中国科学 A 辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 1 期: 88～98
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

两类带移民超 Brown 运动的弱收敛

张梅

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
E-mail: meizhang@bnu.edu.cn

收稿日期: 2008-04-17; 接受日期: 2008-09-20
国家自然科学基金 (批准号: 10721091) 资助项目

摘要 证明了两类带移民超 Brown 运动占位时过程的弱收敛极限定理, 改进了文献中的相应结果. 这里的极限过程是 Gauss 过程.

关键词 超 Brown 运动 占位时 中心极限定理 胎紧性

MSC(2000) 主题分类 60J80, 60F05

1 引言

分支粒子系统和超过程的波动极限近年来得到了广泛研究, 可参见文献 [1–9]. 在最近的文献中, Bojdecki 等 [4−8] 研究了 (d,α,β) 分支粒子系统的中心极限定理. 当 $\beta=1$, 过程是二分支, 方差有限. Bojdecki[4,5] 证明了 $(d,\alpha,1)$ 粒子系统的中心极限定理. $\beta<1$ 的情形在文献 [7,8] 中做了研究.

Zhang[9] 研究了两类带移民超 Brown 运动占位时的中心极限定理, 一类是确定性移民, 其移民由 Lebesgue 测度控制, 另一类为随机移民, 移民由超 Brown 运动控制. 对于 Lebesgue 移民的情形, 当 $d\geqslant 4$, 即维数为临界或高维时, 极限过程为广义 Wiener 过程. 当 $d\leqslant 3$, 即较低维数时, 极限过程形如 $K\lambda\zeta$, 这里 K 是正常数, λ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度, $(\zeta_t)_{t\geqslant 0}$ 是实值 Gauss 过程. 对于随机移民的情形, 当 $d\leqslant 5$ 和 $d\geqslant 7$, 即维数为较低和较高时, 极限行为与 Lebesgue 移民类似; 当 $d=6$, 即临界维数时, 极限过程涉及两种波动 (详见定理 1.4). 但是 Zhang[9] 只证明了过程的有限维分布收敛.

本文将把 Zhang[9] 的结果推广到弱收敛, 其中胎紧性的证明将利用 Kolmogorov 准则. 文献 [9] 的最后部分曾提到, 直接验证胎紧性所需要的矩条件比较困难, 因为高阶矩 (例如 4 阶矩) 的表达式很复杂, 不易估计. 受 Bojdecki 等 [4,5] 的启发, 本文的证明将利用 Fourier 变换作为重要工具, 它使得矩的表达形式大大简化, 尤其是对于临界维数的情形, 从而得到所需的估计.

$C(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上有界连续函数全体. 取定 $p>d$, 令 $\phi_p(x):=(1+|x|^2)^{-p/2}$, $x\in\mathbb{R}^d$. 令 $C_p(\mathbb{R}^d):=\{f\in C(\mathbb{R}^d):|f(x)|\leqslant \mathrm{const}\cdot\phi_p(x)\}$. 这些集合中的非负元所构成的集合加以上标 “+”, 例如, $C_p^+(\mathbb{R}^d)$. 令 $M_p(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的 Radon 测度 μ 全体, 使得对所有的

$f \in C_p(\mathbb{R}^d)$, 都有 $\langle \mu, f\rangle := \int f(x)\mu(dx) < \infty$. $M_p(\mathbb{R}^d)$ 上赋以 p 淡拓扑: $\mu_k \to \mu$ 当且仅当对所有的 $f \in C_p(\mathbb{R}^d)$, $\langle \mu_k, f\rangle \to \langle \mu, f\rangle$. $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度记为 λ, 显然 $\lambda \in M_p(\mathbb{R}^d)$. 令 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的上确界范数.

令 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上速降函数构成的 Schwarz 空间. 即: $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 中的函数 f 为无穷可微的, 且对每个非负整数 k 和每个非负整值向量 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, 都有

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^k |\partial^\alpha f(x)| = 0,$$

这里

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}} f(x_1, \dots, x_d),$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上的拓扑由以下半范系给出:

$$f \mapsto p_n(f) := \sup\{(1 + |x|^n)|\partial^\alpha f(x)| : x \in \mathbb{R}^d, |\alpha| \leqslant n\}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots.$$

$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 的对偶空间, 赋以强拓扑. $\mathscr{S}^+(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 中的非负元全体.

以下简要介绍两类移民过程. 设 $W = \{w_t, t \geqslant 0\}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的标准 Brown 运动, 其转移半群为 $(P_t)_{t\geqslant 0}$, 密度函数为 $p_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\{-|x|^2/2t\}$. 超 Brown 运动指的是 $M_p(\mathbb{R}^d)$ 值的 Markov 过程 $X = (X_t, \boldsymbol{Q}_\mu)$, 初值 $X_0 = \mu$, 转移概率如下给出:

$$\boldsymbol{E}_\mu \exp\{-\langle X_t, f\rangle\} = \exp\{-\langle \mu, w_t f\rangle\}, \quad f \in C_p^+(\mathbb{R}^d), \tag{1.1}$$

这里 $w.f$ 是如下方程的唯一弱解 [10]:

$$w_t f = P_t f - \frac{1}{2}\int_0^t P_{t-s}[w_s^2 f] ds, \quad t \geqslant 0. \tag{1.2}$$

设 $X^\lambda = (X_t^\lambda, \boldsymbol{Q}_\mu)$ 是一个 $M_p(\mathbb{R}^d)$ 值 Markov 过程, 其转移概率如下给出:

$$\boldsymbol{E}_\mu \exp\{-\langle X_t^\lambda, f\rangle\} = \exp\bigg\{ - \langle \mu, w_t f\rangle - \int_0^t \langle \lambda, w_{t-s} f\rangle ds\bigg\}, \tag{1.3}$$

