_p(G)$ 的任意一个极大子群 $T_1/O_p(G)$, T_1 也是 T 的一个极大子群. 由假设, T_1 在 G 中要么 $\mathfrak{U}$-可补充, 要么弱 s-可补. 应用引理 2.7 和 2.8 知, $T_1/O_p(G)$ 在 $G/O_p(G)$ 中要么 $\mathfrak{U}$-可补充, 要么弱 s-可补. 现在假设 $q\neq p$. 令 $T_1/O_p(G)$ 是 $T/O_p(G)$ 的一个极大子群, Q_1 是 T_1 的一个 Sylow q-子群. 则 T 有 Sylow q-子群 Q 使得 $Q_1=Q\cap T_1$. 显然, $T=QO_p(G)$, $T_1=Q_1O_p(G)$, Q 非循环且 Q_1 是 Q 的极大子群. 由假设, Q_1 在 G 中要么 $\mathfrak{U}$-可补充, 要么弱 s-可补. 由引理 2.7 和 2.8 知, $T_1/O_p(G)=Q_1O_p(G)/O_p(G)$ 在 $G/O_p(G)$ 中要么 $\mathfrak{U}$-可补充, 要么弱 s-可补. 这表明 $G/O_p(G)$ 满足定理的条件. 因此, 由 G 的选择, $G/O_p(G)$ 是超可解的, 从而 G 可解. 于是 (1) 成立.

(2) 设 X 是 E 的任意 Hall 子群. 如果 X 是 G 的真子群, 则 X 是超可解的.

显然, $X/X\in\mathfrak{U}$. 设 P 是 X 的一个非循环 Sylow p-子群且 P_1 是 P 的一个极大子群. 则 P 是 E 的非循环 Sylow p-子群. 由假设, P_1 在 G 中要么 $\mathfrak{U}$-可补充, 要么弱 s-可补. 由引理 2.7 和 2.8 知, P_1 在 X 中要么 $\mathfrak{U}$-可补充, 要么弱 s-可补. 于是 $(\mathfrak{U}, X)$ 满足定理的条件, 从而

由 G 的选择知, X 是超可解的.

(3) 设 N 是包含在 E 中的 G 的一个极小正规子群. 则 N 是交换的, $G/N \in \mathfrak{F}$ 且 $E/N \in \mathfrak{U}$.

因为由 (1) 知, E 是可解的, 所以 N 是交换的. 用类似上面的方法, 我们可以证明 ($\mathfrak{F}$, G/N) 和 ($\mathfrak{U}$, E/N) 满足定理的条件. 由 G 的选择, $G/N \in \mathfrak{F}$ 且 $E/N \in \mathfrak{U}$.

(4) N 是包含在 E 中的 G 的唯一极小正规子群且对某一素数 p, 有 $N = O_p(E) = F(E)$.

因为 $\mathfrak{F}$ 是饱和群系, 所以由 (3) 知, N 是包含在 E 中的 G 的唯一极小正规子群且 $N \nleqslant \Phi(G)$. 选择 G 的一个极大子群 M 使得 $G = [N]M$, 并假设 N 是 p-群. 那么 $F(E) = F(E) \cap NM = N(F(E) \cap M)$. 因为 $N \leqslant O_p(E) \leqslant F(E) \leqslant F(G) \leqslant C_G(N)$, 所以 $F(E) \cap M \trianglelefteq G$. 因此 $F(E) \cap M=1$. 从而 $N = O_p(E) = F(E)$.

(5) N 是 E 的非循环 Sylow p-子群.

由引理 2.5 和 (3) 知, N 非循环. 设 q 是 $|E|$ 的最大素因子, 并设 Q 是 E 的一个 Sylow q-子群. 则 QN/N 是 E/N 的一个 Sylow q-子群. 设 P 是 E 的 Sylow p-子群. 因为 E/N 是超可解的, 所以 $NQ/N \trianglelefteq E/N$. 故 $QN \trianglelefteq E$. 如果 $q = p$, 那么 $P = Q = QN \trianglelefteq E$. 由 (4) 知, $N = O_p(E) = P$ 是 E 的 Sylow p-子群. 现在假设 $q > p$. 则 $PQ = PNQ$ 是 E 的 Hall 子群. 如果 $PQ < G$, 那么由 (2) 知, PQ 是超可解的. 于是 $Q \trianglelefteq PQ$, 从而 $Q \trianglelefteq QN$. 故 $Q \trianglelefteq E$. 这与 (4) 矛盾. 因此 $G = PQ = E$ 且 Q 在 G 中不正规. 假设 $N < P$. 由 Frattini 论断, $G = QNN_G(Q) = NN_G(Q)$. 因为 N 非循环, 所以 P 非循环. 由引理 2.6 知, 存在 P 的一个极大子群 P_1 使得 P_1 在 G 中没有 q-闭补充. 于是 P_1 在 G 中非 $\mathfrak{U}$-可补充. 因此, 由假设知, G 有子群 T, 使得 $P_1T = G$ 且 $P_1 \cap T \leqslant (P_1)_{sG}$. 由 P_1 的选择, T 不是 p-幂零的. 由引理 2.1 和 2.2, $O^p(G) \leqslant N_G((P_1)_{sG})$ 且 $P_1 \cap T \leqslant (P_1)_{sG} \leqslant O_p(G) = N$. 因此 $(P_1)_{sG} \leqslant P_1 \cap N$. 从而 $(P_1)_{sG} \leqslant ((P_1)_{sG})^G = ((P_1)_{sG})^{O^p(G)P} =((P_1)_{sG})^P \leqslant (P_1 \cap N)^P = P_1 \cap N \leqslant N$. 故 $((P_1)_{sG})^G = 1$ 或者 $((P_1)_{sG})^G = P_1 \cap N = N$. 如果 $((P_1)_{sG})^G = 1$, 那么 $P_1 \cap T = 1$, 从而 $|T|_p = p$. 故 T 是 p-幂零的, 矛盾. 如果 $((P_1)_{sG})^G = P_1 \cap N = N$, 那么 $N \leqslant P_1$. 于是 $G = NN_G(Q) = P_1N_G(Q)$. 这意味着 P_1 在 G 中有 q-闭补充, 再次矛盾. 因此 $N = P$ 是 E 的 Sylow p-子群.

