中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 6 期: 666～678
www.scichina.com math.scichina.com

一类非紧集合的拓扑压变分原理

裴玉 ①, 陈二才 ①②*

① 南京师范大学数学科学学院, 南京 210097
② 南京大学非线性科学中心, 南京 210093
E-mail: peiyu0217@163.com, ecchen@njnu.edu.cn

收稿日期: 2008-11-14; 接受日期: 2009-02-16; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10571086) 和国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2007CB814800) 资助项目

摘要 本文在一致分离性与 g-几乎乘积性质条件下, 证明了一类 Saturated 集合的拓扑压的变分原理, 并将其应用到重分形分解中, 证明了一类非紧集合的拓扑压的条件变分原理.

关键词 一致分离性 g-几乎乘积性质 非紧集合的拓扑压 变分原理 BS-维数

MSC(2000) 主题分类 37B45, 37C45

1 引言

设 (X, d, T) 为拓扑 (半) 动力系统, 即 (X, d) 为紧致的度量空间, $T : X \to X$ 为连续映射. $M(X)$ 是 X 上所有 Borel 概率测度的集合. $M(X, T) \subseteq M(X)$ 是所有 T-不变的概率测度的集合. 动力系统的统计力学是动力系统研究的重要方向之一, 著名的动力学家 Sinai, Ruelle 和 Bowen 在此方向作出了重要的贡献, 建立了重要的动力系统 SRB 理论. Ruelle[1] 定义了紧致不变集合的拓扑压, 给出了紧致集合拓扑压的变分原理.

紧集的拓扑压的变分原理 设 $T : X \to X$ 为连续映射, 则对任一连续函数 $\varphi : X \to \mathbb{R}$, 有

$$P(X, \varphi) = \sup_{\mu} \left\{ h(T, \mu) + \int_X \varphi d\mu \right\},$$

其中 $P(X, \varphi)$ 为 T 关于函数 φ 的拓扑压, μ 为 T-不变的概率测度, $h(T, \mu)$ 为 μ 关于 T 的测度熵. 特别的, 当 $\varphi = 0$, 即为拓扑熵 $h_{\text{top}}(T) = P(X, 0)$ 的变分原理. 拓扑压变分原理的完整证明可见文献 [2]. 1973 年, Bowen[3] 给出了紧致度量空间上的非紧子集的拓扑熵的定义, 并证明了相应的变分原理. 1984 年, Pesin 和 Pitskel'[4] 定义了紧致度量空间上非紧集的拓扑压 (定义参见第 2 节), 并且证明了非紧集的拓扑压的变分原理.

非紧集的拓扑压的变分原理 设 $Z \subset X$ 为一个 T-不变集合. $E(Z, T) \subset M(X, T)$ 为满足条件 $\mu(Z) = 1, \forall \mu \in E(Z, T)$ 的遍历测度的集合. 对于任意的 $x \in X$, 定义概率测度

$$\mathcal{E}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k(x)}.$$

引用格式: 裴玉, 陈二才. 一类非紧集合的拓扑压变分原理. 中国科学 A, 2009, 39(6): 666–678
Pei Y, Chen E C. On the variational principle for the topoogical pressure. Sci China Ser A, 2009, 52,
DOI: 10.1007/s11425-009-0109-4

$\mathcal{E}_n(x)$ 的极限点集用 $V(x)$ 表示, 则 $V(x) \subset M(X,T)$. 若 $V(x) \cap E(Z,T) \neq \emptyset, \forall x \in Z$, 则对任意实值连续函数 $\varphi : X \to \mathbb{R}$,

$$P(Z,\varphi) = \sup\left\{h(T,\mu) + \int_Z \varphi d\mu : \mu \in E(Z,T)\right\}.$$

若 $\varphi = 0$, 即为非紧集的拓扑熵的变分原理. 若 Z 为紧集, 则与经典变分原理一致.

由于非紧集的变分原理中的条件 $V(x) \cap E(Z,T) \neq \emptyset, \forall x \in Z$ 是难以验证的, 所以对什么样的非紧集其变分原理成立是一个比较困难的问题. 最近, 这一问题的研究取得了一些重要进展. 文献 [5,6] 利用动力系统重分形分解, 分别建立了一类水平集的拓扑压与拓扑熵的非紧变分原理.

在文献 [5] 中, Takens 和 Verbitskiy 将非紧集的拓扑熵应用于重分形分解, 证明了一类非紧集拓扑熵的条件变分原理.

定理 A 设动力系统 (X,d,T) 具有 specification 性质, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ 为任意连续函数. 对任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$, 如果

$$K_\alpha = \left\{x \in X, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(T^i x) = \alpha\right\} \neq \emptyset,$$

则

$$h_{\rm top}(T,K_\alpha) = \sup\left\{h(T,\mu) : \mu \in M(X,T), \int \varphi d\mu = \alpha\right\}.$$

文献 [5] 中的证明繁琐, 在文献 [7] 中, Pfster 和 Sullivan 弱化了定理 A 中的条件, 在 g-几乎乘积性质条件下证明了同样的结论.

设 $D \subset X$, 若对于任意的 $x \in D$, 如果 $\{\mathcal{E}_n(x)\}_n, \{\mathcal{E}_n(y)\}_n$ 有相同的极限集, 则有 $y \in D$, 此时称 D 为 Saturated 集合.

定义集合 $G_K := \{x \in X : V(x) = K\}$, 其中 $K \subset M(X)$ 是非空、紧致的连通子集. 特别的, 若 $K = \{\mu\}$, 则 $G_\mu = \{x \in X : \mathcal{E}_n(x) \to \mu\}$ 称为测度 μ 的通有点的集合.

在文献 [3] 中, Bowen 证明了: 若 μ 是遍历测度, 则

$$h_{\rm top}(T,G_\mu) = h(T,\mu). \tag{1}$$

由遍历论可知, 若 μ 为遍历测度, 则有 $\mu(G_\mu) = 1$. 但对一般的非遍历测度 ν, 总有 $\nu(G_\nu) = 0$, 因而 (1) 式对一般不变测度不一定成立. 但是对任意的不变测度 μ 和 $M(X,T)$ 中任意的紧致连通子集 K,

$$h_{\rm top}(T,G_\mu) \leqslant h(T,\mu), \tag{2}$$

$$h_{\rm top}(T,G_K) \leqslant \inf\{h(T,\mu) : \mu \in K\} \tag{3}$$

却总是成立的.

Pfister 和 Sullivan 在文献 [7] 中证明了以下的主要结论.

