非可加路径费用的交通网络平衡问题

易昆南[1], 李志纯[2], 李 菁[3]

(1. 中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙, 410075;
2. 北京航空航天大学 管理学院, 北京 100083; 3. 扬州大学 广陵学院, 江苏 扬州, 225127)

摘要: 利用变分不等式方法研究了非可加路径费用的交通网络平衡问题, 给出了与平衡条件等价的变分不等式模型, 它包含了可加路径费用的网络平衡模型。此外, 讨论了模型解的存在性和惟一性条件, 这为进一步研究一般交通网络的用户平衡问题提供了条件。

关键词: 非可加路径费用; 网络平衡; 变分不等式; 旅行负效用

中图分类号: U491 **文献标识码**: A **文章编号**: 1672-7207(2004)05-0865-04

Traffic Network Equilibrium Problem with Nonadditive Path Cost

YI Kun-nan[1], LI Zhi-chun[2], LI Jing[3]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Central South University, Changsha 410075, China;
2. School of Management, Beijing University Aeronautics and Astronautics, Beijing 10083, China;
3 Guangling College, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China)

Abstract: A variational inequality approach is utilized to study traffic network equilibrium problem with non-additive path cost. An equivalent variational inequality model is presented, which includes the existing additive models as its special case. Existence and uniqueness of solutions to the model under some weak conditions are investigated. This study provides a powerful tool to further explore the traffic network equilibrium problem in a general situation.

Key words: nonadditive path cost; network equilibrium; variational inequality; travel disutility

许多研究者在研究交通网络平衡问题时, 假定路网中的路径费用等于构成该路径的所有路段费用之和[1-4], 这一假设为分析网络平衡条件和设计平衡模型的求解方法提供了方便, 因为它将模型中的路径变量转化为路段变量, 从而避免了路径的列举, 并为变量的存贮和管理带来了便利。然而, 在实际中, 可加性假设往往不满足, 尤其是随着各种交通政策、法规的颁布实施, 使用可加路径费用来评价路网系统及政策效果并不可行, 因此, 研究非可加路径费用的交通网络平衡问题更切实际。

在现实生活中, 路径费用不可加的例子很多, 如公交车票价和高速公路收费问题。以一条具有 3 个停靠站(A, B, C)的公交线路为例, 通常从 A 到 B, 再从 B 换乘到 C 的乘车票价是从 A 直达 C 的乘车票价的 2 倍。因此, 直达的票价并不等于按段到达的票价之和, 票价并不与旅行时间或里程成比例, 而与具体的路径有直接的对应关系。时间价值一般是非线性的, 花费的时间越多, 则单位时间的价值越大, 花费的时间越少, 单位时间的价值也要小。可以说, 时间价值的非线性使得路径费用的可加性假设

收稿日期: 2004-04-10
基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(01JJY2088)
作者简介: 易昆南(1954-), 男, 湖南长沙人, 副教授, 硕士生导师, 从事数学建模与系统优化研究
论文联系人: 易昆南, 男, 副教授; 电话: 0731-2656643(O); E-mail: ykn_88@sina.com