(6) 最后的矛盾.

由 (3) 和 (4) 及其证明知, $G = [N]M$, 其中 M 是 G 的一个极大子群. 设 M_p 是 M 的一个 Sylow p-子群, 则 $P = NM_p$ 是 G 的一个 Sylow p-子群. 令 $N_1 = N \cap P_1$, 其中 P_1 是 P 的包含 M_p 的极大子群. 则 $P = NP_1$, N_1 是 N 的极大子群且 $N_1 \trianglelefteq P$. 设 T 是 N_1 在 G 中的任意一个补充. 则 $N_1T = G$. 从而 $NT = G$ 且 $N = N \cap N_1T = N_1(N \cap T)$. 这说明 $N \cap T \neq 1$. 但因为 $N \cap T$ 在 G 中正规且 N 是 G 的极小正规子群, 所以 $N \cap T = N$. 因此 $T = G$ 非超可解. 由假设, N_1 在 G 中弱 s-可补. 从而对于 G 的某个子群 T, $G = N_1T$ 且 $N_1 \cap T \leqslant (N_1)_{sG}$. 因为 $T = G$, 所以 $N_1 = (N_1)_{sG}$ 在 G 中 s-置换. 由引理 2.2 知, $O^p(G) \leqslant N_G(N_1)$. 因此 $N_1 \trianglelefteq PO^p(G) = G$. 这一矛盾完成定理的证明.

定理 B 的证明 因为必要性是显然的, 所以我们仅给出充分性的证明. 假设充分性不成立, 选定一个饱和群系 $\mathfrak{F}$, 并设 G 是一个极小阶反例. 则

(1) E 是可解的.

设 T 是 E 的一个真子群. 则 $|T| < |G|$ 且 $T/T \in \mathfrak{U}$. 设 $\langle x \rangle$ 是 T 的任一非循环 Sylow

子群的一个循环子群且 $|\langle x\rangle|$ 是一个素数或者 $|\langle x\rangle|=4$ (如果 T 的 Sylow 2- 子群非交换). 显然 $\langle x\rangle$ 也是 E 的非循环 Sylow 子群的循环子群且 $|\langle x\rangle|$ 为一个素数或者 $|\langle x\rangle|=4$ (如果 E 的 Sylow 2- 子群非交换). 由假设, $\langle x\rangle$ 在 G 中要么 $\mathfrak{U}$-可补充, 要么弱 s-可补. 由引理 2.7 和 2.8 知, $\langle x\rangle$ 在 T 中要么 $\mathfrak{U}$-可补充, 要么弱 s-可补. 这说明 $(\mathfrak{U}, T)$ 满足定理的条件. 因此, 由 G 的极小选择知, T 是超可解的. 由文献 [2, 定理 3.11.9] 知, E 是可解的.

(2) $G^{\mathfrak{F}}$ 是 p-群, 其中 $G^{\mathfrak{F}}$ 是 G 的 $\mathfrak{F}$-剩余, p 是某个素数. 如果令 $P=G^{\mathfrak{F}}$. 则 $P/\Phi(P)$ 是 G 的主因子且 $\exp(P)=p$ 或者 $\exp(P)=4$ (若 $|p|=2$ 且 P 非交换).

因为 $G/E\in\mathfrak{F}$, 所以 $G^{\mathfrak{F}}\subseteq E$. 设 T 是 G 的一个极大子群且满足 $G^{\mathfrak{F}}\nsubseteq T$ (即 T 是 G 的一个 $\mathfrak{F}$-伪正规极大子群). 则 $TE=G$. 我们断言 $(\mathfrak{F}, T)$ 满足定理的条件. 事实上, $T/T\cap E\cong TE/E=G/E\in\mathfrak{F}$. 用类似上面的方法, 我们可以证明 $(\mathfrak{F}, T)$ 满足定理的条件. 由 G 的选择, $T\in\mathfrak{F}$. 于是由文献 [2, 定理 3.4.2] 知, (2) 成立.