定理 B 设动力系统 (X,d,T) 满足 g-几乎乘积性质与一致分离性, 对 $M(X,T)$ 中的任意非空的紧致的连通子集 K, 有

$$h_{\rm top}(T,G_K) = \inf\{h(T,\mu) : \mu \in K\}.$$

若系统 (X,d,T) 只满足 g-几乎乘积性质, 则

$$h_{\rm top}(T,G_\mu) = h(T,\mu), \forall \mu \in M(X,T).$$

将此结论应用于计算 K_α 的拓扑熵, 得到了文献 [5] 中的的主要结论. 此外, 在 2008 年 Fan 和 Liao 等人 [8] 证明了与定理 A 和 B 类似的结果. 他们证明了: 如果系统满足 specification 性质, 则对 $\forall\mu\in M(X,T)$, $h_{\mathrm{top}}(T,G_\mu)=h(T,\mu)$. 此外他们对 Banach 空间上取值的连续函数得到了与定理 A 相似的结论.

最近在文献 [6] 中, Luzia 为了证明在某些非共形排斥子上, 具有满 Hausdorff 维数的遍历测度的存在性, 给出了符号动力系统中一类非紧集的拓扑压的条件变分原理.

定理 C 设 (X,T) 是混合的有限型子位移, $\varphi,\psi:X\to\mathbb{R}$ 是 Hölder 连续函数. 对任意的 $\alpha\in\mathbb{R}$, 设

$$K_\alpha=\left\{x\in X:\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\psi(T^ix)=\alpha\right\},$$

$I_\psi=(\inf_{\mu\in M(X,T)}\int\psi d\mu,\sup_{\mu\in M(X,T)}\int\psi d\mu)$. 若 $0\notin\partial I_\psi$, 则对任意的 $\alpha\in I_\psi$, 有

$$P(\varphi,K_\alpha)=\sup\left\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu:\mu\in M(X,T),\int\psi d\mu=\alpha\right\}.$$

文献 [5, 7] 主要研究的是非紧拓扑熵及其变分原理, 文献 [6] 是对有限型符号空间上的 Hölder 连续函数研究了一类水平集的拓扑压. 在本文中, 我们应用文献 [7] 中的方法, 首先研究了非紧的 Saturated 集合的拓扑压, 并将其应用到重分形分解中, 得到了一类非紧集的拓扑压的条件变分原理. 以上的三个定理不仅成为我们结论的特殊情况, 而且我们得到了文献 [9] 中的关于 Hausdorff 维数的条件变分原理.

2 定义和主要结论

首先给出非紧集合的拓扑压的定义.

定义 2.1 设 $B_n(x,\epsilon):=\{y\in X:\max\{d(T^ix,T^iy)\leqslant\epsilon:0\leqslant j\leqslant n-1\}\},x\in X$. 对任意的 $Z\subset X$, 设 $\mathcal{G}_n(Z,\epsilon)$ 是 Z 的所有由集合 $B_m(x,\epsilon),m\geqslant n$ 构成的有限或可数覆盖组成的集族. 设 $\varphi:X\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 下文中用 $S_n\varphi(x)$ 表示 $\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(T^ix)$. 定义

$$M(Z,t,\varphi,n,\epsilon):=\inf_{\mathcal{C}\in\mathcal{G}_n(Z,\epsilon)}\left\{\sum_{B_m(x,\epsilon)\in\mathcal{C}}\exp\Big(-tm+\sup_{y\in B_m(x,\epsilon)}S_m\varphi(y)\Big)\right\}.$$

则下列极限存在

$$M(Z,t,\varphi,\epsilon)=\lim_{n\to\infty}M(Z,t,\varphi,n,\epsilon),$$

且存在唯一的实数 $P(Z,\varphi,\epsilon)$, 使得

$$P(Z,\varphi,\epsilon)=\inf\{t:M(Z,t,\varphi,\epsilon)=0\}=\sup\{t:M(Z,t,\varphi,\epsilon)=\infty\}.$$

集合 Z 关于 φ 的拓扑压 $P(Z,\varphi)$ 定义为

$$P(Z,\varphi)=\lim_{\epsilon\to0}P(Z,\varphi,\epsilon).$$

若 $\varphi=0$, 则 $P(Z,0)=h_{\mathrm{top}}(T,Z)$, 即为非紧集合的拓扑熵.

在文献 [10] 中, Barreira 和 Schmeling 在动力系统中定义了一种新的维数. 若 $\varphi:X\to\mathbb{R}$ 为严格正的函数，定义 $N(Z,t,\varphi,\epsilon)=\lim_{n\to\infty}N(Z,t,\varphi,n,\epsilon)$, 其中

$$N(Z,t,\varphi,n,\epsilon):=\inf_{\mathcal{C}\in\mathcal{G}_n(Z,\epsilon)}\left\{\sum_{B_m(x,\epsilon)\in\mathcal{C}}\exp\Big(-t\sup_{y\in B_m(x,\epsilon)}S_m\varphi(y)\Big)\right\}.$$

则存在唯一的数 $\mathrm{BS}(Z,\varphi,\epsilon)$, 使得

$$\mathrm{BS}(Z,\varphi,\epsilon)=\inf\{t:N(Z,t,\varphi,\epsilon)=0\}=\sup\{t:N(Z,t,\varphi,\epsilon)=\infty\}.$$

$\mathrm{BS}(Z,\varphi)=\lim_{\epsilon\to 0}\mathrm{BS}(Z,\varphi,\epsilon)$ 就称为集合 Z 的 BS-维数.

由拓扑压与 BS-维数的定义易得: 对任意的集合 $Z\subset X$, 其 BS-维数 $\mathrm{BS}(Z,\varphi)$ 为 Bowen 方程 $P(Z,-s\varphi)=0$ 的唯一根.

注记 2.1 (i) 当 $\varphi=1$ 时, $\mathrm{BS}(Z,\varphi)=h_{\mathrm{top}}(T,Z)$.

(ii) 当 $\varphi=\log||dT||$ 时, T 为 C^r 黎曼流形 X 上的 $C^{1+\delta}$ 共形扩张映射, 则对任意的 $Z\subseteq X$ 有 $\mathrm{BS}(Z,\varphi)=\dim_H(Z)$.

设 $\mathbb{Z}^+$ 为全体非负整数集. 下面定义 $M(X,T)$ 上的一个度量 d. 本文中用 $\langle f,\mu\rangle$ 表示积分 $\int_X fd\mu$. X 上存在可数个连续函数 $\{f_1,f_2,\dots\}$ $(0\leqslant f_k\leqslant 1)$ 使得

$$d(\mu,\nu)\equiv||\mu-\nu||:=\sum_{k\geqslant 1}2^{-k}|\langle f_k,\mu-\nu\rangle|$$

为 $M(X,T)$ 上的一个度量. 同时也给出了 X 上的一个等价度量 d (此处仍然用 d 表示),

$$d(x,y):=d(\delta_x,\delta_y).$$

本文将用此等价度量. 用 $\mathcal{B}(\nu,\zeta):=\{\mu\in M(X):d(\nu,\mu)\leqslant\zeta\}$ 表示 $M(X)$ 中以 ν 为中心, ζ 为半径的球.