在实际中不适用。

S. GABRIEL 等用非线性互补(NCP)方法研究了非可加路径费用的交通网络平衡问题[5]。非线性互补问题是变分不等式(VI)问题的特殊情形, 因此, 无论从模型上还是从算法上, 均需利用变分不等式方法来进行研究使之更具一般性。

1 符号定义

考虑网络 $G=(N, A)$(其中 N 为节点集, A 为路段集, n 为路段的条数)。设: W 为网络中 OD 对的集合; ω 为 W 中的 1 个元素; n_W 为 OD 对的个数; P_ω 为 OD 对 ω 间的所有路径集, $p \in P_\omega$, 为 OD 对 ω 间的 1 条路径; $P=\bigcup_{\omega \in W} P_\omega$, 为路网中所有路径的集合; n_p 为路径的总条数; F_p 为 OD 对 ω 间路径 $p \in P$ 上的流量; $\boldsymbol{F}=(F_p: p \in P) \in R_+^{n_p}$, 为路径流量向量; f_a 为路段 a 上的流量; $\boldsymbol{f}=(f_a: a \in A) \in R_+^{n_A}$, 为路段流量向量; $\lambda_\omega: R_+^{n_W} \to R_+$ 为 OD 对 ω 间的旅行负效用函数; $\lambda=(\lambda_\omega: \omega \in W) \in R_+^{n_W}$, 为平衡旅行负效用向量; $d_\omega: R_+^{n_W} \to R_+$ 为 OD 对 ω 间的需求函数; $\boldsymbol{d}=(d_\omega: \omega \in W) \in R_+^{n_W}$, 为 OD 需求量(函数)向量; $C_p: R_+^{n_p} \to R_+$ 为 OD 对 ω 间路径 $p \in P$ 上的费用; $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{F}): p \in P) \in R_+^{n_p}$, 为路径费用函数向量; $t_a(\boldsymbol{f})$ 为路段 a 上的旅行时间; $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{f})=(t_a(\boldsymbol{f}): a \in A) \in R_+^{n_A}$, 为路段旅行时间向量; δ_{ap} 为路段与路径的关联关系; 若路段 a 在路径 p 上, 则 δ_{ap} 为 1, 否则为 0; $\Delta=(\delta_{ap})_{a_A \times n_p}$, 为路段与路径的关联矩阵。

2 变分不等式模型

S. GABRIEL 等给出了如下非可加路径费用的一般表达式[5]:

$$C_p(\boldsymbol{F})=\Lambda_p(\boldsymbol{F})+\sum_{a \in A} \eta \delta_{ap} t_a(\boldsymbol{f})+ g_p\left(\sum_{a \in A} \delta_{ap} t_a(\boldsymbol{f})\right)。 \tag{1}$$

其中: Λ_p 为基于路径 p 长度的运营成本(如道路使用收费、道路维护费等); η 表示时间的运营成本(如耗油成本等); $g_p(\cdot)$ 为路径 p 的时间价值函数。

式(1)用向量形式表示为:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{F})=\Lambda(\boldsymbol{F})+\eta \Delta^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{f})+\boldsymbol{g}(\Delta^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t}(\Delta \boldsymbol{F}))。 \tag{2}$$

路径费用函数均采用式(1)或式(2)的形式。

定义 1 (已知 OD 需求函数的交通网络平衡条件) 路径流量向量 $\boldsymbol{F}^* \in R_+^{n_p}$, 处于弹性需求交通平衡状态, 当且仅当

$$C_p(\boldsymbol{F}^*)\begin{cases} =\lambda_\omega^*, & 若\ F_p^*>0; \\ \geqslant \lambda_\omega^*, & 若\ F_p^*=0。\end{cases} \tag{3}$$

和

$$d_\omega(\lambda^*)\begin{cases} =\sum_{p \in P_\omega} F_p^*, & 若\ \lambda_\omega^*>0; \\ \leqslant \sum_{p \in P_\omega} F_p^*, & 若\ \lambda_\omega^*=0。\end{cases} \tag{4}$$

若已知的不是需求函数 $d_\omega(\lambda)$, 而是 OD 对旅行负效用函数 $\lambda_\omega(\boldsymbol{d})$, 则弹性需求下的交通网络平衡条件又可用如下定义表述。

定义 2 (已知 OD 对旅行负效用函数的交通网络平衡条件) 路径流量向量 $\boldsymbol{F}^* \in R_+^{n_p}$ 处于弹性需求交通平衡状态, 当且仅当

$$C_p(\boldsymbol{F}^*)\begin{cases} =\lambda_\omega^*(\boldsymbol{d}), & 若\ \boldsymbol{F}^*>0, \\ \geqslant \lambda_\omega^*(\boldsymbol{d}), & 若\ \boldsymbol{F}^*=0。\end{cases} \tag{5}$$