(3) 对于任意元素 $x\in P=G^{\mathfrak{F}}$, $\langle x\rangle$ 在 G 中 s-置换.

设 $x\in P$. 则由 (2) 知, $|x|=p$ 或者 $|x|=4$. 设 T 是 $\langle x\rangle$ 在 G 中的一个补充. 则 $G=\langle x\rangle T$, 从而 $P=P\cap G=P\cap\langle x\rangle T=\langle x\rangle(P\cap T)$. 因为 $P/\Phi(P)$ 交换, 所以 $(P\cap T)\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$. 因此 $(P\cap T)\Phi(P)\trianglelefteq G$. 而 $P/\Phi(P)$ 是 G 的主因子, 故 $P\cap T\leqslant\Phi(P)$ 或者 $P=(P\cap T)\Phi(P)=P\cap T$. 如果对 $\langle x\rangle$ 的某个补充 T 有 $P\cap T\leqslant\Phi(P)$ 成立, 那么 $\langle x\rangle=P\trianglelefteq G$. 显然 $\langle x\rangle$ 在 G 中是 s-置换的. 现在我们假设对于 $\langle x\rangle$ 的任意补充 T 都有 $P\cap T=P$. 那么 $T=G$ 是 $\langle x\rangle$ 在 G 中的唯一补充. 因为 $T=G$ 非超可解的, 所以由假设, $\langle x\rangle$ 在 G 中是弱 s-可补. 于是 $\langle x\rangle=\langle x\rangle\cap T\leqslant\langle x\rangle_{sG}$. 从而 $\langle x\rangle=\langle x\rangle_{sG}$ 在 G 中 s-置换.

(4) $|P/\Phi(P)|=p$.

假设 $|P/\Phi(P)|\neq p$, 且设 $T/\Phi(P)$ 是 $P/\Phi(P)$ 的任一循环子群. 对任意 $x\in T\setminus\Phi(P)$, 有 $T=\langle x\rangle\Phi(P)$. 由 (3) 知, $\langle x\rangle$ 在 G 中 s-置换的. 因此, 由引理 2.3 知, $T/\Phi(P)$ 在 $G/\Phi(P)$ 中 s-置换. 从而, 由引理 2.10 知, $P/\Phi(P)$ 有一个极大子群在 $G/\Phi(P)$ 中正规. 这与 $P/\Phi(P)$ 是 G 的主因子矛盾. 因此 $|P/\Phi(P)|=p$.

(5) 最后的矛盾.

因为 $P=G^{\mathfrak{F}}$, 所以 $G/P\in\mathfrak{F}$. 从而 $(G/\Phi(P))/(P/\Phi(P))\cong G/P\in\mathfrak{F}$. 由引理 2.5, $G/\Phi(P)\in\mathfrak{F}$. 因为 $\Phi(P)\leqslant\Phi(G)$ 且 $\mathfrak{F}$ 是饱和群系, 所以 $G\in\mathfrak{F}$. 这一最后的矛盾完成定理的证明.

注 我们听审稿人说在参考文献 [11](待发表) 中, 其作者也给出了与定理 B 相同的结果, 但证明方法不同.

群 G 的子群 M_n 称为 G 的一个 n-极大子群, 如果 G 有子群列: $M_n<M_{n-1}<\cdots<M_1<M_0=G$, 使得 M_i 是 M_{i-1} 的极大子群, 对所有 $i=1,\ldots,n$.

为证明定理 C, 我们首先证明下面结果.

引理 3.1 设 G 是一个群, p 是一素数满足对某个不小于 1 的整数 n, 有 $(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))$=1. 假设 G 有一个 Sylow p-子群 P 使得 P 的每个 n-极大子群 (如果存在) 在 G 中要么 p-幂零可补充, 要么弱 s-可补, 则 G 是 p-幂零的.

证明 假设引理不成立, 并设 G 为一个极小阶反例. 由引理 2.11 知, $p^{n+1}||G|$. 故 P 有非单位的 n-极大子群. 由引理 2.12 知, 存在 P 的极大子群 P_1 使得 P_1 在 G 中没有 p-幂零补充. 于是 P 的包含在 P_1 中的每个 n-极大子群 P_n 在 G 中没有 p-幂零补充. 因此, 由假设,

G 有一个非 p-幂零子群 T, 使得 $P_nT = G$ 且 $P_n \cap T \leqslant (P_n)_{sG}$.

(1) $P_n \cap T \neq 1$ 且 $O_p(G) \neq 1$.