设 $F\subset M(X)$ 是一个邻域, 定义集合 $X_{n,F}:=\{x\in X:\mathcal{E}_n(x)\in F\}$.

定义 2.2[11] 设 $\delta>0,\epsilon>0$, 若满足 $|\{j:d(T^ix,T^iy)>\epsilon,0\leqslant j\leqslant n-1\}|\geqslant\delta n$, 则称 $x,y\in X$ 为 (δ,n,ϵ)-分离, 其中 $|\cdot|$ 表示集合的基数. 集合 $E\subset X$ 称为 (δ,n,ϵ)-分离集, 如果 E 中任意两点都是 (δ,n,ϵ)-分离.

若 $F\subset M(X)$ 是测度 ν 的邻域, 任意 $\epsilon>0$, 设 $N(F,\delta,n,\epsilon)$ 为 $X_{n,F}$ 中的 (δ,n,ϵ)-分离集的最大基数, $N(F,n,\epsilon)$ 为 $X_{n,F}$ 中的 (n,ϵ)-分离集的最大基数. 定义

$$\underline{s}(\nu,\epsilon):=\inf_{F\ni\nu}\liminf\frac{1}{n}\log N(F,n,\epsilon),\quad \overline{s}(\nu,\epsilon):=\inf_{F\ni\nu}\limsup\frac{1}{n}\log N(F,n,\epsilon).$$

此定义中, 下确界对 ν 的任意邻域基求取. 若 $\lim_{\epsilon\to 0}\underline{s}(\nu,\epsilon)=\lim_{\epsilon\to 0}\overline{s}(\nu,\epsilon)$, 则称极限存在, 记为 $s(\nu)$.

定义 2.3 设 $\mu\in M(X,T)$ 为遍历测度, 对于任意的 η, 如果存在 $\delta^*>0,\epsilon^*>0$, 使得对 μ 在 $M(X)$ 中的任意邻域 F, 存在 $n^*_{F,\mu,\eta}\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant n^*_{F,\mu,\eta}$ 时, $N(F,\delta^*,n,\epsilon^*)\geqslant e^{n(h(T,\mu)-\eta)}$, 则称 (X,d,T) 具有一致分离性.

命题 2.1[7] 若 T 为可扩映射或者为渐近 h- 可扩映射, 则 (X,d,T) 具有一致分离性.

定义 2.4 设 $h^*<h(T,\nu)$, 若对任意 $\nu\in M(X,T)$ 及 ν 的任意邻域 F, 存在遍历测度 $\rho\in F$, 使得 $h^*<h(T,\rho)$, 则称遍历测度为熵稠密的.

命题 2.2[7] 如果动力系统 (X,d,T) 满足遍历测度熵稠密与一致分离性质, 则对任意 η, 存在 $\delta^*>0$ 与 $\epsilon^*>0$, 使得对任意的不变测度 μ 及 μ 在 $M(X)$ 中的任意邻域 F, 存在 $n^*_{F,\mu,\eta}\in\mathbb{N}$, 当 $n\geqslant n^*_{F,\mu,\eta}$ 时,

$$N(F,\delta^*,n,\epsilon^*)\geqslant e^{n(h(T,\mu)-\eta)}.$$

设 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 为非减的无界映射, 满足

$$g(n)<n,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{n}=0.$$

对任意 $x\in X,\epsilon>0$, 定义闭集

$$B_n(g;x,\epsilon):=\{y\in X:\exists\Lambda\subset\Lambda_n,|\Lambda_n\setminus\Lambda|\leqslant g(n),\max\{d(T^i(x),T^i(y)):j\in\Lambda\}\leqslant\epsilon\},$$

其中 $\Lambda_n=\{0,1,\dots,n-1\}$.

定义 2.5 称动力系统 (X,d,T) 具有 g-几乎乘积性质, 如果对满足上述条件的映射 g, 存在非增的函数 $m:\mathbb{R}^+\to\mathbb{N}$, 使得对任意 $k\in\mathbb{N}$, $x_i\in X$, $\epsilon_i>0$, 以及 $n_i\geqslant m(\epsilon_i),1\leqslant i\leqslant k$, 满足

$$\bigcap_{i=1}^{k}T^{-M_{i-1}}B_{n_i}(g;x_i,\epsilon_i)\neq\emptyset,$$

其中 $M_0=0,M_i=n_1+\dots+n_i,i=1,\dots,k-1$.

文献 [7] 中的命题 2.1 证明了: 若 (X,d,T) 满足 specification 性质, 对任意满足上述条件的映射 g, 则系统具有 g-几乎乘积性质, 再由文献 [11] 中的定理 2.1, 此时具有熵稠密性. 此外, 所有的 β- 移位映射都具有 g-几乎乘积性质, 而满足 specification 性质的 β- 移位映射的 β 集合的 Lebesgue 测度却为零. 这表明 g-几乎乘积性质严格弱于 specification 性质.

命题 2.3[7] 设动力系统 (X,d,T) 满足 g-几乎乘积性质与一致分离性, 设 $x_1\in X,\dots,x_k\in X$, $\epsilon_1>0,\dots,\epsilon_k>0$, 及 $n_1\geqslant m(\epsilon_1),\dots,n_k\geqslant m(\epsilon_k)$ 已给定. 若 $\mathcal{E}_{n_j}(x_j)\in\mathcal{B}(\nu_j,\zeta_j),0\leqslant j\leqslant k$, 则对任意 $y\in\bigcap_{i=1}^{k}T^{-M_{i-1}}B_{n_i}(g;x_i,\epsilon_i)$ 和任意概率测度 α, 有

$$d(\mathcal{E}_{M_k}(y),\alpha)\leqslant\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{M_k}(\zeta_j{}'+d(\nu_j,\alpha)),$$

其中 $M_j=n_1+\dots+n_j,\zeta_j{}'=\zeta_j+\epsilon_j+\frac{g(n_j)}{n_j},j=1,\dots,k$.

本文中首先证明以下定理.

定理 2.1 设 $\varphi:X\to\mathbb{R}$ 为任意一个连续函数.