这里 $w.f$ 是方程 (1.2) 的解. X^λ 称为移民由 λ 控制的超 Brown 运动. 令 $(Y_t^\lambda)_{t\geqslant 0}$ 表示 X^λ 的占位时过程

$$Y_t^\lambda = \int_0^t X_s^\lambda ds, \quad t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

为了使计算简化, 假定 $X_0^\lambda = 0$. 由 (1.3) 和 (1.4) 式, 可得 Y^λ 的 Laplace 泛函

$$\boldsymbol{E} \exp\{-\langle Y_t^\lambda, f\rangle\} = \exp\bigg\{ - \int_0^t \langle \lambda, V_s f\rangle ds\bigg\}, \tag{1.5}$$

这里 $V.f$ 是如下方程的唯一弱解:

$$V_s f = \int_0^s P_{s-r} f dr - \frac{1}{2}\int_0^s P_{s-r}[V_r^2 f] dr, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{1.6}$$

定义

$$\langle Z_T(t), f\rangle := c_d^{-1}(T)[\langle Y_{tT}^\lambda, f\rangle - \boldsymbol{E}\langle Y_{tT}^\lambda, f\rangle], \quad f \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R}^d), \tag{1.7}$$

其中

$$c_d(T) = \begin{cases} T^{\frac{8-d}{4}}, & d \leqslant 3, \\ T(\log T)^{1/2}, & d = 4, \\ T, & d \geqslant 5. \end{cases} \tag{1.8}$$

我们证明

定理 1.1 (1) 当 $d \leqslant 3$ 时, 对任意的 $K>0$, 存在 $c_1>0$, 使得 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant K$ 时, 有

$$\boldsymbol{E}(\langle Z_T(t), f\rangle - \langle Z_T(s), f\rangle)^2 \leqslant c_1(t-s)^{3/2}.$$

(2) 当 $d \geqslant 4$ 时, 对任意的 $K>0$, 存在 $c_2>0$, 使得 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant K$ 时, 有

$$\boldsymbol{E}(\langle Z_T(t), f\rangle - \langle Z_T(s), f\rangle)^4 \leqslant c_2(t-s)^2.$$

以下结果来自文献 [9]:

定理 1.2 (见文献 [9] 定理 2.3) 当 $T \to \infty$ 时, $(Z_T(t))_{t\geqslant 0}$ 的有限维分布收敛于 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 值中心型 Gauss 过程 $(G_t)_{t\geqslant 0}$:

1) 当 $d \leqslant 3$ 时, $G_t = \eta_t \lambda$, 其中 $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ 是连续的实值中心型 Gauss 过程, 其协方差如下给出:

$$\boldsymbol{E}\eta_{t_1}\eta_{t_2} = \int_0^{t_1} ds \int_0^s dr \int_0^{r+t_2-t_1} dw \int_0^r (w+w')^{-d/2} dw' = c(t_1, t_2), \quad t_2 \geqslant t_1.$$

2) 当 $d \geqslant 4$ 时, $(G_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 值中心型 Gauss 过程, 其协方差如下给出:

$$\boldsymbol{E}[G_{t_1}(f)G_{t_2}(g)] = C_d(t_1 \wedge t_2)^2, \quad f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

其中

$$C_d = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(2\pi)^{-2}, & d=4, \\ \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^\infty dw \int_0^\infty dw' \int\int p_{w+w'}(x,y) f(x) g(y) dx dy, & d \geqslant 5. \end{cases}$$

由定理 1.1 和 1.2 及文献 [11] 得到

定理 1.3 $(Z_T(t))_{t\geqslant 0}$ 弱收敛于定理 1.2 所描述的 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 值中心型 Gauss 过程 $(G_t)_{t\geqslant 0}$.

由文献 [12], 可以构造概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$, 使得 $\{\varrho_t : t \geqslant 0\}$ 和 $\{X_t^\varrho : t \geqslant 0\}$ 在其上定义, 其中 $\{\varrho_t : t \geqslant 0\}$ 是一个超 Brown 运动, 初值 $\varrho_0 = \lambda$. 给定 $\{\varrho_t : t \geqslant 0\}$, $\{X_t^\varrho : t \geqslant 0\}$ 是带移民的超 Brown 运动, 移民由 $\{\varrho_t : t \geqslant 0\}$ 控制, 初值 $X_0^\varrho = 0$. $\{X_t^\varrho, t \geqslant 0\}$ 的 Laplace 泛函如下给出:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\exp\{-\langle X_t^\varrho, f\rangle\} &= \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}\exp\{-\langle X_t^\varrho, f\rangle\} | \sigma(\varrho_s, s \leqslant t)] \\ &= \boldsymbol{E}\exp\left\{ -\int_0^t \langle \varrho_s, w_{t-s} f\rangle ds \right\} \\ &= \exp\{-\langle \lambda, U_t f\rangle\}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

这里 $w.f$ 是方程 (1.2) 的解, $U.f$ 是如下方程的唯一弱解:

$$U_s f = \int_0^s P_{s-r}(w_r f) dr - \frac{1}{2}\int_0^s P_{s-r}[U_r^2 f] dr, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{1.10}$$

$\{X_t^\varrho : t \geqslant 0\}$ 称为带超 Brown 移民的超 Brown 运动. 令 $(Y_t^\varrho)_{t\geqslant 0}$ 表示 X^ϱ 的占位时,

$$Y_t^\varrho := \int_0^t X_s^\varrho ds, \quad t \geqslant 0, \tag{1.11}$$

Y^ϱ 的 Laplace 泛函如下给出:

$$\boldsymbol{E}\exp\{-\langle Y_t^\varrho, f\rangle\} = \exp\{-\langle \lambda, u_t f\rangle\}, \tag{1.12}$$