假设 $P_n \cap T = 1$. 那么 $|T|_p = p^n$. 由引理 2.11, T 是 p-幂零的. 这一矛盾说明 $P_n \cap T \neq 1$. 由引理 2.1 和 2.2 知, $(P_1)_{sG} \leqslant O_p(G)$. 故 $O_p(G) \neq 1$.

(2) G/L 是 p-幂零的, 对于包含在 $O_p(G)$ 中 G 的任意非单位正规子群 L.

如果 $p^{n+1} \nmid |G/L|$. 由引理 2.11, G/L 是 p-幂零的. 因此我们不妨假设 $p^{n+1} || G/L|$. 设 M_n/L 是 P/L 的任意一个 n-极大子群. 显然, M_n 也是 P 的 n-极大子群. 由假设, M_n 在 G 中要么 p-幂零可补充, 要么弱 s-可补. 于是由引理 2.7 和 2.8, M_n/L 在 G/L 中要么 p-幂零可补充, 要么弱 s-可补. 由 G 的极小选择, G/L 是 p-幂零的.

(3) $N = O_p(G)$ 是 G 的极小正规子群, 且对于 G 的某个极大子群 M 有 $G = [N]M$ 且 M 是 p-幂零群.

设 N 是包含在 $O_p(G)$ 中 G 的一个极小正规子群. 显然, N 是初等交换 p-群. 由 (2) 知, N 是包含在 $O_p(G)$ 中 G 的唯一极小正规子群且 $N \nsubseteq \Phi(G)$. 因此, 存在 G 的极大子群 M 使得 $G = [N]M$. 从而 $M \simeq G/N$ 是 p-幂零的且 $O_p(G) = O_p(G) \cap NM = N(O_p(G) \cap M)$. 因为 $N \leqslant O_p(G) \leqslant F(G) \leqslant C_G(N)$, 所以 $O_p(G) \cap M$ 在 G 中正规. 这导致了 $O_p(G) \cap M{=}1$. 于是 $N = O_p(G)$.

(4) 最后的矛盾.

由引理 2.1 和 2.2, $O^p(G) \leqslant N_G((P_n)_{sG})$ 且 $P_n \cap T \leqslant (P_n)_{sG} \leqslant O_p(G) = N$. 所以 $(P_n)_{sG} \leqslant P_1 \cap N$. 从而 $1 \neq (P_n)_{sG} \leqslant ((P_n)_{sG})^G = ((P_n)_{sG})^{O^p(G)P} = ((P_n)_{sG})^P \leqslant (P_1 \cap N)^P = P_1 \cap N \leqslant N$. 因为 N 是 G 的极小正规子群, 所以 $((P_n)_{sG})^G = P_1 \cap N = N$. 故 $N \leqslant P_1$. 从而 $G = NM = P_1M$. 这说明 P_1 在 G 中有 p-幂零补充 M. 这与 P_1 的选择矛盾. 这最后的矛盾完成了引理的证明.

定理 C 的证明 必要性是显然的, 我们仅仅需要证明充分性. 假设充分性不成立, 并令 G 为一个极小阶反例. 由引理 2.7 和 2.8 知, P 的每个 n-极大子群在 E 中要么 p-幂零可补充, 要么弱 s-可补. 于是由引理 3.1 知, E 是 p-幂零的. 显然 $E \neq G$. 设 T 是 E 的一个正规 Hall p'-子群. 现在我们分以下步骤证明:

(1) $T{=}1$. 从而 $P = E \trianglelefteq G$.

假设 $T \neq 1$. 因为 T 是 E 的正规 Hall p'-子群且 $E \trianglelefteq G$, 所以 $T \trianglelefteq G$. 我们断言 G/T (相对于 E/T 来说) 满足定理的条件. 事实上, $(G/T)/(E/T) \simeq G/E \in \mathfrak{F}$, 且 $E/T = PT/T$ 是 p-群. 假设 M_n/T 是 PT/T 的一个 n-极大子群, 且 $P_n = M_n \cap P$. 则 P_n 是 P 的 n-极大子群, 且 $M_n = P_nT$. 由假设, P_n 在 G 中要么 p-幂零可补充, 要么弱 s-可补. 由引理 2.7 和 2.8 知, $M_n/T = P_nT/T$ 在 G/T 中要么 p-幂零可补充, 要么弱 s-可补. 由引理 3.1 知, G/T 是 p-幂零的. 这推出 G 也是 p-幂零的. 因此 $G \in \mathfrak{F}$, 这一矛盾说明 $T = 1$, 从而 $P = E \trianglelefteq G$.

(2) 假设 Q 是 G 的一个 Sylow q-子群, 其中 q 是 $|G|$ 的一个素因子且 $q \neq p$, 那么 $PQ = P \times Q$.

由 (1), $P = E \trianglelefteq G$. 于是 PQ 是 G 的一个子群. 由引理 2.7 和 2.8 知, P 的每个 n-极大子群在 PQ 中要么 p-幂零可补充, 要么弱 s-可补. 因此, 由引理 3.1 知, PQ 是 p-幂零的. 从而 $Q \trianglelefteq PQ$. 故 $PQ = P \times Q$.

