中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 5 期: 633～645
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

三三次长方体有限元的超收敛

刘经洪 ①*, 孙海娜 ①, 朱起定 ②

[1] 浙江大学宁波理工学院公共基础部, 宁波 315100
[2] 湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙 410081
* 通信作者 E-mail: jhliu1129@sohu.com

收稿日期: 2008-03-10; 接受日期: 2008-11-20
宁波市自然科学基金 (批准号: 2008A610020)、国家自然科学基金 (批准号: 10671065) 和湖南省教育厅 (批准号: 07C576, 03C212) 资助项目

摘要 本文首先介绍了三维投影型插值算子, 并通过这个算子导出了三三次长方体有限元的弱估计. 然后, 利用离散导数 Green 函数的 $W^{2,1}$ 半范估计和弱估计证明了有限元 u_h 的梯度和三三次投影型插值 $\Pi_h^3 u$ 的梯度在逐点意义下有超逼近. 最后, 将这种超逼近用于超收敛分析并导出了有限元的整体超收敛估计.

关键词 长方体元 投影型插值 超收敛 超逼近 弱估计 离散导数 Green 函数

MSC(2000) 主题分类 65N30

1 引言

二阶椭圆边值问题的有限元超收敛是一个热门的研究课题 (参见文献 [1–7]). 对于一维和二维问题, 已经获得了许多超收敛结果. 而三维问题的超收敛结果相对很少 (参见文献 [2–4, 8–18]). 困难之一是三维有限元的弱估计和离散 Green 函数估计难以获得. 大部分已有的三维超收敛结果都是 L^2 范数意义下的平均超收敛结果. 本文研究三三次长方体元的逐点超收敛, 这种有限元经常在工程界用到.

本文的第一个结果是下面所谓的弱估计:

$$\left|a(u-\Pi_h^3 u,\, v)\right| \leqslant Ch^4 \|u\|_{5,\,\infty,\,\Omega}\, |v|_{1,\,1,\,\Omega}, \quad \forall v \in S_0^h(\Omega),$$
$$\left|a(u-\Pi_h^3 u,\, v)\right| \leqslant Ch^5 \|u\|_{5,\,\infty,\,\Omega}\, |v|'_{2,\,1,\,\Omega}, \quad \forall v \in S_0^h(\Omega),$$

其中 $\Pi_h^3 u$ 是解 u 的三三次投影型插值.

特别地, 如果剖分是一致的, 弱估计为

$$\left|a(u-\Pi_h^3 u,\, v)\right| \leqslant Ch^5 \|u\|_{6,\,\infty,\,\Omega}\, |v|_{1,\,1,\,\Omega}, \quad \forall v \in S_0^h(\Omega),$$
$$\left|a(u-\Pi_h^3 u,\, v)\right| \leqslant Ch^6 \|u\|_{6,\,\infty,\,\Omega}\, |v|'_{2,\,1,\,\Omega}, \quad \forall v \in S_0^h(\Omega).$$

本文的第二个主要工作是三维离散导数 Green 函数 $\partial_Z G_Z^h$ 的估计. 我们引入一个特殊的权函数 $\phi(x)$ 及其性质. 借助这个权函数, 我们导出了 $\partial_Z G_Z^h$ 的如下 $W^{2,1}$ 半范估计:

$$\left|\partial_Z G_Z^h\right|'_{2,\,1,\,\Omega} \leqslant Ch^{-1}.$$

引用格式: 刘经洪, 孙海娜, 朱起定. 三三次长方体有限元的超收敛. 中国科学 A, 2009, 39(5): 633–645
Liu J H, Sun H N, Zhu Q D. Superconvergence of tricubic block finite elements. Sci China Ser A, 2009, 52(5): 959–972, DOI: 10.1007/s11425-009-0039-1

将弱估计和 $\partial_Z G_Z^h$ 的估计相结合, 即可获得 u_h 和 $\Pi_h^3 u$ 在逐点意义下的超逼近结果. 最后我们将超逼近应用到超收敛分析获得了超收敛结果, 并给出了数值例子.

本文用字母 C 代表不同的常数, 并采用 Sobolev 空间及其范数的标准记号.

2 三维投影型插值算子

本节将介绍在下面各节需要用到的三维投影型插值算子.

用

$$e=(x_e-h_e,x_e+h_e)\times(y_e-k_e,y_e+k_e)\times(z_e-d_e,z_e+d_e)\equiv I_1\times I_2\times I_3 \tag{2.1}$$

来表示一个三维单元, $\{l_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\tilde{l}_j(y)\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\bar{l}_j(z)\}_{j=0}^{\infty}$ 分别是空间 $L^2(I_1)$, $L^2(I_2)$, $L^2(I_3)$ 上的规范正交的 Legendre 多项式系. 易见 $\{l_i(x)\tilde{l}_j(y)\bar{l}_k(z)\}_{i,j,k=0}^{\infty}$ 是空间 $L^2(e)$ 上的规范正交多项式系. 假设 $\partial_x\partial_y\partial_z u\in L^2(e)$, 则有以下展开式:

$$\partial_x\partial_y\partial_z u=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{ijk}l_i(x)\tilde{l}_j(y)\bar{l}_k(z), \tag{2.2}$$

其中

$$\alpha_{ijk}=\int_e\partial_x\partial_y\partial_z u\,l_i(x)\tilde{l}_j(y)\bar{l}_k(z)\,dxdydz,\quad i,j,k\geqslant 0. \tag{2.3}$$

记

$$\begin{aligned}&\omega_0(x)=\tilde{\omega}_0(y)=\bar{\omega}_0(z)=1,\quad \omega_{j+1}(x)=\int_{x_e-h_e}^{x}l_j(\xi)\,d\xi,\\&\tilde{\omega}_{j+1}(y)=\int_{y_e-k_e}^{y}\tilde{l}_j(\xi)\,d\xi,\quad \bar{\omega}_{j+1}(z)=\int_{z_e-d_e}^{z}\bar{l}_j(\xi)\,d\xi,\quad j\geqslant 0.\end{aligned}$$