若需求函数 $d_\omega(\cdot)$ 为已知的常数, 则定义 1 中的条件(4)消失, 条件(3)就是固定需求的交通网络平衡条件。

定理 1 可行流$(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{d}^*, \lambda^*) \in \boldsymbol{K}$ 是弹性需求下的平衡流, 当且仅当它满足变分不等式:

$$\sum_{\omega \in W} \sum_{p \in P_\omega} C_p(\boldsymbol{F}^*)(F_p-F_p^*)-\sum_{\omega \in W} \lambda_\omega^*(d_\omega-d_\omega^*)+ \sum_{\omega \in W}(d_\omega^*-d_\omega(\lambda^*))(\lambda_\omega-\lambda_\omega^*) \geqslant 0,$$

$$\forall(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{d}, \lambda) \in \boldsymbol{K}。 \tag{6}$$

其中可行域 $\boldsymbol{K}=\{(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{d}, \lambda) \mid d_\omega=\sum_{p \in P_\omega} F_p,\ \omega \in W,\ F_p \geqslant 0, p \in P,\ \lambda \geqslant 0\}$。

定理 1 表示的非可加路径费用的变分不等式模型与可加路径费用的变分不等式模型类似[1, 6], 不同的是第 1 项, 前者以路径为变量, 而后者以路段为变量。

若已知的不是需求函数 $d_\omega(\lambda)$, 而是 OD 对旅行负效用函数 $\lambda_\omega(\boldsymbol{d})$, 则可得如下的结论。

推论 1 (已知 OD 对旅行负效用函数 $\lambda_\omega(\boldsymbol{d})$ 的交通网络平衡 VI模型) 可行流$(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{d}^*) \in K_1$ 是弹性需求下的平衡流, 当且仅当它满足变分不等式:

$$\sum_{\omega \in W} \sum_{p \in P_\omega} C_p(\boldsymbol{F}^*)(\boldsymbol{F}_p-\boldsymbol{F}_p^*)- \sum_{\omega \in W} \lambda_\omega(\boldsymbol{d}^*)(d_\omega-d_\omega^*) \geqslant 0,\ \forall(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{d}) \in \boldsymbol{K}_1。 \tag{7}$$

其中可行域为

$$\boldsymbol{K}_1=\{(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{d}) \mid d_\omega=\sum_{p \in P_\omega} F_p,$$

$\omega \in W, F_p \geqslant 0, p \in P\}$。

对固定需求的非可加路径费用的网络平衡问题, 有如下结论。

推论 2 (固定需求情形的 VI 模型) 可行流 $\boldsymbol{F}^* \in \boldsymbol{K}_2$ 是固定需求的平衡流, 当且仅当它满足变分不等式:

$$\sum_{\omega \in W}\sum_{p \in P_\omega} C_p(\boldsymbol{F}^*)(F_p - F_p^*) \geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{F} \in \boldsymbol{K}_2。 \tag{8}$$

其中可行域

$$\boldsymbol{K}_2 = \{\boldsymbol{F} \mid d_\omega = \sum_{p \in P_\omega} F_p, \omega \in W, F_p \geqslant 0, p \in P\}。$$

3　模型解的存在性

对弹性需求下的网络平衡模型(6), 由于可行域 $\boldsymbol{K}$ 不是紧的, 因此, 不能直接由标准的变分不等式理论得到解的存在性结果。下面给出一个较弱条件下的存在性定理。

定理 2 若函数 $\Lambda, \boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{t} > 0)$ 是连续函数, 需求函数 $\boldsymbol{d}$ 连续有界, 即存在正的常数 k_1, k_2, 使得

$$t_a(\Delta \boldsymbol{F}) \geqslant k_1, \forall_a \in A, \boldsymbol{F} \in \boldsymbol{K}; \tag{9}$$

$$d_\omega(\lambda) < k_2, \forall \omega \in W。 \tag{10}$$

则变分不等式模型(6)至少存在 1 个解。

在条件(9)和(10)下, 需求函数 $\boldsymbol{d}$ 有界意味着路径流变量 $\boldsymbol{F}$ 有界, 从而函数 $\Lambda, \boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 都有界, 因此, 路径费用向量 $\boldsymbol{C}$ 有界, OD 对间最小旅行负效用向量 λ 也有界。令 M 充分大, 且 $M > \max_{F_p \leqslant k_2 n_W} C_p(\boldsymbol{F})$。定义紧的凸集 $\boldsymbol{K}_3 = \{(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{d}, \lambda) \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant M, 0 \leqslant \boldsymbol{d} \leqslant k_2, \boldsymbol{F} \geqslant 0, d_\omega = \sum_{p \in P_\omega} F_p\}$, 则