(3) 最后的矛盾.

设 H 是包含在 P 中的 G 的任一非单位正规子群且 G_p 是 G 的 Sylow p-子群. 由 (2), 对于 G 任意的 Sylow q-子群 Q, 其中 $q \neq p$, 我们有 $HQ = H \times Q$. 故 $O^p(G) \leqslant C_G(H)$, 从而 $[H,G]$=$[H,G_pO^p(G)] = [H,G_p] \trianglelefteq G$. 我们断言: $[H,G_p] < H$. 事实上, 如果 $[H,G_p] = H$, 那么对任意的非负整数 t, $H = [H,G_p,...,G_p] \leqslant {G_p}^{t+1}$, 其中 G_p 在 $[H,G_p,...,G_p]$ 中的个数为 t. 这与 [12; 定理 A.10.3] 矛盾. 因此 $[H,G_p] < H$. 从而存在 G 的正规子群 K 使得 H/K 是 G 的主因子且 $[H,G] \leqslant K$. 由此得到 $H/K \leqslant Z(G/K)$. 但因为 $G/P \in \mathfrak{F}$, 所以 $G \in \mathfrak{F}$. 这最后的矛盾完成了定理的证明.

4 两个公开问题的回答

在这一节, 我们构造一个例子说明在第一节中出现的公开问题的答案是否定的.

例子 令 $H = \langle a, b \mid a^5 = b^5 = 1, a \neq b$, 且 $ab = ba\rangle$, α 是 H 的一个 3 阶自同构其满足 $a^\alpha = b$, $b^\alpha = a^{-1}b^{-1}$. 令 $H_1 = H$, $H_2 = \langle a',\ b'\rangle$ 是 H_1 的一个副本, 且令 $G = [H_1 \times H_2]\langle\alpha\rangle$. 假设 $H_3 = \langle aa', bb'\rangle$, $H_4 = \langle aa'b, a^{-1}b'\rangle$. 那么 H_i $(i = 1,2,3,4)$ 是 G 的 25 阶极小正规子群. 从而 G 非超可解. 设 A 是 G 的任意一个 25 阶子群. 我们断言: 存在一个 $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 使得 $H_i \cap A = 1$. 如果对某个 H_i, 有 $H_i = A$. 则断言显然成立. 因此我们可以假设对所有 $i = 1,2,3,4$, $H_i \cap A$ 都是 5 阶循环群. 设 $H_1 \cap A = \langle a^{i_1}b^{j_1}\rangle$, $H_2 \cap A = \langle {a'}^{i_2}{b'}^{j_2}\rangle$, $H_3 \cap A = \langle (aa')^{i_3}(bb')^{j_3}\rangle$. 我们现在来证明 $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$.

事实上, 如果 $i_1 = 0$, 那么 $H_1 \cap A = \langle b^{j_1}\rangle = \langle b\rangle$ 且 $A = (H_1 \cap A)(H_2 \cap A) = \langle b,\ a'^{i_2}b'^{j_2}\rangle$. 因为 $(aa')^{i_3}(bb')^{j_3} \in A$, 所以 $i_3 = 0$, 从而 $i_2 = 0$. 故 $i_1 = i_2 = 0$. 然而因为对 $i = 1,2$, $H_i \cap A$ 的阶为 5, 所以我们可以假设 $j_1 = j_2 = 1$. 如果 $i_1 \neq 0$, 那么用类似上面的方法, 可以得到 $i_2, i_3 \neq 0$. 因为 $H_1 \cap A = \langle a^{i_1}b^{j_1}\rangle$ 总可以写成 $\langle ab^k\rangle$ 形式, 对某个整数 k, 所以可以假设 $i_1 = 1$. 同样我们可以假设 $i_2 = i_3 = 1$. 故 $ab^{j_1}, a'b'^{j_2}, aa'(bb')^{j_3} \in A$. 于是 $b^{j_3-j_1}b'^{j_3-j_2} \in A$. 如果 $b^{j_3-j_1}b'^{j_3-j_2} \neq 1$, 那么 $a'b'^{j_2} \in A = \langle ab^{j_1}, b^{j_3-j_1}b'^{j_3-j_2}\rangle$. 但是这显然是不可能的. 因此 $j_1 = j_2 = j_3$. 故 $i_1 = i_2$ 且 $j_1 = j_2$.

此时, 易知 $H_4 \cap A = 1$. 从而断言成立. 这表明对某个 i, $T = H_i\langle\alpha\rangle$ 是 A 在 G 中的补, 从而 A 在 G 中是弱 s-可补的.

显然, 这个群 G 满足公开问题 1 的条件, 但 G 非超可解. 故我们给出了这个公开问题 (参见文献 [1, 问题 6.4]) 的一个否定回答 (因为如果我们令 $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, 则 $\mathfrak{U}$ 本身也是一个包含所有超可解群的饱和群系).

同时, 这个例子还给出了另一个类似的公开问题 (参见 [1, 问题 6.3]) 的一个否定回答.