由 Parseval 等式可得

$$\begin{aligned}&u(x,y,z)-u(x_e-h_e,y,z)-u(x,y_e-k_e,z)-u(x,y,z_e-d_e)\\&\quad+u(x,y_e-k_e,z_e-d_e)+u(x_e-h_e,y,z_e-d_e)+u(x_e-h_e,y_e-k_e,z)\\&\quad-u(x_e-h_e,y_e-k_e,z_e-d_e)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{ijk}\omega_{i+1}(x)\tilde{\omega}_{j+1}(y)\bar{\omega}_{k+1}(z).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&u(x,y_e-k_e,z_e-d_e)=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_{i00}\omega_i(x),\quad u(x_e-h_e,y,z_e-d_e)=\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{0j0}\tilde{\omega}_j(y),\\&u(x_e-h_e,y_e-k_e,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{00k}\bar{\omega}_k(z),\quad u(x,y,z_e-d_e)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{ij0}\omega_i(x)\tilde{\omega}_j(y),\\&u(x_e-h_e,y,z)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{0jk}\tilde{\omega}_j(y)\bar{\omega}_k(z),\quad u(x,y_e-k_e,z)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{i0k}\omega_i(x)\bar{\omega}_k(z)\end{aligned}$$

(参见文献 [5] 中第 1.4 节). 因而

$$u(x,y,z)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{ijk}\omega_i(x)\tilde{\omega}_j(y)\bar{\omega}_k(z),\quad (x,y,z)\in e, \tag{2.4}$$

其中

$$\beta_{000} = u(x_e - h_e, y_e - k_e, z_e - d_e), \tag{2.5}$$

$$\beta_{i00} = \int_{I_1} \partial_x u(x, y_e - k_e, z_e - d_e) l_{i-1}(x)\, dx, \tag{2.6}$$

$$\beta_{0j0} = \int_{I_2} \partial_y u(x_e - h_e, y, z_e - d_e) \tilde{l}_{j-1}(y)\, dy, \tag{2.7}$$

$$\beta_{00k} = \int_{I_3} \partial_z u(x_e - h_e, y_e - k_e, z) \bar{l}_{k-1}(z)\, dz, \tag{2.8}$$

$$\beta_{ij0} = \int_{I_1 \times I_2} \partial_x \partial_y u(x, y, z_e - d_e) l_{i-1}(x) \tilde{l}_{j-1}(y)\, dxdy, \tag{2.9}$$

$$\beta_{0jk} = \int_{I_2 \times I_3} \partial_y \partial_z u(x_e - h_e, y, z) \tilde{l}_{j-1}(y) \bar{l}_{k-1}(z)\, dydz, \tag{2.10}$$

$$\beta_{i0k} = \int_{I_1 \times I_3} \partial_x \partial_z u(x, y_e - k_e, z) l_{i-1}(x) \bar{l}_{k-1}(z)\, dxdz, \tag{2.11}$$

$$\beta_{ijk} = \alpha_{i-1,j-1,k-1} = \int_e \partial_x \partial_y \partial_z u\, l_{i-1}(x) \tilde{l}_{j-1}(y) \bar{l}_{k-1}(z)\, dxdydz, \quad i,j,k \geqslant 1. \tag{2.12}$$

引入三三次多项式空间 T_3, 即

$$q(x,y,z) = \sum_{(i,j,k)\in I} a_{ijk} x^i y^j z^k, \quad q \in T_3, \tag{2.13}$$

其中指标集

$$I = \{(i,j,k) | 0 \leqslant i,j,k \leqslant 3\}. \tag{2.14}$$

定义三三次投影型插值算子 Π^e: $H^3(e) \to T_3(e)$, 使得

$$\Pi^e u(x,y,z) = \sum_{(i,j,k)\in I} \beta_{ijk} \omega_i(x) \tilde{\omega}_j(y) \bar{\omega}_k(z). \tag{2.15}$$

由 Legendre 多项式的定义及 (2.6)–(2.12) 式, 易得

$$\begin{aligned}
&l_i(x) = O(h_e^{-\frac{1}{2}}), \quad \tilde{l}_j(y) = O(k_e^{-\frac{1}{2}}), \quad \bar{l}_k(z) = O(d_e^{-\frac{1}{2}}), \quad i,j,k \geqslant 0;\\
&\omega_i(x) = O(h_e^{\frac{1}{2}}), \quad \tilde{\omega}_j(y) = O(k_e^{\frac{1}{2}}), \quad \bar{\omega}_k(z) = O(d_e^{\frac{1}{2}}), \quad \beta_{i00} = O(h_e^{i-\frac{1}{2}}),\\
&\beta_{0j0} = O(k_e^{j-\frac{1}{2}}), \quad \beta_{00k} = O(d_e^{k-\frac{1}{2}}), \quad \beta_{ij0} = O(h_e^{i-\frac{1}{2}} k_e^{j-\frac{1}{2}}),\\
&\beta_{0jk} = O(k_e^{j-\frac{1}{2}} d_e^{k-\frac{1}{2}}), \quad \beta_{i0k} = O(h_e^{i-\frac{1}{2}} d_e^{k-\frac{1}{2}}),\\
&\beta_{ijk} = O(h_e^{i-\frac{1}{2}} k_e^{j-\frac{1}{2}} d_e^{k-\frac{1}{2}}), \quad i,j,k \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

此外, $\{\omega_i(x)\}$ 具有下面的性质 (参见文献 [5]):

$$\begin{aligned}
&\text{a. } \omega_i(x_e \pm h_e) = 0, \quad i \geqslant 2,\\
&\text{b. } \omega_i(x_e - (x - x_e)) = (-1)^i \omega_i(x_e + (x - x_e)), \quad i \geqslant 2,\\
&\text{c. } (\omega_i, p_m) = 0, \quad \forall\, p_m \in P_m(I_1), \quad i \geqslant m+3,\\
&\text{d. } (\omega_i, \omega_j) = 0, \quad i,j \geqslant 2, \quad i \neq j, \quad |i-j| \neq 2,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

这里 $P_m(I_1)$ 代表 I_1 上的 m 次多项式空间, 且

$$(u,\, v) = \int_{I_1} u(x) v(x)\, dx.$$

显然, $\{\tilde{\omega}_j(y)\}$ 和 $\{\bar{\omega}_k(z)\}$ 也有类似于 (2.17) 式的性质.

为简单起见, 记 $\lambda_{ijk}=\beta_{ijk}\omega_i(x)\tilde{\omega}_j(y)\bar{\omega}_k(z)$, 则

$$\lambda_{ijk}=O(h_e^i k_e^j d_e^k),\quad i,j,k\geqslant 0. \tag{2.18}$$

结合 (2.4), (2.14), (2.15) 式可得

$$R=u-\Pi^e u=\left(\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=4}^{\infty}+\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=4}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}+\sum_{i=4}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\right)\lambda_{ijk}, \tag{2.19}$$

这就是所谓的插值余项.