这里 $u.f$ 是把 $w.f$ 替换为 $V.f$ 后方程 (1.10) 的解, 其中 $V.f$ 则是方程 (1.6) 的解. 令

$$\langle Z_T^\varrho(t), f\rangle := b_d^{-1}(T)[\langle Y_{tT}^\varrho, f\rangle - \boldsymbol{E}\langle Y_{tT}^\varrho, f\rangle], \quad f \in \mathscr{S}^+(\mathbb{R}^d), \tag{1.13}$$

其中

$$b_d(T)=\begin{cases}T^{\frac{10-d}{4}}, & 3\leqslant d\leqslant 6,\\ T, & d\geqslant 7.\end{cases}\tag{1.14}$$

我们证明

定理 1.4 (1) 当 $3\leqslant d\leqslant 5$ 时, 对任意的 $K>0$, 存在 $c_3>0$, 使得 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant K$ 时, 有

$$\boldsymbol{E}(\langle Z_T^{\varrho}(t),f\rangle-\langle Z_T^{\varrho}(s),f\rangle)^2\leqslant c_3(t-s)^{3/2}.$$

(2) 当 $d\geqslant 6$ 时, 对任意的 $K>0$, 存在 $c_4>0$, 使得 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant K$ 时, 有

$$\boldsymbol{E}(\langle Z_T^{\varrho}(t),f\rangle-\langle Z_T^{\varrho}(s),f\rangle)^4\leqslant c_4(t-s)^2.$$

Zhang[9] 已经证明了 Z_T^{ϱ} 的有限维分布收敛:

定理 1.5 (见文献 [9] 定理 2.2) 当 $d\geqslant 3$, $T\to\infty$ 时, $(Z_T^{\varrho}(t))_{t\geqslant 0}$ 的有限维分布收敛于 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 值中心 Gauss 过程 $(H_t)_{t\geqslant 0}$:

a) 当 $3\leqslant d\leqslant 5$ 时, $H_t=\varsigma_t\lambda$, 其中 $(\varsigma_t)_{t\geqslant 0}$ 是连续的实值中心型 Gauss 过程, 其协方差如下给出: $\boldsymbol{E}\varsigma_{t_1}\varsigma_{t_2}=c(t_1,t_2)$, $t_1\leqslant t_2$.

当 $d=3,5$,

$$\begin{aligned}c(t_1,t_2)=\frac{1}{2}C_d(2\pi)^{-d/2}\bigg[&\frac{6-d}{2}(t_1^{\frac{10-d}{2}}+t_2^{\frac{10-d}{2}})+\frac{(8-d)(10-d)}{8}t_1t_2(t_1+t_2)^{\frac{6-d}{2}}\\&-\frac{20-3d}{8}(t_1+t_2)^{\frac{10-d}{2}}-\frac{4-d}{8}|t_2-t_1|^{\frac{10-d}{2}}\bigg],\end{aligned}\tag{1.15}$$

其中 $C_d=[(1-d/2)(2-d/2)\cdots(5-d/2)]^{-1}$;

当 $d=4$ 时,

$$\begin{aligned}c(t_1,t_2)=\frac{1}{2}(2\pi)^{-2}\bigg[&\frac{1}{6}((t_1^3+t_2^3)\log(t_1+t_2)-t_1^3\log t_1-t_2^3\log t_2)\\&-\frac{1}{12}(t_1^3+t_2^3-|t_2-t_1|^2t_2)\bigg].\end{aligned}\tag{1.16}$$

b) 当 $d\geqslant 7$ 时, $(H_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 值中心 Gauss 过程, 协方差如下给出:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}[H_{t_1}(f)H_{t_2}(g)]=&\frac{1}{4}(t_1\wedge t_2)^2\int_0^\infty\int_0^\infty dwdw'\\&\times\int\int p_{w+w'}(x,y)f(x)g(y)dxdy,\quad f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d);\end{aligned}\tag{1.17}$$

c) 当 $d=6$ 时, $H_t=H_t^{(1)}+H_t^{(2)}$, 这里 $H^{(1)}$ 和 $H^{(2)}$ 相互独立. 具体地, $H_t^{(1)}=\tau_t\lambda$, $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ 为连续的实值中心型 Gauss 过程, 有协方差: $\boldsymbol{E}\tau_{t_1}\tau_{t_2}=c(t_1,t_2)$, 其中 $c(t,t)=\frac{1}{8}\alpha_2(2\pi)^{-3}t^2$,

$$c(t_1,t_2)=\frac{1}{2}(2\pi)^{-3}\left[\frac{t_1t_2}{8}-\frac{1}{16}(t_2-t_1)^2\log\frac{t_1+t_2}{t_2-t_1}\right],\quad t_1<t_2;\tag{1.18}$$

$H_t^{(2)}$ 是 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 值中心 Gauss 过程, 协方差由 (1.17) 给出.

由定理 1.4 和 1.5 及文献 [11] 得到

定理 1.6 当 $d\geqslant 3$, $T\to\infty$ 时, $(Z_T^{\varrho}(t))_{t\geqslant 0}$ 弱收敛于定理 1.5 所描述的 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ 值中心 Gauss 过程 $(H_t)_{t\geqslant 0}$.