5 一些应用

显然, 群 G 的所有正规子群, c-正规子群, c-可补子群, s-置换子群，弱 s-置换子群都是 G 的弱 s-可补子群.

在一些文献中, 我们还可以找到下面一些概念.

设 $\mathfrak{F}$ 是一个群类. 群 G 的子群 H 称为在 G 中 $\mathfrak{F}$-s-可补的 [13], 如果 G 有一个子群 T 使得 $HT = G$ 且 $T/T \cap H_G \in \mathfrak{F}$.

群 G 的子群 H 在 G 中称为 Q-可补的 [14], 如果 G 有一个子群 T, 使得 $HT = G$ 且

$H\cap T\leqslant H_{QG}$, 其中 H_{QG} 是包含在 H 中 G 的最大拟正规 (置换) 子群.

若 H 在 G 中 Q-可补, 则显然 H 在 G 中弱 s-可补. 不难证明: 如果 $\mathfrak{F}$ 是一个饱和群系且 H 在 G 中 $\mathfrak{F}$-s-可补, 那么 H 在 G 中 $\mathfrak{F}$-可补充. 事实上, 如果 H 在 G 中 $\mathfrak{F}$-s-可补, 那么 G 有一个子群 T 使得 $HT=G$ 且 $T/T\cap H_G\in\mathfrak{F}$. 我们仅仅考虑 $T\notin\mathfrak{F}$ 的情形. 因为 $\mathfrak{F}$ 是饱和群系, 所以 $T\cap H_G\nleq\Phi(T)$. 令 $T=(T\cap H_G)T_1$. 则 $T_1<T$, $HT_1=G$ 且 $T_1/T_1\cap H_G=T_1/T_1\cap(T\cap H_G)\simeq T/T\cap H_G\in\mathfrak{F}$. 如果 $T_1\in\mathfrak{F}$, 那么 H 在 G 中 $\mathfrak{F}$-可补充. 设 $T_1\notin\mathfrak{F}$. 因为 T 是有限群, 由归纳我们可以找到 T 的一个子群 T_n 使得 $T_n\in\mathfrak{F}$ 且 $HT_n=G$, 也就是说, H 在 G 中 $\mathfrak{F}$-可补充.

因此下面结果都是定理 A 和定理 B 的特殊情况.

推论 5.1 设 $\mathfrak{F}$ 是包含 $\mathfrak{U}$ 的一个饱和群系, G 是一个群. 如果 G 有正规子群 E 使得 $G/E\in\mathfrak{F}$ 且 E 的任一非循环的 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中弱 s-可补, 那么 $G\in\mathfrak{F}$.

推论 5.2 设 G 是一个群. 如果 G 的任一非循环的 Sylow 子群的每个素数阶子群和 4 阶子群在 G 中弱 s-可补, 那么 G 是超可解的.

推论 5.3 ([15, 定理 3.3]) 设 E 是群 G 的一个正规子群使得 G/E 是超可解的. 如果 E 的任意 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中 c-正规, 那么 G 是超可解的.

推论 5.4 ([15, 定理 3.4]) 设 E 是群 G 的一个正规子群使得 G/E 是超可解的. 如果 E 的每个素数阶子群和 4 阶子群 (如果 E 的 Sylow 2-子群是非交换的) 在 G 中 c-正规, 那么 G 是超可解的.

推论 5.5 ([16]) 设 G 是奇阶群. 如果 G 的每个素数阶子群在 G 中正规, 那么 G 是超可解的.

推论 5.6 ([17]) 如果群 G 的任意 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中正规, 那么 G 是超可解的.

推论 5.7 ([18, 定理 3.7]) 如果群 G 的任意 Sylow 子群的在 G 中没有超可解补充的极大子群在 G 中正规, 那么 G 是超可解的.

推论 5.8 ([19, 定理 4.2]) 如果群 G 的每个素数阶子群和 4 阶子群在 G 中 c- 正规, 那么 G 是超可解的.

推论 5.9 ([19, 定理 4.1]) 如果群 G 的任意 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中 c- 正规, 那么 G 是超可解的.

推论 5.10 ([20, 定理 3.4]) 设 $\mathfrak{F}$ 是包含 $\mathfrak{U}$ 的一个饱和群系. 如果 $G^{\mathfrak{F}}$ 的每个素数阶子群和 4 阶循环子群在 G 中 c- 正规, 那么 $G\in\mathfrak{F}$.

推论 5.11 ([21]) 如果群 G 的任一 Sylow 子群的在 G 中没有超可解补充的极大子群在 G 中 c- 正规, 那么 G 是超可解的.

推论 5.12 ([22, 定理 3.3]) 设 E 是群 G 的一个正规子群满足 G/E 是超可解的. 如果 E 的任一 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中 c- 可补, 那么 G 是超可解的.