3 三三次长方体有限元的弱估计

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是边界面分别与坐标平面平行的长方体, $\mathcal{T}^h=\{e\}$ 是 $\bar{\Omega}$ 的一个步长为 h 的长方体剖分, 且 $\bar{\Omega}=\bigcup_{e\in\mathcal{T}^h}\bar{e}$. 考虑以下问题:

$$\begin{cases}-\Delta u=f & 在\ \Omega,\\ u=0 & 在\ \partial\Omega.\end{cases} \tag{3.1}$$

相应的弱形式为

$$a(u\,,\,v)=(f\,,\,v),\quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega), \tag{3.2}$$

其中

$$a(u\,,\,v)\equiv(\nabla u\,,\,\nabla v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dxdydz.$$

如下定义三三次长方体有限元空间:

$$S_0^h(\Omega)=\left\{v\in H_0^1(\Omega):v|_e\in T_3(e),\forall\, e\in\mathcal{T}^h\right\}. \tag{3.3}$$

其有限元方法为: 寻找 $u_h\in S_0^h(\Omega)$, 使得

$$a(u_h\,,\,v)=(f\,,\,v),\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega).$$

显然

$$a(u-u_h\,,\,v)=0,\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega). \tag{3.4}$$

由 (2.15) 和 (3.3) 式, 可得

$$\Pi_h^3:H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\to S_0^h(\Omega), \tag{3.5}$$

其中 $(\Pi_h^3 u)|_e=\Pi^e u$. 下面我们估计

$$a(u-\Pi_h^3 u,\,v)=\int_\Omega \nabla R\cdot\nabla v\,dxdydz,\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega). \tag{3.6}$$

定理 3.1 (弱估计) 设 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是 Ω 的一个长方体剖分族, $u\in W^{5,\infty}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, 则投影型插值算子 Π_h^3 满足下面的基本估计:

$$\left|a(u-\Pi_h^3 u,\,v)\right|\leqslant Ch^4\|u\|_{5,\infty,\Omega}\,|v|_{1,1,\Omega},\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega), \tag{3.7}$$

$$\left|a(u-\Pi_h^3 u,\,v)\right|\leqslant Ch^5\|u\|_{5,\infty,\Omega}\,|v|_{2,1,\Omega}',\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega). \tag{3.8}$$

特别地, 如果剖分族 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是均匀的, 且 $u\in W^{6,\infty}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, 我们有

$$|a(u-\Pi_h^3 u,\,v)|\leqslant Ch^5\|u\|_{6,\infty,\Omega}\,|v|_{1,1,\Omega},\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega), \tag{3.9}$$

$$|a(u-\Pi_h^3 u,\,v)|\leqslant Ch^6\|u\|_{6,\infty,\Omega}\,|v|_{2,1,\Omega}',\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega), \tag{3.10}$$

这里 $|v|'_{2,1,\Omega} = \sum_{e\in\mathcal{T}^h} |v|_{2,1,e}$.

证明 由 $\omega_i(x)$, $\tilde{\omega}_j(y)$, $\bar{\omega}_k(z)$ (参见 (2.17) 式中的性质 c) 及 Legendre 多项式的正交性可得

$$\int_e \nabla R\cdot\nabla v\,dxdydz = \int_e \nabla r\cdot\nabla v\,dxdydz,$$

其中

$$r = \left(\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=4}^{5} + \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=4}^{5}\sum_{k=0}^{5} + \sum_{i=4}^{5}\sum_{j=0}^{5}\sum_{k=0}^{5}\right)\lambda_{ijk}. \tag{3.11}$$

易证

$$\int_e \nabla\lambda_{004}\cdot\nabla v\,dxdydz = \int_e \nabla\lambda_{040}\cdot\nabla v\,dxdydz = \int_e \nabla\lambda_{400}\cdot\nabla v\,dxdydz = 0.$$

只需估计

$$J \equiv \int_e \nabla\lambda_{014}\cdot\nabla v\,dxdydz,$$

其他项为高阶项或可以类似估计的项.

对于任意 $v\in S_0^h(\Omega)$,

$$J_y \equiv \int_e \partial_y\lambda_{014}\partial_y v\,dxdydz = \beta_{014}\int_e \tilde{l}_0(y)\bar{\omega}_4(z)\partial_y v\,dxdydz.$$

由 (2.16) 式可得

$$|J_y| \leqslant |\beta_{014}||\tilde{l}_0(y)\bar{\omega}_4(z)||v|_{1,1,e} \leqslant Ch^4\|u\|_{5,\infty,\Omega}|v|_{1,1,e}. \tag{3.12}$$

此外, 由 Legendre 多项式的正交性可得

$$J_z \equiv \int_e \partial_z\lambda_{014}\partial_z v\,dxdydz = \beta_{014}\int_e \tilde{\omega}_1(y)\bar{l}_3(z)\partial_z v\,dxdydz = 0. \tag{3.13}$$

显然

$$J_x = \int_e \partial_x\lambda_{014}\partial_x v\,dxdydz = 0. \tag{3.14}$$

于是结合 (3.12)–(3.14) 式可得

$$|J| \leqslant Ch^4\|u\|_{5,\infty,\Omega}|v|_{1,1,e}. \tag{3.15}$$

进而有

$$\left|\int_e \nabla R\cdot\nabla v\,dxdydz\right| \leqslant Ch^4\|u\|_{5,\infty,\Omega}|v|_{1,1,e}. \tag{3.16}$$

对单元求和即得 (3.7) 式.

另外, 分部积分可得

$$J_y = \beta_{014}\int_e \tilde{l}_0(y)\bar{\omega}_4(z)\partial_y v\,dxdydz = -\beta_{014}\int_e \tilde{l}_0(y)D^{-1}\bar{\omega}_4(z)\partial_z\partial_y v\,dxdydz. \tag{3.17}$$

于是

$$|J_y| \leqslant |\beta_{014}||\tilde{l}_0(y)D^{-1}\bar{\omega}_4(z)||v|_{2,1,e} \leqslant Ch^5\|u\|_{5,\infty,\Omega}|v|_{2,1,e}. \tag{3.18}$$

由 (3.13), (3.14), (3.18) 式有

$$|J| \leqslant Ch^5\|u\|_{5,\infty,\Omega}|v|_{2,1,e}. \tag{3.19}$$

因而

$$\left|\int_e \nabla R\cdot\nabla v\,dxdydz\right| \leqslant Ch^5\|u\|_{5,\infty,\Omega}|v|_{2,1,e}. \tag{3.20}$$

单元求和即得 (3.8) 式.