2 定理的证明

本节包括定理 1.1, 1.3, 1.4, 1.6 的证明. 我们把 $\int_{\mathbb{R}^d}$ 简记为 $\int$. 以下估计常常用到

$$\|P_s f\| \leqslant c(1 \wedge s^{-\frac{d}{2}}), \tag{2.1}$$

其中 $c = \max\{(2\pi)^{-\frac{d}{2}}, \|f\|\}$. 对于 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, 定义它的 Fourier 变换 $\tilde{f}$: $\tilde{f}(x) = \int e^{i\langle x,z\rangle} f(z)dz$. 显然 $\tilde{f}$ 有界. 容易证明, 对任给的 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\widetilde{P_t f}(x) = e^{-t|x|^2}\tilde{f}(x), \tag{2.2}$$

$$\int f(x)g(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \tilde{f}(x)\tilde{g}(-x)dx. \tag{2.3}$$

并且 $\int \frac{|\tilde{f}(x)|^2}{|x|^n}dx < \infty$, $d > n$. 定义

$$C_n' = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \frac{|\tilde{f}(x)|^2}{|x|^n}dx, \tag{2.4}$$

不失一般性, 在定理 1.1–1.6 的证明中, 我们假定 $K = 1$, $\langle \lambda, f\rangle = 1$. 记 $\delta = t - s$.

2.1 确定性移民

定理 1.1 的证明 (1) 首先由 (1.4) 和 (1.7) 式得到

$$\boldsymbol{E}(\langle Z_T(t), f\rangle - \langle Z_T(s), f\rangle)^2 = \frac{T^2}{c_d(T)^2}\int_s^t\int_s^t \mathrm{Cov}(\langle X_{uT}^\lambda, f\rangle\langle X_{vT}^\lambda, f\rangle)dudv.$$

再由 (1.2) 和 (1.3) 式得到 X^λ 的协方差

$$\mathrm{Cov}(\langle X_u^\lambda, f\rangle\langle X_v^\lambda, f\rangle) = \int_0^u dm\int_0^m \langle \lambda, P_n f\cdot P_{n+v-u}f\rangle dn, \quad 0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1.$$

由 (2.2) 和 (2.3) 式知

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\langle Z_T(t), f\rangle - \langle Z_T(s), f\rangle)^2\\ &\quad= \frac{2}{(2\pi)^d}T^{\frac{d}{2}}\int_s^t du\int_u^t dv\int_0^u dm\int_0^m dn\int e^{-(2n+v-u)T|x|^2}|\tilde{f}(x)|^2dx.\end{aligned}$$

令 $\sqrt{(2n+v-u)T}x = y$. 注意 $|\tilde{f}| \leqslant \langle\lambda, f\rangle = 1$. 通过变量替换, 当 $1 \leqslant d \leqslant 3$ 时得到

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\langle Z_T(t), f\rangle - \langle Z_T(s), f\rangle)^2\\ &\leqslant \frac{2}{(2\pi)^d}\int_s^t du\int_u^t dv\int_0^u dm\int_0^m (2n+v-u)^{-\frac{d}{2}}dn\int e^{-|y|^2}dy\\ &\leqslant 2^{1-\frac{d}{2}}\int_s^t du\int_u^t dv\int_0^u dm\int_0^m (2n+v-u)^{-\frac{d}{2}}dn\\ &\leqslant \begin{cases}(t-s)^2, & d=1,\\ (t-s)^2(|\log(t-s)|+1), & d=2,\\ (t-s)^{3/2}, & d=3,\end{cases}\end{aligned}$$

从而完成了定理第 (1) 部分的证明.

(2) 记 $f_T = c_d^{-1}(T)f$. 由 (1.5) 和 (1.6) 式得到

$$\boldsymbol{E}\exp\{-\theta[\langle Z_T(t), f\rangle - \langle Z_T(s), f\rangle]\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^{tT}dr\int_0^r \langle\lambda, V_u(\theta, f_T)^2\rangle du\right\} := \exp B, \tag{2.5}$$

这里 $V_u(\theta, f_T)$ 是如下方程的解:

$$V_u(\theta, f_T) = \theta\int_0^{u\wedge\delta T} P_{u-l}f_T dl - \frac{1}{2}\int_0^u P_{u-l}V_l^2(\theta, f_T)dl, \quad u \leqslant tT. \tag{2.6}$$

两边求导, 对任意的 $u \leqslant tT$, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_u(\theta, f_T)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0} = \int_0^{u\wedge\delta T} P_{u-l} f_T dl,\\
&\frac{\partial^2 V_u(\theta, f_T)}{\partial \theta^2}\bigg|_{\theta=0} = -\int_0^u P_{u-m}\left(\frac{\partial V_m(\theta, f_T)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0}\right)^2 dm,\\
&\frac{\partial^3 V_u(\theta, f_T)}{\partial \theta^3}\bigg|_{\theta=0} = -3\int_0^u P_{u-m}\left(\frac{\partial V_m(\theta, f_T)}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial^2 V_m(\theta, f_T)}{\partial \theta^2}\bigg|_{\theta=0}\right)^2 dm,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

以下简记 $V_u(\theta, f_T)$ 为 V_u, 把 $\frac{\partial^k V_u}{\partial\theta^k}\big|_{\theta=0}$ 简记为 $\frac{\partial^k V_u}{\partial\theta^k}$, $k=1,2,3$, 因为我们只关心其在 $\theta=0$ 的值. 用 $B^{(n)}$ 表示 B 关于 θ 的 n 阶导数. 在 (2.5) 式两边求导得到

$$\boldsymbol{E}(\langle Z_T(t), f\rangle - \langle Z_T(s), f\rangle)^4 = 3[B^{(2)}]^2 + B^{(4)}, \tag{2.8}$$