(i) 若动力系统 (X,d,T) 满足 g-几乎乘积性质与一致分离性, 则对 $M(X,T)$ 中的任意非空的紧致连通子集 K, 有

$$P(G_K,\varphi)=\inf\left\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu:\mu\in K\right\}.$$

(ii) 若动力系统 (X,d,T) 仅满足 g-几乎乘积性质, 则对任意的不变测度 μ, 有

$$P(G_\mu,\varphi)=h(T,\mu)+\int\varphi d\mu.$$

本文的结构如下. 第 3 和 4 节分别证明 $P(G_K,\varphi)$ 的上下界为 $\inf\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu:\mu\in K\}$. 第 5 节将在非一致分离条件下证明定理 2.1 (ii). 第 6 节将定理 2.1 应用于重分形分解, 得到一类非紧集的拓扑压的条件变分原理 (定理 6.1), 并给出定理 6.1 的一些初步应用.

3 上界证明

命题 3.1[7] 设 (X,d,T) 为动力系统, 若 $\mu\in M(X,T)$, 则 $\overline{s}(\mu)\leqslant h(T,\mu)$.

定理 3.1 设 (X,d,T) 为动力系统, $\mu\in M(X,T)$.

(i) 若 $K\subset M(X,T)$ 为闭子集, 定义

$$^KG:=\{x\in X:\{\mathcal{E}_n(x)\}_n \text{ 有极限点在 } K \text{ 中}\}.$$

则有

$$P({}^K G,\varphi)\leqslant \sup\left\{h(T,\mu)+\int \varphi d\mu:\mu\in K\right\}.$$

(ii) 若 $\mu\in M(X,T)$, 则有

$$P(G_\mu,\varphi)\leqslant h(T,\mu)+\int\varphi d\mu.$$

(iii) 若 $K\subset M(X,T)$ 为非空的紧致连通子集, 则有

$$P(G_K,\varphi)\leqslant \inf\left\{h(T,\mu)+\int \varphi d\mu:\mu\in K\right\}.$$

证明 (i) 设 $\mu\in M(X,T)$, $s=\sup_{\mu\in K}\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu\}$. 若 $s=\infty$ 结论显然成立. 下证 $s<\infty$ 的情况.

对任意的 $s'>s$, 设 $s'-s=2\delta>0$. 由命题 3.1 可得

$$\overline{s}(\mu)=\lim_{\epsilon\to 0}\inf_{F\ni\mu}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(F,n,\epsilon)\leqslant h(T,\mu).$$

又因为 $N(F,n,\epsilon)$ 关于 ϵ 非增, 所以

$$\inf_{F\ni\mu}\limsup\frac{1}{n}\log N(F,n,\epsilon)\leqslant h(T,\mu),\qquad \forall\epsilon>0.$$

对于 $\forall\epsilon>0$, 存在测度 μ 的邻域 $F(\mu,\epsilon)$ 与 $M(F(\mu,\epsilon))\in\mathbb{N}$, 使得

$$\frac{1}{n}\log N(F(\mu,\epsilon),n,\epsilon)\leqslant h(T,\mu)+\delta,\quad \forall n\geqslant M(F(\mu,\epsilon)).$$

则可找到测度 μ 的球形邻域 $\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon)\subset F(\mu,\epsilon)$, 以及 $M(\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon))\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{1}{n}\log N(\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon),n,\epsilon)\leqslant h(T,\mu)+\delta,\quad \forall n\geqslant \max\{M(\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon)),M(F(\mu,\epsilon))\},$$

其中 $\zeta_\epsilon\leqslant\min\{\mathrm{diam}(F(\mu,\epsilon)),\epsilon\}$, 使得对任意的 $\mu\in\mathcal{B}(\nu,\zeta_\epsilon)$,

$$\left|\int\varphi d\nu-\int\varphi d\mu\right|\leqslant\epsilon.$$

因为取得最大基数的 (n,ϵ)-分离集亦是 (n,ϵ)-生成集. 设基数为 $N(\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon),n,\epsilon)$ 的生成集为 E, 则 $\mathcal{C}:=\bigcup_{x\in E}B_n(x,\epsilon)$ 覆盖 $X_{n,\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon)}$. 所以

$$M(X_{n,\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon)},s',\varphi,n,\epsilon)\leqslant\sum_{B_n(x,\epsilon)\in\mathcal{C}}\exp\bigg(-s'n+\sup_{y\in B_n(x,\epsilon)}S_n\varphi(y)\bigg).$$

设 $\gamma(\epsilon)=\sup\{|\varphi(x)-\varphi(y)|:d(x,y)<\epsilon\}$. 则当 $\epsilon\to 0$ 时, 有 $\gamma(\epsilon)\to 0$.

所以

$$\sup_{y\in B_n(x,\epsilon)}S_n\varphi(y)\leqslant S_n\varphi(x)+n\gamma(\epsilon).$$

又因为 $x\in E\subset X_{n,\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon)}$, 所以 $\mathcal{E}_n(x)\in\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon)$, 因而

$$\left|\int\varphi d\mathcal{E}_n(x)-\int\varphi d\mu\right|=\left|\frac{1}{n}S_n\varphi(x)-\int\varphi d\mu\right|\leqslant\epsilon.$$

由上述条件可得

$$\begin{aligned}M(X_{n,\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon)},s',\varphi,n,\epsilon)&\leqslant\sum_{B_n(x,\epsilon)\in\mathcal{C}}\exp\bigg(n\bigg(-s'+\int\varphi d\mu+\gamma(\epsilon)+\epsilon\bigg)\bigg)\\&\leqslant N(\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon),n,\epsilon)\exp\bigg(n\bigg(-s'+\int\varphi d\mu+\gamma(\epsilon)+\epsilon\bigg)\bigg)\\&\leqslant\exp(n(-\delta+\gamma(\epsilon)+\epsilon)).\end{aligned}$$

可以选取充分小的 ϵ 使得 $-\delta+\gamma(\epsilon)+\epsilon<0$.