要证明 (3.9) 和 (3.10) 式, 需要利用一致网格上的单元合并技术. 我们仍然只需考虑主项

$$J \equiv \int_e \nabla\lambda_{014} \cdot \nabla v \, dxdydz,$$

记 $J_e = J$. 由 (3.13) 和 (3.14) 式, 分部积分及关于 y 积分有

$$J_e = \sqrt{\frac{1}{2}} k_e^{-\frac{1}{2}} \beta_{014} \int_{I_1 \times I_3} D^{-1} \bar{\omega}_4(z) \left(\partial_z v(x, y_e - k_e, z) - \partial_z v(x, y_e + k_e, z)\right) dxdz. \tag{3.21}$$

在相邻单元

$$e' = (x_e - h_e, x_e + h_e) \times (y_e + k_e, y_e + 3k_e) \times (z_e - d_e, z_e + d_e) \equiv I_1 \times I_2' \times I_3, \tag{3.22}$$

有下面类似于 (3.21) 式的结果:

$$J_{e'} = \sqrt{\frac{1}{2}} k_e^{-\frac{1}{2}} \beta_{014}' \int_{I_1 \times I_3} D^{-1} \bar{\omega}_4(z) \left(\partial_z v(x, y_e + k_e, z) - \partial_z v(x, y_e + 3k_e, z)\right) dxdz. \tag{3.23}$$

显然

$$\begin{aligned}
\beta_{014}' - \beta_{014} &= \int_{I_2' \times I_3} \partial_y \partial_z u(x_e - h_e, y, z) \tilde{l}_0(y) \bar{l}_3(z) \, dydz \\
&\quad - \int_{I_2 \times I_3} \partial_y \partial_z u(x_e - h_e, y, z) \tilde{l}_0(y) \bar{l}_3(z) \, dydz \\
&= \int_{I_3} D^{-3} \bar{l}_3(z) (\partial_y \partial_z^4 u(x_e - h_e, \eta_2, z) - \partial_y \partial_z^4 u(x_e - h_e, \eta_1, z)) dz \\
&\quad \times (-1)^3 \sqrt{2} k_e^{\frac{1}{2}} \\
&= (-1)^3 \sqrt{2} k_e^{\frac{1}{2}} \int_{I_3} D^{-3} \bar{l}_3(z) \partial_y^2 \partial_z^4 u(x_e - h_e, \eta, z)(\eta_2 - \eta_1) dz.
\end{aligned}$$

于是

$$|\beta_{014}' - \beta_{014}| \leqslant Ch^5 \|u\|_{6,\infty,\Omega}. \tag{3.24}$$

用 $J_{e+e'}$ 表示 (3.21) 和 (3.23) 式中含有相同因式的项的和, 即

$$J_{e+e'} = \sqrt{\frac{1}{2}} k_e^{-\frac{1}{2}} (\beta_{014}' - \beta_{014}) \int_{I_1 \times I_3} D^{-1} \bar{\omega}_4(z) \partial_z v(x, y_e + k_e, z) \, dxdz. \tag{3.25}$$

由 (3.24) 和 (3.25) 式, 逆估计可得

$$|J_{e+e'}| \leqslant Ch^5 \|u\|_{6,\infty,\Omega} |v|_{1,1,e+e'}. \tag{3.26}$$

单元求和即得

$$\left| \int_\Omega \nabla\lambda_{014} \cdot \nabla v \, dxdydz \right| \leqslant \sum |J_{e+e'}| \leqslant Ch^5 \|u\|_{6,\infty,\Omega} |v|_{1,1,\Omega}. \tag{3.27}$$

在 (3.11) 式中的其他项也有和 (3.27) 式一样的结果. 于是 (3.9) 式得证.

至于 J_e, 分部积分两次, 再关于 y 积分即得

$$J_e = \sqrt{\frac{1}{2}} k_e^{-\frac{1}{2}} \beta_{014} \int_{I_1 \times I_3} D^{-2} \bar{\omega}_4(z) \left(\partial_z^2 v(x, y_e + k_e, z) - \partial_z^2 v(x, y_e - k_e, z)\right) dxdz. \tag{3.28}$$

类似可得

$$J_{e'} = \sqrt{\frac{1}{2}} k_e^{-\frac{1}{2}} \beta_{014}' \int_{I_1 \times I_3} D^{-2} \bar{\omega}_4(z) \left(\partial_z^2 v(x, y_e + 3k_e, z) - \partial_z^2 v(x, y_e + k_e, z)\right) dxdz. \tag{3.29}$$

用 $J'_{e+e'}$ 表示 (3.28) 和 (3.29) 式中包含相同因式的项的和, 即

$$J'_{e+e'}=\sqrt{\frac{1}{2}}k_e^{-\frac{1}{2}}(\beta_{014}-\beta'_{014})\int_{I_1\times I_3}D^{-2}\bar{\omega}_4(z)\partial_z^2 v(x,y_e+k_e,z)\,dxdz. \tag{3.30}$$

类似于 (3.26) 式的证明可得

$$|J'_{e+e'}|\leqslant Ch^6\|u\|_{6,\,\infty,\,\Omega}|v|_{2,\,1,\,e+e'}. \tag{3.31}$$

单元求和即得

$$\left|\int_\Omega \nabla\lambda_{014}\cdot\nabla v\,dxdydz\right|\leqslant\sum|J'_{e+e'}|\leqslant Ch^6\|u\|_{6,\,\infty,\,\Omega}|v|'_{2,\,1,\,\Omega}. \tag{3.32}$$

(3.11) 式中的其他项也有和 (3.32) 式相同的结果. 于是 (3.10) 式得证.

4 离散导数 Green 函数与超逼近

我们如下定义离散 δ 函数 $\delta_Z^h\in S_0^h(\Omega)$, 离散导数 δ 函数 $\partial_Z\delta_Z^h\in S_0^h(\Omega)$, $u\in L^2(\Omega)$ 的 L^2 投影 $P_hu\in S_0^h(\Omega)$, 离散导数 Green 函数 $\partial_Z G_Z^h\in S_0^h(\Omega)$, 以及导数 Green 函数 $\partial_Z G_Z^*\in H_0^1(\Omega)$ (参见文献 [7]):

$$\begin{aligned}&(v,\,\delta_Z^h)=v(Z),\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega),\quad (u-P_hu,\,v)=0,\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega),\\&(v,\,\partial_Z\delta_Z^h)=\partial v(Z),\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega)\quad (\nabla\partial_Z G_Z^h,\,\nabla v)=\partial v(Z),\quad \forall\, v\in S_0^h(\Omega),\\&(\nabla\partial_Z G_Z^*,\,\nabla v)=(\partial_Z\delta_Z^h,\,v),\quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

其中 $S_0^h(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$ 是 (3.3) 式中定义的有限元空间.