这里

$$\begin{aligned}
B^{(2)} &= \int_0^{tT} dr \int_0^r \left\langle \lambda, \left(\frac{\partial V_u}{\partial\theta}\right)^2\right\rangle du,\\
B^{(4)} &= 3\int_0^{tT} dr \int_0^r \left\langle \lambda, \left(\frac{\partial^2 V_u}{\partial\theta^2}\right)^2\right\rangle du + 4\int_0^{tT} dr \int_0^r \left\langle \lambda, \frac{\partial V_u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^3 V_u}{\partial\theta^3}\right\rangle du.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

为得到 $B^{(2)}$ 的估计, 首先注意到当 $x>0$ 时, $1-e^{-x}\leqslant 1\wedge x$. 当 $d\geqslant 5$ 时, 由 (2.2) 和 (2.3) 以及 (2.7) 式得到

$$\begin{aligned}
B^{(2)} &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^{tT} dr\int_0^r du \int_0^{u\wedge\delta T} dm \int_0^{u\wedge\delta T} dl \int e^{-(2u-l-m)|x|^2} |\tilde{f}_T(x)|^2 dx\\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^{tT} dr\int_0^{\delta T} e^{-2u|x|^2} du \int\left(\frac{e^{u|x|^2}-1}{|x|^2}\right)^2 |\tilde{f}_T(x)|^2 dx\\
&\quad+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\delta T}^{tT} dr\int_{\delta T}^{r} e^{-2u|x|^2} du \int\left(\frac{e^{\delta T|x|^2}-1}{|x|^2}\right)^2 |\tilde{f}_T(x)|^2 dx\\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^{tT} dr\int_0^{\delta T} du \int \frac{|\tilde{f}_T(x)|^2}{|x|^4} dx\\
&\quad+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\delta T}^{tT} dr\int_{\delta T}^{r} e^{-2(u-\delta T)|x|^2} du \int\left(\frac{1-e^{-\delta T|x|^2}}{|x|^2}\right)^2 |\tilde{f}_T(x)|^2 dx\\
&= \frac{\delta}{(2\pi)^d}\left(1+\int_0^\infty e^{-2y}dy\right)\int \frac{|\tilde{f}(x)|^2}{|x|^4}dx\\
&\leqslant \frac{3}{2}C_4'\delta,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

这里 C_4' 由 (2.4) 式给出. 当 $d=4$ 时, 首先证明

$$C_4'' := \frac{1}{(2\pi)^d}\left[\sup_{T>1}\frac{1}{\log T}\int\left(\frac{1-e^{-T|x|^2}}{|x|^4}\right)|\tilde{f}(x)|^2 dx\right] < \infty. \tag{2.11}$$

由变量替换,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leqslant 1}\frac{1-e^{-T|x|^2}}{|x|^4}|\tilde{f}(x)|^2 dx &\leqslant (2\pi)^3\int_0^1 \frac{1-e^{-Tr^2}}{r}dr\\
&= (2\pi)^3\left(\int_0^{\frac{1}{T}}\frac{1-e^{-Tr^2}}{r}dr + \int_{\frac{1}{T}}^1 \frac{1-e^{-Tr^2}}{r}dr\right)\\
&\leqslant (2\pi)^3\left(\frac{1}{T}+\log T\right).
\end{aligned}$$

容易看出, $\int_{|x|>1}\frac{1-e^{-T|x|^2}}{|x|^4}|\tilde{f}(x)|^2dx<\infty$, 综上可得 (2.11) 式. 从 (2.10) 式的第 3 个不等号继续, 当 $d=4$ 时, 得到

$$B^{(2)}\leqslant\frac{\delta}{(2\pi)^d}\left(1+\int_0^\infty e^{-2y}dy\right)\left[\frac{1}{\log T}\int\frac{1-e^{-T|x|^2}}{|x|^4}|\tilde{f}(x)|^2dx\right]\leqslant\frac{3}{2}C_4''\delta.$$

记 $C_4=C_4'\vee C_4''$, 因此

$$[B^{(2)}]^2\leqslant\frac{9}{4}C_4^2(t-s)^2 \tag{2.12}$$

对 $d\geqslant 4$ 成立. 以下讨论 $B^{(4)}$. 由 (2.9) 式, 定义

$$B^{(4)}=3\mathrm{III}+4\mathrm{IV}, \tag{2.13}$$

其中

$$\mathrm{III}=\int_0^{tT}dr\int_0^r\left\langle\lambda,\left(\frac{\partial^2V_u}{\partial\theta^2}\right)^2\right\rangle du,$$
$$\mathrm{IV}=\int_0^{tT}dr\int_0^r\left\langle\lambda,\frac{\partial V_u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^3V_u}{\partial\theta^3}\right\rangle du.$$

当 $d\geqslant 5$ 时, 利用 (2.1) 式可知如下估计在情形 $u\geqslant\delta T$ 和 $u\leqslant\delta T$ 下都成立:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2V_u}{\partial\theta^2}\right|&=\int_0^u P_{u-m}\left(\int_0^m P_{m-l}1_{[0,\delta T]}(l)f_Tdl\right)^2dm\\&\leqslant T^{-1}\delta\|f\|\int_0^u P_{u-m}dm\int_0^m P_{m-l}fdl\\&=C_F'T^{-1}\delta,\end{aligned} \tag{2.14}$$

这里 $C_F'=\|f\|\int_0^\infty mP_mfdm$. 当 $d=4$ 时, 注意到 $C_F'':=\|f\|\sup_{T>1}\left(\frac{1}{\log T}\int_0^T lP_lfdl\right)<\infty$. 类似于 (2.14) 式的证明可得到

$$\left|\frac{\partial^2V_u}{\partial\theta^2}\right|\leqslant(T\log T)^{-1}\delta\|f\|\int_0^u(u-l)P_{u-l}fdl\leqslant C_F''T^{-1}\delta.$$