因为 K 为紧集, 任意给定一个充分小的 $\epsilon>0$ 都可以找到 K 的形如 $\mathcal{B}(\mu,\zeta_\epsilon)$ 的有限覆盖 $\mathcal{B}(\mu_j,\zeta_\epsilon)$, $j=1,2,\dots,m_\epsilon$, $\mu_j\in K$. 对充分大的 M, 有 $\bigcup_{n\geqslant M}\bigcup_{j=1}^{m_\epsilon}X_{n,\mathcal{B}(\mu_j,\zeta_\epsilon)}$ 覆盖 ${}^KG$. 当 $M\geqslant\max_{1\leqslant j\leqslant m_\epsilon}\{M(\mathcal{B}(\mu_j,\zeta_\epsilon)),M(F(\mu_j,\zeta_\epsilon))\}$ 时,

$$\begin{aligned}M({}^KG,s',\varphi,n,\epsilon)&\leqslant\sum_{n\geqslant M}\sum_{j=1}^{m_\epsilon}\exp(n(-\delta+\gamma(\epsilon)+\epsilon))\\&\leqslant m_\epsilon\sum_{n\geqslant M}\exp(n(-\delta+\gamma(\epsilon)+\epsilon)).\end{aligned}$$

给定 $\delta>0$, 存在充分小的 ϵ_0, 当 $\epsilon<\epsilon_0$ 时, $\gamma(\epsilon)+\epsilon<\delta$. 此时上式中当 $n\to\infty$ 时, 右式趋于零. 所以

$$P({}^KG,\varphi,\epsilon)\leqslant s,\quad\forall\epsilon<\epsilon_o.$$

因而

$$P({}^KG,\varphi)=\lim_{\epsilon\to0}P({}^KG,\varphi,\epsilon)\leqslant\sup_{\mu\in K}\left\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu\right\}.$$

(ii) 可由 (i) 直接推得 (ii).

(iii) 因为 $G_K\subset{}^{\{\mu\}}G,\forall\mu\in K$, 所以

$$P(G_K,\varphi)\leqslant P({}^{\{\mu\}}G,\varphi)\leqslant h(T,\mu)+\int\varphi d\mu,\quad\forall\mu\in K.$$

因而 $P(G_K,\varphi)\leqslant\inf\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu:\mu\in K\}$.

4 下界估计

定理 4.1 设动力系统 (X,d,T) 满足一致分离性与 g-几乎乘积性质, $K\subset M(X,T)$ 为非空的紧致连通子集, 则

$$P(G_K,\varphi)\geqslant\inf\left\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu:\mu\in K\right\}.$$

证明中需要下面的引理.

引理 4.1[12] 设 $K\subset M(X,T)$, 若 K 为非空的连通紧集, 则存在 K 中的一个测度序列 $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots\}$, 使得

$$\overline{\{\alpha_j:j\in\mathbb{N},j>n\}}=K,\quad\forall n\in\mathbb{N},$$

且

$$\lim_{j\to\infty}d(\alpha_j,\alpha_{j+1})=0.$$

下面给出定理 4.1 的证明:

证明 设 $\eta>0,h^*=\inf\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu:\mu\in K\}-\eta$. 对任意 $s<h^*$, 设 $h^*-s:=2\delta>0$. 假设已经给出 K 中如引理 4.1 中的测度序列 $\{\alpha_k\}$.

由命题 2.2, 存在 $\delta^*>0,\epsilon^*>0$, 当 $\mu\in M(X,T)$ 时, 对 μ 的任意邻域 F, 存在自然数 $n^*_{F,\mu,\eta}$ 使得当 $n\geqslant n^*_{F,\mu,\eta}$ 时,

$$N(F,\delta^*,n,\epsilon^*)\geqslant e^{n(h(T,\mu)-\eta)}.\tag{4}$$

设 $\{\zeta_k\},\{\epsilon_k\}$ 为严格单调递减趋于零的正数序列并且满足 $\epsilon_1<\epsilon^*$,

$$\left|\int\varphi d\alpha_k-\int\varphi d\mu\right|\leqslant\frac{\delta}{6},\quad\forall\mu\in\mathcal{B}(\alpha_k,\zeta_k+2\epsilon_k).$$

由 (4) 式可得, 存在 $n_k\in\mathbb{N}$ 及 $(\delta^*,n_k,\epsilon^*)$-分离集 $\Gamma_k\subset X_{n_k,\mathcal{B}(\alpha_k,\zeta_k)}$, 满足

$$|\Gamma_k|\geqslant e^{n_k(h(T,\alpha_k)-\eta)}.\tag{5}$$

假设 $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 满足下面的条件

$$\delta^*n_k>2g(n_k)+1,\quad\frac{g(n_k)}{n_k}\leqslant\epsilon_k.\tag{6}$$

若 $x\in\Gamma_k,\ y\in\mathcal{B}_{n_k}(g;x,\epsilon_k)$, 则由命题 2.3 与 (6) 式可得

$$\mathcal{E}_{n_k}(y)\in\mathcal{B}(\alpha_k,\zeta_k+2\epsilon_k).\tag{7}$$

选取一个严格递增的自然数序列 $\{N_k\}$, 使其满足

$$n_{k+1}\leqslant\zeta_k\sum_{j=1}^{k}n_jN_j,\quad\sum_{j=1}^{k-1}n_jN_j\leqslant\zeta_k\sum_{j=1}^{k}n_jN_j.$$

由此分别定义新的序列 $\{n_j{}'\},\{\alpha_j{}'\},\{\epsilon_j{}'\},\{\zeta_j{}'\}$ 与 $\{\Gamma_k{}'\}$ 如下: 当 $j=N_1+\cdots+N_{k-1}+q,\ 1\leqslant q\leqslant N_k$ 时, 令

$$n_j{}':=n_k\quad\epsilon_j{}':=\epsilon_k,\quad\alpha_j{}':=\alpha_k,\quad\zeta_j{}':=\zeta_k,\quad\Gamma_j{}':=\Gamma_k.$$

定义集合

$$G_k:=\bigcap_{j=1}^{k}\left(\bigcup_{x_j\in\Gamma_j{}'}T^{-M_{j-1}}B_{n_j{}'}(g;x_j,\epsilon_j{}')\right),\text{其中 }M_j=\sum_{l=1}^{j}n_l{}'.$$

由 g-几乎乘积性质可推得 G_k 是非空的闭集, 且可表示为非空闭集的并. 每个非空闭集可用标签 $G_k(x_1,\dots,x_k)$ 来表示, 其中 $x_j\in\Gamma_j{}'$.

引理 4.2[7] 设 $\epsilon>0$ 且 $4\epsilon=\epsilon^*$,

$$G=\bigcap_{k\geqslant1}G_k.$$

(i) 设 $x_j,y_j\in\Gamma_j{}'$, 且 $x_j\neq y_j$. 若 $x\in B_{n_j{}'}(g;x_j,\epsilon_j{}'),\ y\in B_{n_j{}'}(g;y_j,\epsilon_j{}')$, 则

$$\max\{d(T^mx,T^my):0\leqslant m\leqslant n_j-1\}>2\epsilon.$$

(ii) G 是一个闭集, 且为非空闭集 $G(x_1,x_2,\dots)$ 的无交并集, 其中 $x_j\in\Gamma_j{}'$.

(iii) $G\subset G_K$.

引理 4.3 $P(G,\varphi)\geqslant h^*$.