显然 $\partial_Z G_Z^h$ 是 $\partial_Z G_Z^*$ 的有限元逼近.

此外, 我们如下定义一个权函数:

$$\phi\equiv\phi(X)=\left(|X-\bar{X}|^2+h^2\right)^{-\frac{3}{2}},\quad \forall\, X\in\bar{\Omega}, \tag{4.1}$$

其中 $\bar{X}\in\bar{\Omega}$ 是一个固定点. 这个权函数有以下性质:

$$|\nabla^m\phi^\alpha|\leqslant C\phi^{\alpha+\frac{m}{3}},\quad \alpha\in\mathbb{R},\, m=1,2,3,\ldots, \tag{4.2}$$

$$\int_\Omega\phi^\alpha(X)\,dX\leqslant C(\alpha-1)^{-1}h^{-3(\alpha-1)},\quad \forall\,\alpha>1, \tag{4.3}$$

$$\int_\Omega\phi(X)\,dX\leqslant C|\ln h|, \tag{4.4}$$

这里 $\nabla^m\phi^\alpha$ 表示函数 ϕ^α 的 m 阶导数的张量.

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, 定义如下范数:

$$\|v\|_{m,\,\phi^\alpha,\,\Omega}=\left\{\int_\Omega\phi^\alpha\sum_{|\beta|\leqslant m}|D^\beta v|^2\,dX\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

当 $m=0$ 时, 简记

$$\|v\|_{\phi^\alpha,\,\Omega}=\left(\int_\Omega\phi^\alpha|v|^2\,dX\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.6}$$

对于离散 δ 函数 $\delta_Z^h(X)$ 和离散导数 δ 函数 $\partial_Z\delta_Z^h(X)$, 有下面性质:

$$|\delta_Z^h(X)|\leqslant Ch^{-3}e^{-Ch^{-1}|X-Z|},\quad \forall\, X,Z\in\bar{\Omega}, \tag{4.7}$$

$$|\partial_Z\delta_Z^h(X)|\leqslant Ch^{-4}e^{-Ch^{-1}|X-Z|},\quad \forall\, X,Z\in\bar{\Omega}. \tag{4.8}$$

我们假定映射

$$\mathcal{L}: W^{2,q}(\Omega)\cap W_0^{1,q}(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega) \quad (1<q\leqslant 3) \tag{4.10}$$

是同胚的 (参见文献 [19]). 于是, 当 $v\in W^{2,q}(\Omega)\cap W_0^{1,q}(\Omega)$ 时, 有所谓的先验估计:

$$\|v\|_{2,q,\Omega}\leqslant C(q)\|\mathcal{L}v\|_{0,q,\Omega}, \tag{4.11}$$

这里 $C(q)$ 表示一个与 q 有关的常数.

引理 4.1 设 $P_h w$ 是 $w\in W^{1,q}(\Omega)$ 的 L^2 投影, 则下面的稳定性估计成立:

$$\|P_h w\|_{1,q,\Omega}\leqslant C\|w\|_{1,q,\Omega}, \tag{4.12}$$

其中 $3<q\leqslant +\infty$.

引理 4.2 对任意 $\alpha>0$, 有

$$\left\|\partial_Z \delta_Z^h\right\|_{\phi^{-\alpha}}\leqslant Ch^{\frac{3\alpha-5}{2}}. \tag{4.13}$$

证明 由 (4.1) 和 (4.8) 式得

$$\begin{aligned}\left\|\partial_Z \delta_Z^h\right\|_{\phi^{-\alpha}}^2 &\leqslant C\int_\Omega \left(|X-Z|^2+h^2\right)^{\frac{3\alpha}{2}} h^{-8} e^{-Ch^{-1}|X-Z|}dX\\ &\leqslant C\int_0^\infty \left(r^2+h^2\right)^{\frac{3\alpha}{2}} h^{-8} e^{-Ch^{-1}r} r^2 dr,\end{aligned}$$

记 $h^{-1}r=t$, 则

$$\begin{aligned}\left\|\partial_Z \delta_Z^h\right\|_{\phi^{-\alpha}}^2 &\leqslant Ch^{3\alpha-5}\int_0^\infty \left(t^2+1\right)^{\frac{3\alpha}{2}} e^{-Ct} t^2 dt\\ &\leqslant Ch^{3\alpha-5},\end{aligned}$$

(4.13) 式得证.

引理 4.3 对任意 $\varepsilon\in(\frac{1}{2},1)$, 有下面估计:

$$|\partial_Z G_Z^*|_{\phi^{1-\varepsilon}}\leqslant Ch^{\frac{3\varepsilon-4}{2}}. \tag{4.14}$$

证明 令 $r=\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, r'=\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$, 显然 $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$, 于是

$$\begin{aligned}\|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{1-\varepsilon}}^2 &= \int_\Omega \phi^{1-\varepsilon}\left|\partial_Z G_Z^*\right|^2 dX\\ &\leqslant \left(\int_\Omega \phi^{1+\varepsilon}dX\right)^{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left|\partial_Z G_Z^*\right|_{0,\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}^2\\ &\leqslant C\left(\varepsilon^{-1}h^{-3\varepsilon}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \|\partial_Z G_Z^*\|_{0,\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}^2 .\end{aligned}$$

假设 w 是共轭问题

$$\begin{cases}\mathcal{L}w=|\partial_Z G_Z^*|^{\frac{1}{\varepsilon}}\operatorname{sgn}(\partial_Z G_Z^*) & 在\ \Omega,\\ w=0 & 在\ \partial\Omega\end{cases}$$

的解. 由逆估计, L^2 投影算子 P_h 的定义及其稳定性估计 (4.12) 可得

$$\begin{aligned}\|\partial_Z G_Z^*\|_{0,\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} &= (\partial_Z G_Z^*, |\partial_Z G_Z^*|^{\frac{1}{\varepsilon}}\operatorname{sgn}(\partial_Z G_Z^*))\\ &= a(\partial_Z G_Z^*, w) = \left|(\partial_Z \delta_Z^h, w)\right| = |\partial_Z P_h w(Z)|\\ &\leqslant |P_h w|_{1,\infty}\leqslant Ch^{-\frac{3}{q}}\left|P_h w\right|_{1,q}\\ &\leqslant Ch^{-\frac{3}{q}}\left|w\right|_{1,q},\end{aligned}$$

其中 $q > 3$.