记 $C_F=C_F'\vee C_F''$. 再由 (2.12) 式有

$$\mathrm{III}\leqslant C_FT^{-1}\delta\int_0^{tT}dr\int_0^r\left\langle\lambda,\left|\frac{\partial^2V_u}{\partial\theta^2}\right|\right\rangle du\leqslant B^{(2)}C_F\delta\leqslant\frac{3}{2}C_4C_F\delta^2. \tag{2.15}$$

为估计 IV, 首先来看 $\frac{\partial^3V_u}{\partial\theta^3}$. 由 (2.7) 和 (2.14) 式,

$$\left|\frac{\partial^3V_u}{\partial\theta^3}\right|\leqslant 3C_FT^{-1}\delta\int_0^u P_{u-l}\frac{\partial V_l}{\partial\theta}dl.$$

当 $d\geqslant 5$ 时, 由 Fourier 变换得到

$$\begin{aligned}\mathrm{IV}&\leqslant 3C_FT^{-1}\delta\int_0^{tT}dr\int_0^r\left\langle\lambda,\frac{\partial V_u}{\partial\theta}\cdot\int_0^u P_{u-m}\frac{\partial V_m}{\partial\theta}dm\right\rangle du\\&=3C_F(2\pi)^{-d}T^{-1}\delta\int_0^{tT}dr\int_0^r du\int|\tilde{f}_T(x)|^2dx\\&\quad\times\int_0^{u\wedge\delta T}e^{-(u-l)|x|^2}dl\int_0^u e^{-(u-m)|x|^2}dm\int_0^{m\wedge\delta T}e^{-(m-n)|x|^2}dn\\&\leqslant\frac{3}{2}C_4C_F\delta^2.\end{aligned} \tag{2.16}$$

当 $d=4$ 时, 从 (2.16) 式的第 2 步起计算,

$$\begin{aligned}\mathrm{IV} &\leqslant 3C_F(2\pi)^{-d}\delta^2\int_0^{tT}dr\int_0^r du\int|\tilde{f}_T(x)|^2dx\int_0^u(u-n)e^{-(u-n)|x|^2}dn\\ &\leqslant \frac{3}{2}C_F(2\pi)^{-d}\delta^2\left(\frac{1}{\log T}\int\frac{1-e^{-T|x|^2}}{|x|^4}|\tilde{f}(x)|^2dx\right)\\ &\leqslant \frac{3}{2}C_4C_F\delta^2.\end{aligned}$$

由上述讨论可得

$$B^{(4)}\leqslant 3\mathrm{III}+4\mathrm{IV}\leqslant 11C_4C_F\delta^2. \tag{2.17}$$

再综合 (2.12) 和 (2.8) 式, 最终有

$$\boldsymbol{E}(\langle Z_T(t),f\rangle-\langle Z_T(s),f\rangle)^4\leqslant c_2(t-s)^2,$$

其中 $c_2=7C_4^2+11C_4C_F$.

2.1 随机移民

定理 1.4 的证明 (1) 当 $3\leqslant d\leqslant 5$ 时, 由 (1.9) 和 (1.10) 式, 对任意的 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$,

$$\boldsymbol{E}(\langle Z_T^{\varrho}(t),f\rangle-\langle Z_T^{\varrho}(s),f\rangle)^2:=I+J,$$

这里

$$\begin{aligned}I&=2T^{\frac{d}{2}-3}\int_s^t du\int_u^t dv\int_0^{uT}dl\int_0^l\langle\lambda,P_nfP_{n+vT-uT}f\rangle dn,\\ J&=2T^{\frac{d}{2}-3}\int_s^t du\int_u^t dv\int_0^{uT}\langle\lambda,l(l+vT-uT)P_lfP_{l+vT-uT}f\rangle dl.\end{aligned}$$

注意当 $x>0$ 时有 $1-e^{-x}\leqslant x^{1/2}$. 当 $d=5$ 时, 类似 2.1 小节的证明思路, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&\leqslant\frac{2T^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^d}\int_s^t du\int_u^t e^{-(v-u)T|x|^2}dv\int_0^u dm\int_0^m dn\int e^{-2nT|x|^2}|\tilde{f}(x)|^2dx\\ &\leqslant\frac{T^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^d}\int_s^t 1-e^{(t-u)T|x|^2}du\int\frac{|\tilde{f}(x)|^2}{|x|^4}dx\\ &\leqslant\frac{1}{(2\pi)^d}\int_s^t\sqrt{t-u}du\int\frac{|\tilde{f}(x)|^2}{|x|^3}dx\\ &\leqslant\frac{2}{3}C_3'(t-s)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

当 $d=3,4$ 时, 类似可证 $I\leqslant\frac{1}{2}C_2'(t-s)^2$. 对于 J, 由 Fourier 变换并做变量替换,

$$\begin{aligned}J&=\frac{2}{(2\pi)^d}T^{\frac{d}{2}-3}\int_s^t du\int_u^t dv\int|\tilde{f}(x)|^2dx\int_0^{uT}l(l+vT-uT)e^{-(2l+vT-uT)|x|^2}dl\\ &=\frac{1}{4(2\pi)^d}\int_s^t du\int_u^t dv\int e^{-|y|^2}dy\int_{v-u}^{v+u}m^{-\frac{d}{2}}(m^2-(v-u)^2)|\tilde{f}((mT)^{-\frac{d}{2}}y)|^2dm\\ &\leqslant\frac{1}{4(2\pi)^d}\int e^{-|y|^2}dy\int_s^t du\int_u^t dv\int_{v-u}^{v+u}m^{2-\frac{d}{2}}dm\\ &\leqslant(t-s)^2.\end{aligned}$$

定义 $c_3=C_2'\vee C_3'\vee 1$, 完成了 (1) 部分的证明.