证明 从上面的构造可以证明 $\lim_{n\to\infty}M_n/M_{n+1}=1$, 其中 $M_j=n_1{}'+\cdots+n_j{}'$. 由已知结论, 存在 $n_k\in\mathbb{N}$ 和 $X_{n_k,\mathcal{B}(\alpha_k,\zeta_k)}$ 的 $(\delta^*,n_k,\epsilon^*)$-分离集 Γ_k 满足

$$|\Gamma_k|\geqslant\exp(n_k(h(T,\alpha_k)-\eta)).$$

同时对 $\forall^kx\in\Gamma_k$ 有 $\mathcal{E}_{n_k}(^kx)\in\mathcal{B}(\alpha_k,\zeta_k)$. 所以

$$\left|\int\varphi d\mathcal{E}_{n_k}(^kx)-\int\varphi d\alpha_k\right|=\left|\frac{1}{n_k}S_{n_k}\varphi(^kx)-\int\varphi d\alpha_k\right|\leqslant\frac{\delta}{6}.$$

即有

$$\begin{aligned}|\Gamma_k|&\geqslant\exp\left(n_k\left(h(T,\alpha_k)+\int\varphi d\alpha_k-\eta\right)-S_{n_k}\varphi(^kx)-n_k\frac{\delta}{6}\right)\\&\geqslant\exp\left(n_kh^*-S_{n_k}\varphi(^kx)-n_k\frac{\delta}{6}\right).\end{aligned}$$

因为 G 为紧集, 考虑 G 的一个由 $B_m(x,\epsilon)$ 构成的有限开覆盖 $\mathcal{C}$, 满足 $B_m(x,\epsilon)\cap G\neq\emptyset$, $\forall B_m(x,\epsilon)\in\mathcal{C}$. 从每个 $\mathcal{C}\in\mathcal{G}_n(G,\epsilon)$ 定义一个新的覆盖 $\mathcal{C}'$, 即当 $M_p\leqslant m<M_{p+1}$ 时, 用 $B_{M_p}(x,\epsilon)$ 替代 $B_m(x,\epsilon)$. 所以

$$\begin{aligned}M(G,s,\varphi,n,\epsilon)&=\inf_{\mathcal{C}\in\mathcal{G}_n(G,\epsilon)}\sum_{B_m(x,\epsilon)\in\mathcal{C}}\exp\Big(-sm+\sup_{y\in B_m(x,\epsilon)}S_m\varphi(y)\Big)\\&\geqslant\inf_{\mathcal{C}\in\mathcal{G}_n(G,\epsilon)}\sum_{\substack{B_{M_p}(x,\epsilon)\in\mathcal{C}',\\ z\in B_m(x,\epsilon)\cap B_{M_p}(x,\epsilon)\cap G}}\exp(-sm+S_m\varphi(z)).\end{aligned}$$

考虑一个特殊的覆盖 $\mathcal{C}'$. 设 m 为使得 $B_{M_p}(x,\epsilon)\in\mathcal{C}'$ 成立的最大值 p.

定义

$$\mathcal{W}_k:=\prod_{i=1}^{k}\Gamma_k{}',\overline{\mathcal{W}}_m:=\bigcup_{k=1}^{m}\mathcal{W}_k.$$

任意 $z\in B_{M_p}(x,\epsilon)\cap G$ 都与 $\mathcal{W}_p$ 中的某个点相对应, 且由引理 4.2 (i) 可得该点是唯一的. 设 $1\leqslant j\leqslant k$, $v=(v_1,\dots,v_j)\in\mathcal{W}_j$, $w=(w_1,\dots,w_k)\in\mathcal{W}_k$, 如果 $v_i=w_i,i=1,\dots,j$, 则称 v 是 w 的前缀. 易看出每个 $\mathcal{W}_k$ 中的元是 $|\mathcal{W}_m|/|\mathcal{W}_k|$ 个 $\mathcal{W}_m$ 中元的前缀. 设集合 $\mathcal{W}\subset\overline{\mathcal{W}}_m$ 包含 $\mathcal{W}_m$ 中每个元素的一个前缀, 则

$$\sum_{k=1}^{m}|\mathcal{W}\cap\mathcal{W}_k||\mathcal{W}_m|/|\mathcal{W}_k|\geqslant|\mathcal{W}_m|.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{m}|\mathcal{W}\cap\mathcal{W}_k|/|\mathcal{W}_k|\geqslant 1.$$

而 $\mathcal{C}'$ 是一个覆盖, $\mathcal{W}_m$ 中的每个点都有一个前缀与某个 $B_{M_p}(x,\epsilon)\in\mathcal{C}'$ 相对应, 且每个 $B_{M_p}(x,\epsilon)\in\mathcal{C}'$ 只和一个 p 长的前缀相对应.

由上述证明可得

$$|\mathcal{W}_p|\geqslant\exp\left[M_ph^*-\sum_{i=1}^{p}\left(S_{n_i{}'}\varphi({}^{i'}x)+n_i{}'\frac{\delta}{6}\right)\right],$$

其中 ${}^{i'}x\in\Gamma_i{}'$. 所以

$$\sum_{B_{M_p}(x,\epsilon)\in\mathcal{C}'}\exp\left[-M_ph^*+\sum_{i=1}^{p}\left(S_{n_i{}'}\varphi({}^{i'}x)+n_i{}'\frac{\delta}{6}\right)\right]\geqslant 1.$$

下面证明

$$\begin{aligned}&M_ph^*-\sum_{i=1}^{p}\left(S_{n_i{}'}\varphi({}^{i'}x)+n_i{}'\frac{\delta}{6}\right)-sm+S_m\varphi(z)\\&\quad=m(h^*-s)+\sum_{i=1}^{p}\left(S_{n_i{}'}\varphi(T^{M_{i-1}}z)-S_{n_i{}'}\varphi({}^{i'}x)-n_i{}'\frac{\delta}{6}\right)\\&\qquad+S_{m-M_p}\varphi(T^{M_p}z)-(m-M_p)h^*>0.\end{aligned}$$

因为 $z\in G$, 由 G 的构造, 存在

$$G(x_1,x_2,\dots)=\bigcap_{i=0}^{\infty}T^{-M_{j-1}}B_{n_j{}'}(g;x_j,\epsilon_j{}'),$$