$$\begin{gathered}\sum_{\omega \in W}\sum_{p \in P_\omega} C_p(\boldsymbol{F}^*)(F_p - F_p^*) - \\ \sum_{\omega \in W} \lambda_\omega^*(d_\omega - d_\omega^*) + \sum_{\omega \in W}(d_\omega^* - \\ d_\omega(\lambda^*))(\lambda_\omega - \lambda_\omega^*) \geqslant 0, \\ \forall(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{d}, \lambda) \in \boldsymbol{K}_3,\end{gathered} \tag{11}$$

至少存在 1 个解 $(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{d}^*, \lambda^*) \in \boldsymbol{K}_3$。

证明定理 2 时要用到下面 2 个引理。

引理 1[6] 若 $(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{d}^*, \lambda^*)$ 为变分不等式(11) 的解, 则有 $d_\omega^* < k_2, \lambda_\omega^* < M, \forall \omega \in W$。

引理 2[6] 若 $(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{d}^*, \lambda^*)$ 为变分不等式(11) 的解, 且 $d_\omega^* < k_2, \lambda_\omega^* < M, \forall \omega \in W$, 则 $(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{d}^*, \lambda^*)$ 也为变分不等式(6) 的解。

由引理 1 和引理 2, 定理 2 的结论显然成立。

对已知旅行负效用函数的情形, 存在下面推论。

推论 3 若函数 $\Lambda, \boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{t} > 0)$ 是连续函数, OD 对旅行负效用函数 λ 连续有界, 那么变分不等式模型(7) 至少存在 1 个解。

对固定需求的情形, 由于此时的可行集是紧的凸集, 因此, 由标准的变分不等式理论, 有:

定理 3 若函数 $\Lambda, \boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 是连续函数, 则变分不等式模型(8) 至少存在 1 个解。

4　模型解的惟一性

定义 3 向量函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})$ 在可行域 Ω 上单调(严格单调), 当且仅当对 $\forall \boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2 \in \Omega$, 有

$$\langle(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}^1) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}^2))^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}^1 - \boldsymbol{X}^2\rangle \geqslant 0 (\text{或} > 0)。$$

一般来说, 向量函数的单调性由定义难以检验, 通常可通过矩阵函数的正定性来判断。

定义 4 矩阵函数 $\boldsymbol{Z}(X)$ 在可行域 $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^n$ 上半正定, 若有

$$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y} \geqslant 0, \forall \boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{X} \in \Omega_1。$$

定义 5 矩阵函数 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X})$ 在可行域 $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^n$ 上正定, 若有

$$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y} > 0, \forall \boldsymbol{Y} \neq 0, \boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{X} \in \Omega_1。$$

下面再给出判断矩阵函数半正定(正定) 的 1 个条件。

引理 3 令 $\gamma(\boldsymbol{X})$ 为对称矩阵 $\frac{1}{2}[\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}]$ 的最小实特征值, 则 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{X})$ 上 Ω_1 半正定(正定), 当且仅当 $\gamma(\boldsymbol{X}) \geqslant 0 (\text{或} > 0), \boldsymbol{X} \in \Omega_1$。

引理 4 若向量函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})$ 在可行域 Ω 上连续可微, 且 Jacobian 矩阵 $\nabla\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})$ 半正定(正定), 那么, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})$ 在 Ω 上单调(严格单调)。

引理 4 给出了一个判断向量函数单调性的充分条件。

定理 4 若函数 $\boldsymbol{t}$ 关于 $\boldsymbol{f}$ (严格) 单调, Λ 和 $\boldsymbol{g}$ 关于 $\boldsymbol{F}$ 单调, 则路径费用向量函数 $\boldsymbol{C}$ (严格) 单调。