(2) 记 $f_T=b_d^{-1}(T)f$. 当 $d\geqslant 6$ 时, 由 (1.5)–(1.7) 式可得

$$\boldsymbol{E}\exp\{\theta\langle Z_T^{\varrho}(s),f\rangle-\theta\langle Z_T^{\varrho}(t),f\rangle\}=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^{tT}dl\int_0^l\langle\lambda,V_m^2\rangle dm+\frac{1}{2}\int_0^{tT}\langle\lambda,u_r^2\rangle dr\right\},$$

这里 $V.$ 是 (2.6) 式的解, $u. \equiv u.(\theta, f_T)$ 是如下方程的解:

$$u_r(\theta, f_T) = \int_0^r P_{r-l} V_l dl - \frac{1}{2}\int_0^r P_{r-l} u_l^2 dl. \tag{2.18}$$

像 (2.8) 式的证明中一样, 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\langle Z_T^\varrho(t), f\rangle - \langle Z_T^\varrho(s), f\rangle)^4 &= 3(B^{(2)} + B_2^{(2)})^2 + B^{(4)} + B_2^{(4)} \\ &\leqslant 6(B^{(2)})^2 + 6(B_2^{(2)})^2 + B^{(4)} + B_2^{(4)}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

这里

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{tT} dr \int_0^r \langle \lambda, V_u^2\rangle dr, \quad B_2 = \frac{1}{2}\int_0^{tT} \langle \lambda, u_r^2\rangle dr. \tag{2.20}$$

由 (2.12) 和 (2.17) 式得到

$$(B^{(2)})^2 \leqslant \frac{9}{4} C_4^2 (t-s)^2, \quad B^{(4)} \leqslant 11 C_4 C_F (t-s)^2. \tag{2.21}$$

以下估计 $B_2^{(2)}$ 和 $B_2^{(4)}$. 由 (2.18) 式,

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0} = \int_0^r dl \int_0^{l\wedge\delta T} P_{r-u} f_T du = \int_0^{r\wedge\delta T} (r-m) P_{r-m} f_T dm, \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}\bigg|_{\theta=0} = -\int_0^r dl \int_0^l P_{r-m}\left(\frac{\partial V_m}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0}\right)^2 dm - \int_0^r P_{r-l}\left(\frac{\partial u_l}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0}\right)^2 dl, \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial^3 u_r}{\partial \theta^3}\bigg|_{\theta=0} = -3\int_0^r dl \int_0^l P_{r-m}\frac{\partial V_m}{\partial\theta}\frac{\partial^2 V_m}{\partial\theta^2}\bigg|_{\theta=0} dm - 3\int_0^r P_{r-l}\frac{\partial u_l}{\partial\theta}\frac{\partial^2 u_l}{\partial\theta^2}\bigg|_{\theta=0} dl, \tag{2.24}$$

以下简记 $\frac{\partial^k u_l}{\partial\theta^k}\big|_{\theta=0}$ 为 $\frac{\partial^k u_l}{\partial\theta^k}$ $(k=1,2,3)$, 则对于 $d \geqslant 7$, 利用 Fourier 变换和 Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} B_2^{(2)} &= \int_0^{tT} \left\langle \lambda, \left(\int_0^{r\wedge\delta T} (r-m) P_{r-m} f_T dm\right)^2 \right\rangle dr \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^{tT} dr \int |\tilde{f}_T(x)|^2 dx \left(\int_0^{r\wedge\delta T} (r-m) e^{-(r-m)|x|^2} dm\right)^2 \\ &\leqslant \frac{\delta}{(2\pi)^d}\int \frac{|\tilde{f}(x)|^2}{|x|^6} dx \int_0^\infty y^2 e^{-2y} dy \\ &= C_6'\delta. \end{aligned}$$

当 $d=6$ 时, 首先有

$$B_2^{(2)} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^{tT} dr \int |\tilde{f}_T(x)|^2 dx \left(\int_0^{r\wedge\delta T} (r-m) e^{-(r-m)|x|^2} dm\right)^2 =: B_{21}^{(2)} + B_{22}^{(2)},$$

这里

$$\begin{aligned} B_{21}^{(2)} &:= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^{\delta T} dr \int |\tilde{f}_T(x)|^2 dx \int_0^r \int_0^r mn e^{-(m+n)|x|^2} dm dn \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_0^{\delta T} dr \int_0^r \int_0^r mn(m+n)^{-\frac{d}{2}} dm dn \int |\tilde{f}_T((m+n)^{-\frac{1}{2}} y)|^2 e^{-|y|^2} dy \\ &\leqslant \frac{\delta^2}{2(2\pi)^{d/2}}; \end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}B_{22}^{(2)} &:= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\delta T}^{tT} dr \int |\tilde{f}_T(x)|^2 dx \int_0^{\delta T}\int_0^{\delta T}(r-m)(r-n)e^{-(2r-m-n)|x|^2}dmdn\\ &\leqslant \frac{T^{-2}}{16(2\pi)^{d/2}}\int_0^{sT}(\sqrt{r+\delta T}-\sqrt{r})^2dr\\ &\leqslant \frac{\delta}{2(2\pi)^{d/2}}.\end{aligned}$$