令 $q = \frac{3(1+\varepsilon)}{2-\varepsilon} > 3$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{3}$, 于是 $p = 1+\varepsilon < 2$. 由嵌入定理 (参见文献 [20]) 和先验估计 (4.11) 式可得

$$|w|_{1,q} \leqslant C\,\|w\|_{2,p} \leqslant C\,\|\partial_Z G_Z^*\|_{0,\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

故

$$\|\partial_Z G_Z^*\|_{0,\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}^2 \leqslant Ch^{-\frac{6}{q}} = Ch^{\frac{2\varepsilon-4}{1+\varepsilon}}.$$

从而

$$\|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{1-\varepsilon}}^2 \leqslant Ch^{3\varepsilon-4},$$

(4.14) 式得证.

引理 4.4 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$\left\|\nabla^2\partial_Z G_Z^*\right\|_{\phi^{-\alpha}}^2 \leqslant C\left\|\partial_Z \delta_Z^h\right\|_{\phi^{-\alpha}}^2 + C\left\|\partial_Z G_Z^*\right\|_{\phi^{-\alpha+\frac{4}{3}}}^2, \tag{4.15}$$

特别地, 如果 $\frac{5}{6} < \alpha < \frac{4}{3}$, 有

$$\left\|\nabla^2\partial_Z G_Z^*\right\|_{\phi^{-\alpha}}^2 \leqslant Ch^{3\alpha-5}. \tag{4.16}$$

证明 由权范数定义与先验估计 (4.11) 式, 可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{-\alpha}}^2 &= \int_\Omega \phi^{-\alpha}|\nabla^2\partial_Z G_Z^*|^2 dX = \int_\Omega \left(\phi^{-\frac{\alpha}{2}}|\nabla^2\partial_Z G_Z^*|\right)^2 dX \\
&\leqslant C\left(\int_\Omega |\nabla^2\left(\phi^{-\frac{\alpha}{2}}\partial_Z G_Z^*\right)|^2 dX + \int_\Omega |\nabla^2\phi^{-\frac{\alpha}{2}}\partial_Z G_Z^*|^2 dX + \int_\Omega |\nabla\phi^{-\frac{\alpha}{2}}|^2|\nabla\partial_Z G_Z^*|^2 dX\right) \\
&\leqslant C(\|\nabla^2(\phi^{-\frac{\alpha}{2}}\partial_Z G_Z^*)\|_0^2 + \|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{-\alpha+\frac{4}{3}}}^2 + |\partial_Z G_Z^*|_{1,\phi^{-\alpha+\frac{2}{3}}}^2) \\
&\leqslant C(\|\mathcal{L}(\phi^{-\frac{\alpha}{2}}\partial_Z G_Z^*)\|_0^2 + \|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{-\alpha+\frac{4}{3}}}^2 + |\partial_Z G_Z^*|_{1,\phi^{-\alpha+\frac{2}{3}}}^2) \\
&\leqslant C\left(\int_\Omega \phi^{-\alpha}|\mathcal{L}(\partial_Z G_Z^*)|^2 dX + \int_\Omega |\nabla\phi^{-\frac{\alpha}{2}}|^2|\nabla\partial_Z G_Z^*|^2 dX + \int_\Omega |\nabla\phi^{-\frac{\alpha}{2}}|^2|\partial_Z G_Z^*|^2 dX\right. \\
&\qquad \left. + \int_\Omega |\nabla^2\phi^{-\frac{\alpha}{2}}|^2|\partial_Z G_Z^*|^2 dX + \|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{-\alpha+\frac{4}{3}}}^2 + |\partial_Z G_Z^*|_{1,\phi^{-\alpha+\frac{2}{3}}}^2\right) \\
&\leqslant C(\|\mathcal{L}(\partial_Z G_Z^*)\|_{\phi^{-\alpha}}^2 + \|\partial_Z G_Z^*\|_{1,\phi^{-\alpha+\frac{2}{3}}}^2 + \|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{-\alpha+\frac{4}{3}}}^2) \\
&\leqslant C\|\partial_Z \delta_Z^h\|_{\phi^{-\alpha}}^2 + C|a(\partial_Z G_Z^*, \phi^{-\alpha+\frac{2}{3}}\partial_Z G_Z^*)| + C\|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{-\alpha+\frac{4}{3}}}^2 \\
&\leqslant C\|\partial_Z \delta_Z^h\|_{\phi^{-\alpha}}^2 + C|(\partial_Z \delta_Z^h, \phi^{-\alpha+\frac{2}{3}}\partial_Z G_Z^*)| + C\|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{-\alpha+\frac{4}{3}}}^2 \\
&\leqslant C\|\partial_Z \delta_Z^h\|_{\phi^{-\alpha}}^2 + C\|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{-\alpha+\frac{4}{3}}}^2,
\end{aligned}$$

(4.15) 式得证.

最后证明 (4.16) 式.

事实上, 如果 $\frac{5}{6} < \alpha < \frac{4}{3}$, 在 (4.14) 中取 $\varepsilon = \alpha - \frac{1}{3}$, $\varepsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$. 于是由 (4.14) 式得

$$\|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{-\alpha+\frac{4}{3}}}^2 = \|\partial_Z G_Z^*\|_{\phi^{1-\varepsilon}}^2 \leqslant Ch^{3\varepsilon-4} = Ch^{3\alpha-5}. \tag{4.17}$$

结合 (4.13), (4.15) 和 (4.17) 式即可得到 (4.16) 式.

引理 4.5

$$|\partial_Z G_Z^*|_{2,1,\Omega} \leqslant Ch^{-1}. \tag{4.18}$$

证明 显然

$$|\partial_Z G_Z^*|_{2,1} \leqslant \left(\int_\Omega \phi^\alpha dx\right)^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla^2 \partial_Z G_Z^*\right\|_{\phi^{-\alpha}}. \tag{4.19}$$

令 $1 < \alpha < \frac{4}{3}$, 由 (4.3), (4.16) 和 (4.19) 式, 即可证明 (4.18) 式.

利用权范数思想和类似于文献 [7] 中的方法, 可得下面的引理 4.6.

引理 4.6

$$|\partial_Z G_Z^* - \partial_Z G_Z^h|_{1,1} \leqslant C. \tag{4.20}$$

引理 4.7

$$|\partial_Z G_Z^h|'_{2,\,1,\,\Omega} \leqslant Ch^{-1}, \tag{4.21}$$

其中 $|\partial_Z G_Z^h|'_{2,\,1,\,\Omega} = \sum_{e\in\mathcal{T}^h} |\partial_Z G_Z^h|_{2,\,1,\,e}$.