证明 由假设及单调性定义知:

$$\begin{gathered}\langle(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{F}^1) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{F}^2))^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{F}^1 - \boldsymbol{F}^2\rangle = \\ \langle(\Lambda(\boldsymbol{F}^1) - \Lambda(\boldsymbol{F}^2))^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{F}^1 - \boldsymbol{F}^2\rangle + \\ \eta\langle(\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{f}^1) - \Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{f}^2))^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{F}^1 - \boldsymbol{F}^2\rangle + \langle(\boldsymbol{g}\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}(\Delta\boldsymbol{F}^1) - \\ g(\Delta^{\mathrm{T}})\boldsymbol{t}(\Delta\boldsymbol{F}^2))^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{F}^1 - \boldsymbol{F}^2\rangle \geqslant \\ \eta\langle(\Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\boldsymbol{f}^1) - \Delta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{f}^2))^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{F}^1 - \boldsymbol{F}^2\rangle = \eta\langle(\boldsymbol{t}\boldsymbol{f}^1) - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{f}^2))^{\mathrm{T}}, \\ \Delta\boldsymbol{F}^1 - \Delta\boldsymbol{F}^2\rangle = \eta\langle(\boldsymbol{t}(\boldsymbol{f}^1) - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{f}^2))^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{f}^1 - \boldsymbol{f}^2 > 0 (\text{或} \geqslant 0)。\end{gathered}$$

定理 5 若函数 $\boldsymbol{t}$ 关于 $\boldsymbol{f}$ 严格单调, Λ 和 $\boldsymbol{g}$ 关于

$\boldsymbol{F}$ 单调, 则平衡路径流量向量 $\boldsymbol{F}^*$ 惟一。

证明　假设变分不等式模型(6) 存在 2 个解 $(\boldsymbol{F}', \boldsymbol{d}', \lambda')$ 和 $(\boldsymbol{F}'', \boldsymbol{d}'', \lambda'')$。

将 $(\boldsymbol{F}', \boldsymbol{d}', \lambda')$ 代入式(6), 并令 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}'$, $\lambda = \lambda'$, 得:

$$\sum_{\omega\in W}\sum_{p\in P_\omega} C_p(\boldsymbol{F}')(F_p - F_p') \geqslant 0。\qquad (12)$$

将 $(\boldsymbol{F}'', \boldsymbol{d}'', \lambda'')$ 代入式(6), 并令 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}''$, $\lambda = \lambda''$, 得:

$$\sum_{\omega\in W}\sum_{p\in P_\omega} C_p(\boldsymbol{F}'')(F_p - F_p'') \geqslant 0。\qquad (13)$$

令 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}''$ 和 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$, 分别代入式(12) 和式(13), 并相加得:

$$\sum_{\omega\in W}\sum_{p\in P_\omega} C_p(\boldsymbol{F}') - C_p(\boldsymbol{F}''))(F_p' - F_p'') \leqslant 0。\qquad (14)$$

这与定理 4 的结论路径费用向量函数 $\boldsymbol{C}$ 严格单调矛盾, 因此, 平衡路径流量向量 $\boldsymbol{F}^*$ 惟一。

定理 6　若函数 $\boldsymbol{t}$ 关于 $\boldsymbol{f}$ 单调, Λ 和 $\boldsymbol{g}$ 关于 $\boldsymbol{F}$ 单调, 需求函数向量 $\boldsymbol{d}$ 严格单调, 则平衡旅行负效用向量 λ^* 惟一。

证明　假设变分不等式模型(6) 存在 2 个解 $(\boldsymbol{F}', \boldsymbol{d}', \lambda')$ 和 $(\boldsymbol{F}'', \boldsymbol{d}'', \lambda'')$。

将 $(\boldsymbol{F}', \boldsymbol{d}', \lambda')$ 代入式(6), 并令 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}''$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}''$, $\lambda = \lambda''$, 得:

$$\sum_{\omega\in W}\sum_{p\in P_\omega} C_p(\boldsymbol{F}')(F_p'' - F_p') - \sum_{\omega\in W}\lambda_\omega'(d_\omega'' - d_\omega') + \sum_{\omega\in W}(d_\omega' - d_\omega(\lambda'))(\lambda_\omega'' - \lambda_\omega') \geqslant 0。\qquad (15)$$