推论 5.13 ([23, 定理 3.1]) 设 E 是群 G 的一个正规子群使得 G/E 是超可解的. 如果 E 的每个极小子群在 G 中是 c- 可补的且每个 4 阶循环子群在 G 中 c- 正规, 那么 G 是超可解的.

推论 5.14 ([24, 定理 4.1]) 设 E 是群 G 的一个正规子群使得 G/E 是超可解的. 如果 E 的每个极小子群和 4 阶子群在 G 中 c- 可补, 那么 G 是超可解的.

推论 5.15 ([25, 定理 3.1]) 设 E 是群 G 的一个正规子群, 使得 G/E 是超可解的. 如果 E 的任意 Sylow 子群的在 G 中没有超可解补充的极大子群在 G 中 c- 可补, 那么 G 是超可解的.

推论 5.16 ([25, 定理 3.4]) 如果 $G^{\mathfrak{U}}$ 的每个在 G 中没有超可解补充的素数阶子群和 4 阶循环子群在 G 中 c- 可补, 那么 G 超可解的.

推论 5.17 ([26]) 设 $\mathfrak{F}$ 是包含所有超可解群的饱和群系, G 是一个群且 G 有一个正规子群 E 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$. 如果 E 的 Sylow 2- 子群交换且 E 的每个极小子群在 G 中置换, 那么 $G \in \mathfrak{F}$.

推论 5.18 ([17]) 如果群 G 的任一 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中 s-置换, 那么 G 是超可解的.

推论 5.19 ([27]) 设 E 是群 G 的一个正规子群使得 G/E 是超可解的. 如果 E 的每个素数阶子群和 4 阶循环子群在 G 中 s-置换, 那么 G 是超可解的.

推论 5.20 ([26]) 设 $\mathfrak{F}$ 是包含 $\mathfrak{U}$ 的一个饱和群系, G 是一个群且 G 有一个可解正规子群 E 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$. 如果 E 的每个极小子群和 4 阶子群在 G 中弱 s-置换, 那么 $G \in \mathfrak{F}$.

推论 5.21 ([13, 定理 3.4]) 设 E 是群 G 的一个正规子群使得 G/E 是超可解的. 如果 E 的任一 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中 $\mathfrak{U}$-s-可补, 那么 G 是超可解的.

推论 5.22 ([14, 定理 3.1]) 设 E 是群 G 的一个正规子群使得 G/E 是超可解的. 如果 E 的任一 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中 Q-可补, 那么 G 是超可解的.

推论 5.23 ([14, 定理 3.4]) 设 $\mathfrak{F}$ 是包含 $\mathfrak{U}$ 的一个饱和群系, G 是一个群且 G 有一个正规子群 E 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$. 如果 E 的任一 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中 Q-可补, 那么 $G \in \mathfrak{F}$.

由定理 C, 我们可以直接得到推论 5.24, 从而推广了有关 p-幂零群的一些已知结果.

推论 5.24 设 G 是一个群, p 是一素数且对某一个不小于 1 的整数 n 满足 $(|G|, (p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))$=1. 如果对某个大于 1 且小于等于 n 的整数 t, G 有一个 Sylow p-子群 P 使得 P 的每个在 G 中没有 p-幂零补充的 t-极大子群 (如果存在) 在 G 中弱 s-可补, 那么 G 是 p-幂零的.

我们说 $G \in C_{p'}$, 如果 G 的任意两个 Hall p'-子群在 G 中共轭; 称 $G \in D_{p'}$ 如果 $G \in C_{p'}$ 且 G 的每个 p'-子群都包含在 G 的某个 Hall p'-子群中.

推论 5.25 ([22, 定理 3.1]) 设 G 是一个群, P 是 G 的一个 Sylow p-子群, 其中 p 是 $|G|$ 的素因子且 $(|G|, p-1) = 1$. 如果 P 的每个极大子群在 G 中 c-可补且 $G \in C_{p'}$, 那么 $G/O_p(G)$ 是 p-幂零的且 $G \in D_{p'}$.

推论 5.26 ([28, 定理 3.1]) 设 G 是一个群, P 是 G 的一个 Sylow p-子群, 其中 p 是 $|G|$ 的素因子且 $(|G|, p-1) = 1$. 如果 P 的每个极大子群在 G 中 c-可补, 那么 G 是 p-幂零的.

推论 5.27 ([29, 定理 3.1]) 设 G 是一个群, p 是 $|G|$ 的素因子且 $(|G|, p-1) = 1$. 如果 G 有一个正规子群 E 使得 G/E 是 p-幂零的且 E 的任意 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中 c-可补, 那么 G 是 p-幂零的.

推论 5.28 ([29, 定理 3.4]) 设 G 是一个群, p 是 $|G|$ 的素因子且 $(|G|, p^2-1) = 1$. 如果 G 有一个正规子群 E 使得 G/E 是 p-幂零的且 E 的任意 Sylow 子群的每个 2- 极大子群 (如果存在) 在 G 中 c- 可补, 那么 G 是 p-幂零的.