使得 $T^{M_{j-1}}z \in B_{n_j{}'}(g; x_j, \epsilon_j{}')$. 再由 (7) 式有 $\mathcal{E}_{n_i{}'}(T^{M_{i-1}}z) \in \mathcal{B}(\alpha_i{}', \zeta_i{}' + 2\epsilon_i{}')$. 又 ${}^{i'}x \in \Gamma_i{}'$, 所以 $\mathcal{E}_{n_i{}'}({}^{i'}x) \in \mathcal{B}(\alpha_i{}', \zeta_i{}')$, 因而

$$\left| \int \varphi d\mathcal{E}_{n_i{}'}(T^{M_{i-1}}z) - \int \varphi d\mathcal{E}_{n_i{}'}({}^{i'}x) \right| n_i{}' = |S_{n_i{}'}\varphi(T^{M_{i-1}}z) - S_{n_i{}'}\varphi({}^{i'}x)| \leqslant n_i{}'\frac{\delta}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned} M_p h^* &- \sum_{i=1}^{p} \left(S_{n_i{}'}\varphi(x^{i'}) + n_i{}'\frac{\delta}{6} \right) - sm + S_m\varphi(z) \\ &\geqslant m(h^* - s) - \sum_{i=1}^{p} 2n_i{}'\frac{\delta}{3} - n_{p+1}{}'(\| \varphi \| + h^*) \\ &\geqslant 2\delta M_p - M_p\delta - n_{p+1}{}'(\| \varphi \| + h^*) \\ &\geqslant M_p\delta - n_{p+1}{}'(\| \varphi \| + h^*). \end{aligned}$$

因为 $\lim_{p\to\infty} \frac{n_{p+1}{}'}{M_p} = 0$, 所以可以选取充分大的 p, 使得 $M_p\delta - n_{p+1}{}'(\| \varphi \| + h^*) > 0$. 此时

$$\sum_{B_m(x,\epsilon)\in C} \exp\left(-sm + \sup_{y\in B_m(x,\epsilon)} S_m\varphi(y) \right) \geqslant \sum_{B_{M_p}(x,\epsilon)\in C'} \exp\left[-M_p h^* + \sum_{i=1}^{p} \left(S_{n_i{}'}\varphi({}^{i'}x) + n_i{}'\frac{\delta}{6} \right) \right].$$

所以 $M(G; s, \varphi, n, \epsilon) \geqslant 1$. 从而推得 $s \leqslant P(G, \varphi, \epsilon)$. 因为 $s < h^*$ 以及 η 的任意性, 引理得证.

又因为 $G \subset G_K$, 所以 $P(G, \varphi) \leqslant P(G_K, \varphi)$. 定理 4.1 得证.

由定理 3.1 和定理 4.1 可推得定理 2.1 (i). 特别的, 若 $\varphi = 0$, 即为文献 [7] 中的定理 1.1.

5 非一致分离条件

设 $\epsilon > 0, \delta > 0, \nu \in M(X, T)$, F 是 ν 的邻域. 定义

$$\underline{s}(\nu, \delta, \epsilon) := \inf_{F\ni\nu} \liminf \frac{1}{n} \log N(F, \delta, n, \epsilon), \overline{s}(\nu, \delta, \epsilon) := \inf_{F\ni\nu} \liminf \frac{1}{n} \log N(F, \delta, n, \epsilon).$$

此定义中, 上、下确界可以对球形邻域 $\mathcal{B}(\nu, \zeta)$ 求取. 因为 $N(F, \delta, n, \epsilon) \leqslant N(X, n, \epsilon)$, 由文献 [13] 中的定理 7.7 及注 (8) 可得

$$\underline{s}(\nu, \delta, \epsilon) \leqslant \underline{s}(\nu, \epsilon) < \infty, \quad \overline{s}(\nu, \delta, \epsilon) \leqslant \overline{s}(\nu, \epsilon) < \infty.$$

引理 5.1[7] 设 $\epsilon^*, \delta^* > 0$. 若 $\nu \in M(X, T), \nu = \int \mu_t \rho(dt)$ 为其遍历分解, 则对任意的 $\Delta > 0$, 存在有限个遍历测度的凸组合 $\sum_{i=1}^{p} a_i\mu_i$, 使得

$$d\left(\nu, \sum_{i=1}^{p} a_i\mu_i \right) \leqslant \Delta, \quad \int \underline{s}(\mu_t, \delta^*, \epsilon^*)\rho(dt) \leqslant \sum_{i=1}^{p} a_i \underline{s}(\mu_i, \delta^*, \epsilon^*),$$

其中 $\{a_i\}$ 可选取为有理数. 若 $h^* < h(T, \nu)$, 则可以选取充分小的 ϵ^*, δ^*, 使得

$$h^* < \int \underline{s}(\mu_t, \delta^*, \epsilon^*)\rho(dt).$$

由定理 3.1 (ii), 可推得 $P(G_\nu, \varphi) \leqslant h(T, \nu) + \int \varphi d\nu$ 对任意不变测度 ν 成立. 要证明定理 2.1 (ii), 只需要证明: 对任意的 $\nu \in M(X, T)$, $P(G_\nu, \varphi) \geqslant h(T, \nu) + \int \varphi d\nu$.

定理 5.1 设动力系统 (X, d, T) 满足 g-几乎乘积性质. $\varphi : X \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 则

$$P(G_\nu, \varphi) \geqslant h(T, \nu) + \int \varphi d\nu, \forall \nu \in M(X, T).$$

证明 设 $a := h(T, \nu) + \int \varphi d\nu$, 对任意的 $a^* < a' < a$, 下证 $a^* \leqslant P(G_\nu, \varphi)$.

设 $\eta_1 := a - a', \eta_2 := a' - a^*, h' := h(T,\nu) - \eta_1, h^* := h(T,\nu) - \eta_1 - \eta_2$. 对任意的 $s < a^*$, 设 $a^* - s := 2\delta$. 由引理 5.1, 对任意的 k, 可以找到 $\epsilon^* > 0, \delta^* > 0$, 以及有限个遍历测度的有理系数的凸组合 $\alpha_k := \sum_{i=1}^{p_k} a_{i,k}\mu_{i,k}$, 使得 $\alpha_k \to \nu$ $(k \to \infty)$,

$$h' < \sum_{i=1}^{p_k} a_{i,k}\underline{s}(\mu_{i,k}, \delta^*, \epsilon^*). \tag{8}$$

设 $\{\zeta_k\}, \{\epsilon_k\}$ 为严格单调递减趋于零的正数序列, 满足 $\zeta_1 < \delta/6, \epsilon_1 < \epsilon^*$, 并且使得对任意的 $1 \leqslant i \leqslant p_k$, 有

$$\left|\int \varphi d\mu_{i,k} - \int \varphi d\mu\right| \leqslant \frac{\delta}{6}, \quad \forall \mu \in \mathcal{B}(\mu_{i,k}, \zeta_k),$$
$$\left|\int \varphi d\mu_{i,k} - \int \varphi d\mu\right| \leqslant \frac{\delta}{3}, \quad \forall \mu \in \mathcal{B}(\mu_{i,k}, \zeta_k + 2\epsilon_k).$$