记 $C_6 = C_6' \vee \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$, 则对于 $d \geqslant 6$, 得到 $B_2^{(2)}$ 的估计

$$(B_2^{(2)})^2 \leqslant C_6^2(t-s)^2. \tag{2.25}$$

为估计 $B_2^{(4)}$, 由 (2.20) 式得

$$B_2^{(4)} = 3\int_0^{tT}\left\langle \lambda, \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right)^2\right\rangle dr + 4\int_0^{tT}\left\langle \lambda, \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\frac{\partial^3 u_r}{\partial\theta^3}\right\rangle dr =: 3K+4L, \tag{2.26}$$

这里 u_r 是 (2.18) 式的解. 由 (2.7) 以及 (2.22) 式可知 $\frac{\partial V_m}{\partial\theta} \leqslant \delta\|f\|$ 和 $\frac{\partial u_m}{\partial\theta} \leqslant \delta\|f\|$. 把这些估计应用于 (2.23) 式得到 $\left|\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right| \leqslant C_f' T^{-1}\delta$, 其中 $C_f' = \|f\|\left(\int_0^\infty u(1\wedge u^{-\frac{d}{2}})du\right)^2$. 记 $C_f = C_f' \vee C_F$, 其中 C_F 是 2.1 小节引入的常数. 再利用 (2.12)、(2.23) 和 (2.25) 式得到

$$K \leqslant C_f T^{-1}\delta \int_0^{tT}\left\langle \lambda, \left|\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right|\right\rangle dr \leqslant C_f\left(\frac{3}{2}C_4 + C_6\right)\delta^2. \tag{2.27}$$

为估计 L, 首先看 $\frac{\partial^3 u_r}{\partial\theta^3}$. 注意事实 $\left|\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2}\right| \leqslant C_f T^{-1}\delta$ 以及 $\left|\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}\right| \leqslant C_f T^{-1}\delta$, 再由 (2.26) 和 (2.24) 式, 可得

$$\begin{aligned}L &\leqslant 3C_f' T^{-1}\delta\int_0^{tT}\left\langle \lambda, \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\int_0^r (r-m)P_{r-m}\frac{\partial V_m}{\partial\theta}dm\right\rangle dr\\ &\quad +3C_f T^{-1}\delta\int_0^{tT}\left\langle \lambda, \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\int_0^r P_{r-l}\frac{\partial u_l}{\partial\theta}dl\right\rangle dr\\ &=: 3L_1 + 3L_2.\end{aligned}$$

利用 Fourier 变换和对 $B_2^{(2)}$ 的估计, 类似于 (2.16) 式的证明, 当 $d \geqslant 7$ 时, 有 $L_1 \leqslant C_6 C_f \delta^2$ 和 $L_2 \leqslant C_6 C_f\delta^2$ 成立. 综合 (2.26) 及 (2.27) 式得到

$$B_2^{(4)} \leqslant 3K + 12L_1 + 12L_2 \leqslant (5C_4C_f + 27C_6C_f)\delta^2,$$

最后, 再由 (2.19) 式可得

$$\boldsymbol{E}(\langle Z_T^{\varrho}(t), f\rangle - \langle Z_T^{\varrho}(s), f\rangle)^4 \leqslant c_4(t-s)^2,$$

其中 $c_4 = 14C_4^2 + 11C_4C_f + 6(C_6)^2 + 5C_4C_f + 27C_6C_f$.

定理 1.3 和 1.6 的证明 由定理 1.1 和 1.4 及文献 [11], 序列 $\{Z_T(t) : t \geqslant 0\}$ 和 $\{Z_T^{\varrho}(t) : t \geqslant 0\}$ 在 $C([0,1], \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ 中胎紧. 根据文献 [13], 利用定理 1.2 和 1.5 得到证明.

参考文献

1 Iscoe I. A weighted occupation time for a class of measure-valued critical branching Brownian motion. *Probab Theory Related Fields*, **71**: 85–116 (1986)

2 Hong W M. Longtime behavior for the occupation time of super-Brownian motion with random immigration. *Stochastic Process Appl*, **102**: 43–62 (2002)

3 Hong W M. Functional central limit theorem for super α-stable processes. *Sci China Ser A-Math*, **47**(6): 874–881 (2004)

4 Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems I. Long-range dependence. *Stochastic Process Appl*, **116**: 1–18 (2006)

5 Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems II. Critical and large dimensions. *Stochastic Process Appl*, **116**: 19–35 (2006)

6 Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. Some extensions of fractional Brownian motion and sub-fractional Brownian motion related to particle systems. *Electron Comm Probab*, **12**: 161–172 (2006)

7 Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. A long range dependence stable process and an infinite branching system. *Ann Probab*, **35**(2): 500–527 (2007)

8 Bojdecki T, Gorostiza L G, Talarczyk A. Occupation time fluctuations of an infinite-variance branching system in large dimensions. *Bernoulli*, **13**: 20–39 (2007)

9 Zhang M. Functional central limit theorem for the super-Brownian motion with super-Brownian immigration. *J Theoret Probab*, **18**(3): 665–685 (2005)

10 Dawson D A. Measure-valued Markov processes. In: Lect Notes Math. Vol. 1541. Berlin: Springer-Verlag, 1993, 1–260

11 Mitoma I. Tightness of probabilities on $C([0,1],\mathscr{S}')$ and $D([0,1],\mathscr{S}')$. *Ann Probab*, **11**: 989–999 (1983)

12 Hong W M, Li Z H. A central limit theorem for the super-Brownian motion with super-Brownian immigration. *J Appl Probab*, **36**: 1218–1224 (1999)

13 Ethier S N, Kurtz T G. Markov Processes: Characterization and Convergence. New York: Wiley, 1986