证明 记 $g = \partial_Z G_Z^*$, $g_h = \partial_Z G_Z^h$, 设 g_I 是 g 的插值, 由三角不等式、插值误差估计和逆估计可得

$$\begin{aligned}
|g - g_h|'_{2,\,1} &\leqslant |g - g_I|'_{2,\,1} + |g_I - g_h|'_{2,\,1} \\
&\leqslant C\,|g|_{2,\,1} + Ch^{-1}\,|g_I - g_h|_{1,\,1} \\
&\leqslant C\,|g|_{2,\,1} + Ch^{-1}\,|g - g_I|_{1,\,1} + Ch^{-1}\,|g - g_h|_{1,\,1} \\
&\leqslant C\,|g|_{2,\,1} + Ch^{-1}\,|g - g_h|_{1,\,1}\,.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
|g_h|'_{2,\,1} &\leqslant |g - g_h|'_{2,\,1} + |g|_{2,\,1} \\
&\leqslant C\,|g|_{2,\,1} + Ch^{-1}\,|g - g_h|_{1,\,1}\,.
\end{aligned}$$

由 (4.18) 和 (4.20) 式立即可得 (4.21) 式.

下面是本文的主要结果:

定理 4.1 (超逼近) 设 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是 Ω 的长方体正规剖分族, $u \in W^{5,\,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, u_h 和 $\Pi_h^3 u$ 分别是 u 的三三次长方体有限元逼近与三三次投影型插值, 则下面的超逼近估计成立:

$$|u_h - \Pi_h^3 u|_{1,\,\infty,\,\Omega} \leqslant Ch^4 \|u\|_{5,\,\infty,\,\Omega}. \tag{4.22}$$

特别地, 如果 $\{\mathcal{T}^h\}$ 是均匀剖分族, 且 $u \in W^{6,\,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 则可得下面的强超逼近估计:

$$|u_h - \Pi_h^3 u|_{1,\,\infty,\,\Omega} \leqslant Ch^5 \|u\|_{6,\,\infty,\,\Omega}. \tag{4.23}$$

证明 对任意 $Z \in \Omega$, 由 (3.4) 式和 $\partial_Z G_Z^h$ 的定义知

$$\partial(u_h - \Pi_h^3 u)(Z) = a(u_h - \Pi_h^3 u\,,\, \partial_Z G_Z^h) = a(u - \Pi_h^3 u\,,\, \partial_Z G_Z^h).$$

利用 (3.8) 式可得

$$|\partial(u_h - \Pi_h^3 u)(Z)| \leqslant Ch^5 \|u\|_{5,\,\infty,\,\Omega} |\partial_Z G_Z^h|'_{2,\,1,\,\Omega}. \tag{4.24}$$

结合 (4.21) 与 (4.24) 式即得 (4.22) 式.

类似地, 在均匀网格下, 由 (3.10) 式得

$$|\partial(u_h - \Pi_h^3 u)(Z)| \leqslant Ch^6 \|u\|_{6,\,\infty,\,\Omega} |\partial_Z G_Z^h|'_{2,\,1,\,\Omega}. \tag{4.25}$$

于是, 由 (4.21) 和 (4.25) 式立即可得 (4.23) 式.

注 通常情况下, 问题 (3.1) 的解在长方体区域 Ω 的八个顶点处有奇性, 这就意味着本文中的整体正则性假定 $u \in W^{5,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 或 $W^{6,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 是不现实的, 它只是一种理想的情形. 因而超逼近估计 (4.22) 和 (4.23) 式也只是理想的结果. 然而, 如果我们考虑的是子域 $\bar{U} \subset\subset \Omega$ 上的问题, 并且 $\bar{U}$ 能被剖分 $\mathcal{T}^h$ 覆盖, 那么, 整体正则性假定是可以实现的 (参见文献 [21]). 于是, 在子域 $\bar{U}$ 上, 我们可以得到类似于上面的超逼近估计, 即所谓的局部超逼近估计.

5 整体超收敛估计和一个数值例子

本节利用文献 [4, 22] 中介绍的插值后处理技术和上面得到的超逼近估计导出有限元的整体超收敛估计.

考虑由 $\mathcal{T}^h$ 中的四个具有公共顶点的相邻单元构成的一个大单元 e^* (图 5.1), 构造一个插值后处理算子 $\Pi_{2h}^6 : C(e^*) \to T_6(e^*)$ 使得

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\ \Pi_{2h}^6 w(Z_i) = w(Z_i),\ i = 1, \ldots, 27,\\
&\text{(ii)}\ \int_{l_i} (w - \Pi_{2h}^6 w) v \, dl = 0, \forall\, v \in P_1(l_i),\ i = 1, \ldots, 54,\\
&\text{(iii)}\ \int_{\sigma_i} (w - \Pi_{2h}^6 w) v \, d\sigma = 0, \forall\, v \in Q_1(\sigma_i),\ i = 1, \ldots, 36,\\
&\text{(iv)}\ \int_{e_i} (w - \Pi_{2h}^6 w) v \, dV = 0, \forall\, v \in T_1(e_i),\ i = 1, \ldots, 8.
\end{aligned}
$$

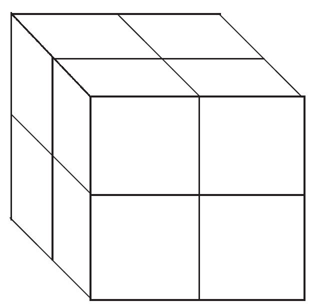

图 5.1 大单元 e^*

这里 $e_i, i = 1, \ldots, 8$, 代表 $\mathcal{T}^h$ 中具有公共顶点的相邻的 8 个单元, $Z_i, i = 1, \ldots, 27$, $l_i, i = 1, \ldots, 54$, $\sigma_i, i = 1, \ldots, 36$, 分别是它们的顶点、边和面. 用 P_1, Q_1, T_1 和 T_6 分别代表一次多项式集、双线性多项式集、三线性多项式集和三六次多项式集.

上面的插值后处理算子 Π_{2h}^6 具有如下性质 (参见文献 [4, 22]):

$$
\begin{aligned}
&\text{I. } |\Pi_{2h}^6 w - w|_{1,\infty} \leqslant Ch^r \|w\|_{r+1,\infty},\ 1 \leqslant r \leqslant 6,\\
&\text{II. } |\Pi_{2h}^6 v|_{1,\infty} \leqslant C|v|_{1,\infty},\ \forall\, v \in S_0^h(\Omega),\\
&\text{III. } \Pi_{2h}^6 \Pi_h^3 = \Pi_{2h}^6,
\end{aligned}
$$

这里 Π_h^3 是第 3 节介绍的三三次投影型插值算子.