推论 5.29 ([29, 定理 3.8]) 设 G 是一个群且 $(|G|, 21) = 1$. 如果 G 有一个正规子群 E 使得 G/E 是 2- 幂零的且 E 的任意 Sylow 子群的每个 3- 极大子群 (如果存在) 在 G 中 c-可补, 那么 G 是 2- 幂零的.

推论 5.30 ([14, 定理 3.3]) 设 G 是一个群, p 是 $|G|$ 的素因子且 $(|G|, p-1) = 1$. 如果 G 有一个正规子群 E 使得 G/E 是 p-幂零的且 E 的任意 Sylow 子群的每个极大子群在 G 中 Q-可补, 那么 G 是 p-幂零的.

推论 5.31 ([13; 定理 3.1]) 设 p 是群 G 的阶的一个素因子, P 是 G 的一个 Sylow p-子群. 如果 P 的每个极大子群在 G 中是 p-幂零 -s-可补的且 $G \in C_{p'}$, 那么 $G/O_p(G)$ 是 p-幂零的.

致谢 作者诚挚地感谢审稿人的有益建议.

参考文献

1 Skiba A N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups. *J Algebra*, **315**: 192–209 (2007)
2 Guo W B. The Theory of Class of Groups. Beijing-Boston: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000
3 Huppert B, Blackburn N. Finite Groups. New York: Springer-Verlag, 1982
4 Shemetkov L A. Formations of Finite Groups (in Russian). Moscow: Nauka, 1978
5 Weinstein M. Between Nilpotent and Solvable. NJ: Polygonal Publishing House, 1982
6 Schmid P. Subgroups permutable with all Sylow subgroups. *J Algebra*, **82**: 285–293 (1998)
7 Guo W B. On $\mathfrak{F}$-supplemented subgroups of finite groups. *Manuscripta Math*, **127**: 139–150 (2008)
8 Guo W B, Skiba A N, Shum K P. X-quasiormal subgroups. *Siberian Math J*, **48**: 593–605 (2007)
9 Robinson D J S. A Course in Theory of Group. New York: Spinger-Verlag, 2003
10 Gross F. Conjugacy of odd order Hall subgroups. *Bull London Math Soc*, **19**: 311–319 (1987)
11 Ezzat M M. On weakly s-supplemented subgroups of finite groups. *J Algebra, Number Theory Appl*, 待发表
12 Doerk K, Hawkes T. Finite Solvable Groups. New York: Walter de Gruyter, 1992
13 Miao L, Guo W B. Finite group with some primary subgroups $\mathfrak{F}$-s-supplemented. *Comm Algebra*, **33**: 2789–2800 (2005)
14 Miao L. Finite group with some maximal subgroups of Sylow subgroups Q-supplemented. *Comm Algebra*, **35**: 103–113 (2007)
15 Li D Y, Guo X Y. The influence of c-normallity of subgroups on the structure of finite groups. *J Pure Appl Algebra*, **150**: 53–60 (2000)
16 Buckley J. Finite groups whose minimal subgroups are normal. *Math Z*, **15**: 15–17 (1970)
17 Srinivasan S. Two sufficient condition for supersolubility of finite groups. *Israel J Math*, **35**: 210–214 (1980)
18 Guo W B, Shum K P, Skiba A N. G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups. *Israel J Math*, **138**: 125–138 (2003)
19 Wang Y M. c-Normality of groups and its properties. *J Algebra*, **180**: 954–965 (1996)
20 Ballester-Bolinches A, Wang Y M. Finite groups with some c-normal minimal subgroups. *J Pure Appl Algebra*, **153**: 121–127 (2000)
21 Ahmad A A. Finite groups with given c-permutable subgroups. *Algebra Discrete Math*, **2**: 9–16 (2004)
22 Wang Y M. Finite groups with some subgroup of Sylow subgroups c-supplemented. *J Algebra*, **224**: 467–478 (2000)

23 Zhong X G, Li S R. On c-supplemented minimal subgroups of finite groups. *Southest Asian Bull Math*, **28**: 1141–1148 (2004)

24 Ballester-Bolinches A, Wang Y M, Guo X Y. c-Supplemented subgroups of finite groups. *Glasgow Math J*, **42**: 383–389 (2000)

25 Li Y M. G-covering systems of subgroups for the class of supersoluble groups. *Siberian Math J*, **46**(3): 474–480 (2006)

26 Ballester-Bolinches A, Pedraza-Aguilera M C. On minimal subgroups of finite groups. *Acta Math Hungar*, **73**: 335–342 (1996)

27 Shaalan A. The influnece of π-quasinormality of some subgroups on the stucture of a finite group. *Acta Math Hungar*, **56**: 287–293 (1990)

28 Guo X Y, Shum K P. On p-nilpotency of finite group with some subgroup c-supplemented. *Algebra Colloq*, **10**: 259–266 (2003)

29 Miao L, Guo W B. On c-supplemented primary subgroups of finite groups. *Proc F.Scorina Gomel State University*, **6**(27): 3–10 (2004)