将 $(\boldsymbol{F}'', \boldsymbol{d}'', \lambda'')$ 和代入式(6), 并令 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}'$, $\lambda = \lambda'$, 得:

$$\sum_{\omega\in W}\sum_{p\in P_\omega} C_p(\boldsymbol{F}'')(F_p' - F_p'') - \sum_{\omega\in W}\lambda_\omega''(d_\omega' - d_\omega'') + \sum_{\omega\in W}(d_\omega'' - d_\omega(\lambda''))(\lambda_\omega' - \lambda_\omega'') \geqslant 0。\qquad (16)$$

将式(15) 与式(16) 相加, 得:

$$\sum_{\omega\in W}[d_\omega(\lambda'') - d_\omega(\lambda_\omega'' - \lambda_\omega')] \geqslant \sum_{\omega\in W}\sum_{p\in P_\omega}(C_p(\boldsymbol{F}') - C_p(\boldsymbol{F}''))(F_p' - F_p'') \geqslant 0。$$

这与需求函数向量 $\boldsymbol{d}$ 严格单调下降矛盾。

结合定理 5 和定理 6, 得到如下推论。

推论 4　若函数 $\boldsymbol{t}$ 关于 $\boldsymbol{f}$ 单调, Λ 和 $\boldsymbol{g}$ 关于 $\boldsymbol{F}$ 单调, 需求函数向量 $\boldsymbol{d}$ 严格单调, 则平衡流向量对 $(\boldsymbol{F}^*, \lambda^*)$ 惟一。

在已知 OD 对旅行负效用函数 $\lambda_\omega(\boldsymbol{d})$ 的情形下, 可得到以下类似的推论。

推论 5　若函数 $\boldsymbol{t}$ 关于 $\boldsymbol{f}$ 单调, Λ 和 $\boldsymbol{g}$ 关于 $\boldsymbol{F}$ 单调, OD 对旅行负效用函数向量 λ 严格单调, 则平衡需求向量 $\boldsymbol{d}^*$ 惟一。

推论 6　若函数 $\boldsymbol{t}$ 关于 $\boldsymbol{f}$ 严格单调, Λ 和 $\boldsymbol{g}$ 关于 $\boldsymbol{F}$ 单调, OD 对旅行负效用函数向量 λ 严格单调, 则平衡流向量对 $(\boldsymbol{F}^*, \boldsymbol{d}^*)$ 惟一。

S. GABRIEL 等讨论了一类特殊情形下的网络平衡条件[5], 即假定函数向量 $\boldsymbol{g}(\cdot)$ 是可分离函数, 并且假定它的矩阵为非负的数量矩阵(或对角矩阵)。这些假设过于严格, 容易验证该情形是其中的一种特殊情形, 这里所给出的结论还适用于 H. Lo 等讨论的特定路径费用(Route-Specific costs) 的网络平衡问题[7-9]。

参考文献:

[1] DAFERMOS S. Traffic Equilibrium and Variational Inequalities [J]. Transportation Science, 1980, 14: 42-54.

[2] SMITH M. The Existence and Calculation of Traffic Equilibrium [J]. Transportation Research-B, 1983, 17: 291-303.

[3] SMITH M. The Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibrium[J]. Transportation Research-B, 1979, 13: 295-304.

[4] SHE Y. Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods[M]. NJ: Prentice-Hall, 1993.

[5] GABRIEL S, BERNSTEIN D. The Traffic Equilibrium Problem with Nonadditive Path Costs[J]. Transportation Science, 1997, 31(4): 337-348.

[6] NAGURNEY A. Network Economics: a Variational Inequality Approach[M]. MA: Kluwer Academic Publishers, 1993.

[7] LO H, CHEN A. Traffic Equilibrium Problem with Route-specific Costs: Formulation and Algorithms [J]. Transportation Research-B, 2000, 34: 493-513.

[8] LO H, YIP C, WAN K. Modeling Transfer and Non-linear Fare Structure in Multi-modal Network [J]. Transportation Research-B, 2003, 37: 149-170.

[9] LARSSON T, PATRICKSSON M. Simplicial Decomposition with Disaggregated Representation for the Traffic Assignment Problem[J]. Transportation Science, 1992, 26: 4-17.