由超逼近估计和插值后处理算子的性质可导出下面的整体超收敛估计.

定理 5.1 (超收敛) 在定理 4.1 的条件下, 如果剖分是正规的, 则

$$|u-\Pi_{2h}^6 u_h|_{1,\infty,\Omega} \leqslant Ch^4\|u\|_{5,\infty,\Omega}, \tag{5.1}$$

如果剖分是均匀的, 则

$$|u-\Pi_{2h}^6 u_h|_{1,\infty,\Omega} \leqslant Ch^5\|u\|_{6,\infty,\Omega}. \tag{5.2}$$

证明 显然

$$|u-\Pi_{2h}^6 u_h|_{1,\infty,\Omega} \leqslant |u-\Pi_{2h}^6\Pi_h^3 u|_{1,\infty,\Omega} + |\Pi_{2h}^6\Pi_h^3 u-\Pi_{2h}^6 u_h|_{1,\infty,\Omega}. \tag{5.3}$$

如果剖分是正规的, 则由 (4.22) 式和 Π_{2h}^6 的性质 II 得

$$|\Pi_{2h}^6\Pi_h^3 u-\Pi_{2h}^6 u_h|_{1,\infty,\Omega} \leqslant |\Pi_h^3 u-u_h|_{1,\infty,\Omega} \leqslant Ch^4\|u\|_{5,\infty,\Omega}, \tag{5.4}$$

由 Π_{2h}^6 的性质 I 和 III 可得

$$|u-\Pi_{2h}^6\Pi_h^3 u|_{1,\infty,\Omega} \leqslant |u-\Pi_{2h}^6 u|_{1,\infty,\Omega} \leqslant Ch^4\,\|u\|_{5,\infty,\Omega}. \tag{5.5}$$

结合 (5.3)–(5.5) 式即可证明结果 (5.1). 类似可证明结果 (5.2).

例 5.1 考虑 Possion 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{在 } \Omega=[0,1]\times[0,1]\times[0,1], \\ u=0 & \text{在 } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中

$$f=(-e^x(e^y-(e-1)y-1)-e^y(e^x-(e-1)x-1)+\pi^2(e^x-(e-1)x-1)(e^y-(e-1)y-1))\sin(\pi z).$$

精确解为

$$u=(e^x-(e-1)x-1)(e^y-(e-1)y-1)\sin(\pi z).$$

设 u_h 和 Π_{2h}^6 分别是三三次有限元逼近和插值后处理算子, 解例 5.1 可得下面的数值结果:

表 1 均匀剖分下的整体超收敛数值结果

h	$\|u-u_h\|_{1,\infty,\Omega}$	$\|u-\Pi_{2h}^6 u_h\|_{1,\infty,\Omega}$
0.5	0.0442	0.0131
0.25	4.4650e–003	2.8126e–004
0.125	5.4372e–004	8.4386e–006

上面的数值结果和理论估计是一致的.

致谢 作者感谢评审专家提出的宝贵意见.

参考文献

1 Babuška I, Strouboulis T. The finite element method and its reliability. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford: Oxford Science Publications, 2001
2 陈传淼. 有限元超收敛构造理论. 长沙: 湖南科技出版社, 2001
3 陈传淼, 黄云清. 有限元高精度理论. 长沙: 湖南科技出版社, 1995
4 林群, 严宁宁. 高效有限元的构造与分析. 保定: 河北大学出版社, 1996
5 林群, 朱起定. 有限元的预处理与后处理. 上海: 上海科技出版社, 1994

6 Wahlbin L B. Superconvergence in Galerkin Finite Element Methods. Berlin: Springer-Verlag, 1995

7 朱起定, 林群. 有限元超收敛理论. 长沙: 湖南科技出版社, 1989

8 Brandts J H, Křížek M. History and future of superconvergence in three dimensional finite element methods. Proc Conf Finite Element Methods: Three-dimensional Problems, GAKUTO Internat Ser Math Sci Appl, Gakkotosho, Tokyo, **15**: 24–35 (2001)

9 Brandts J H, Křížek M. Gradient superconvergence on uniform simplicial partitions of polytopes. *IMA Numer Anal J*, **23**: 489–505 (2003)

10 Brandts J H, Křížek M. Superconvergence of tetrahedral quadratic finite elements. *Comput Math J*, **23**(1): 27–36 (2005)

11 陈传淼. 线性四面体元的应力佳点. 湘潭大学学报 (自然科学版), **3**: 16–24 (1980)

12 Chen L. Superconvergence of tetrahedral linear finite elements. *Numer Anal Model Inter J*, **3**: 273–282 (2006)

13 Goodsell G. Gradient superconvergence for piecewise linear tetrahedral finite elements. Technical Report RAL-90-031, Science and Engineering Research Council, Rutherford Appleton Laboratory, 1990

14 Goodsell G. Pointwise superconvergence of the gradient for the linear tetrahedral element. *Numer Methods Partial Differential Equations*, **10**: 651–666 (1994)

15 Kantchev V, Lazarov R D. Superconvergence of the gradient of linear finite elements for 3D Poisson equation. Proc Conf Opti Algor, Publ Bulg Acad Sci, Sofia, 172–182 (1986)

16 Lin R C, Zhang Z M. Natural superconvergent points in 3D finite elements. *SIAM Numer Anal J*, **46**(3): 1281–1297 (2008)

17 Liu J H, Zhu Q D. Uniform superapproximation of the derivative of tetrahedral quadratic finite element approximation. *Comput Math J*, **23**(1): 75–82 (2005)

18 Zhang Z M, Lin R C. Locating natural superconvergent points of finite element methods in 3D. *Numer Anal Model Inter J*, **2**: 19–30 (2005)

19 Grisvard P. Behavior of the Solutions of an Elliptic Boundary Value Problem in a Polygonal or Polyhedral Domain. Numerical Solution of Partial Differential Equations III. New York: Academic Press, 1976

20 Adams R A. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975

21 Zhu Q D. Natural inner superconvergence for the finite element method. Proc China-France Symposium on the FEM. Beijing: Science Press, 1983

22 Yan N N. Superconvergence Analysis and a Posteriori Error Estimation in Finite Element Methods. Beijing: Science Press, 2008