设 $\nu_{\zeta_k} > 0$, 使得当 $d(\nu, \alpha_k) < \nu_{\zeta_k}$, 时

$$\left|\int \varphi d\nu - \int \varphi d\alpha_k\right| \leqslant \zeta_k.$$

对于每个 α_k, 存在正整数 n_k 使得 $\{a_{i,k}n_k\}$ 都为整数, 且满足

$$N(\mathcal{B}(\mu_{i,k}, \zeta_k), \delta^*, a_{i,k}n_k, \epsilon^*) \geqslant e^{a_{i,k}n_k(\underline{s}(\mu_{i,k}, \delta^*, \epsilon^*) - \eta_2)}, \tag{9}$$

$$\delta^* a_{i,k}n_k > 2g(a_{i,k}n_k) + 1, \quad g(a_{i,k}n_k)/a_{i,k}n_k \leqslant \epsilon_k, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, p_k. \tag{10}$$

设 $\Gamma_{i,k} \subset X_{a_{i,k}n_k, \mathcal{B}(\mu_{i,k}, \zeta_k)}$ 为 $(\delta^*, a_{i,k}n_k, \epsilon^*)$-分离集, 则有

$$|\Gamma_{i,k}| \geqslant e^{a_{i,k}n_k(\underline{s}(\mu_{i,k}, \delta^*, \epsilon^*) - \eta_2)}. \tag{11}$$

定义 $\Gamma_k := \prod_{i=1}^{p_k} \Gamma_{i,k}$, 由 (8) 和 (9) 式可得 $|\Gamma_k| \geqslant e^{n_k h^*}$. 又因为 $d(\nu, \alpha_k) < \nu_{\zeta_k}$, 所以 $\int \varphi d\nu - \int \varphi d\alpha_k - \zeta_k < 0$, 因而

$$|\Gamma_k| \geqslant e^{n_k(h^* + \int \varphi d\nu) - n_k(\int \varphi d\alpha_k + \zeta_k)} = e^{n_k a^* - n_k(\int \varphi d\alpha_k + \zeta_k)}.$$

设 $\bar{x}_k := (x_{1,k}, \ldots, x_{p_k,k}) \in \Gamma_k$, 其中 $\mathcal{E}_{a_{i,k}n_k}(x_{i,k}) \in \mathcal{B}(\mu_{i,k}, \zeta_k)$. 定义集合

$$B_{n_k}(g; \bar{x}_k, \epsilon_k) := \bigcap_{i=1}^{p_k} T^{-(a_{1,k} + \cdots + a_{i-1,k})n_k} B_{a_{i,k}n_k}(g; x_{i,k}, \epsilon_k).$$

与定理 4.1 中相似, 定义集合

$$G_k := \bigcap_{j=1}^{k} \left(\bigcup_{x_j \in \Gamma_j{}'} T^{-M_{j-1}} B_{n_j{}'}(g; \bar{x}_j, \epsilon_j{}') \right),$$

其中 $M_j = \sum_{i=1}^{j} n_i{}'$.

余下的证明与定理 4.1 相似, 在此省略.

至此, 我们证明了定理 2.1 (ii). 特别的, 若 $\varphi = 0$, 则得到文献 [7] 中的定理 6.1.

6 条件变分原理

应用前面的结论, 我们得到一个非紧集合拓扑压的条件变分原理. 定理 A 和 C 分别为它的特殊情形.

定理 6.1 设动力系统 (X, d, T) 满足 g-几乎乘积性质, $\psi, \varphi : X \to \mathbb{R}$ 为连续函数. 若对于任意的 $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$K_\alpha = \left\{x \in X, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\psi(x) = \alpha\right\} \neq \emptyset,$$

则

$$P(K_\alpha,\varphi)=\sup\left\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu:\mu\in M(X,T),\int\psi d\mu=\alpha\right\}.$$

证明 设 $F(\alpha):=\{\mu\in M(X,T):\int\psi d\mu=\alpha\}$, 则 $F(\alpha)$ 为闭集. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n\psi(x)=\alpha$ 与 $\{\mathcal{E}_n(x)\}$ 的所有极限点在 $F(\alpha)$ 中等价. 设

$$G^{F(\alpha)}:=\{x\in X:\{\mathcal{E}_n(x)\}\text{ 所有极限点都在 }F(\alpha)\text{ 中 }\}.$$

对任意 $\mu\in F(\alpha)$, 都有 $G_\mu\subset G^{F(\alpha)}$. 所以

$$h(T,\mu)+\int\varphi d\mu=P(G_\mu,\varphi)\leqslant P(G^{F(\alpha)},\varphi).$$

因而

$$\sup\left\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu:\mu\in F(\alpha)\right\}\leqslant P(G^{F(\alpha)},\varphi).$$

另一方面 $G^{F(\alpha)}\subset^{F(\alpha)}G$, 所以 $P(G^{F(\alpha)},\varphi)\leqslant P(^{F(\alpha)}G,\varphi)$, 再由定理 3.1 (i) 得

$$P(^{F(\alpha)}G,\varphi)\leqslant\sup\left\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu:\mu\in F(\alpha)\right\}.$$

所以

$$P(G^{F(\alpha)},\varphi)=\sup\left\{h(T,\mu)+\int\varphi d\mu:\mu\in F(\alpha)\right\}.$$

定理得证.

注记 6.1 在本文完成后, 我们得知 Thompson[14] 也证明了与定理 6.1 相同的结果, 但是文献 [14] 采用了文献 [5] 中的证明方法, 并且要求动力系统 (X,d,T) 满足 specification 性质. 我们的条件严格弱于文献 [14] 中的条件.

注记 6.2 对于连续映射 $\psi:X\to\mathbb{R}^n$, 我们可以得到类似定理 6.1 的结论.

由定理 6.1 以及注记 6.1, 我们可得到以下推论.

推论 6.1 若动力系统 (X,d,T) 满足 g-几乎乘积性, 则有

$$BS(K_\alpha,\varphi)=\sup\left\{\frac{h(T,\mu)}{\int\varphi d\mu}:\mu\in M(X,T),\int\psi d\mu=\alpha\right\}.$$

由 BS- 维数的定义可以推得以下的结论.

推论 6.2 若动力系统 (X,d,T) 满足 g-几乎乘积性, 则有

$$h_{\text{top}}(T,K_\alpha)=\sup\left\{h(T,\mu):\mu\in M(X,T),\int\psi d\mu=\alpha\right\}.$$

推论 6.3 设 X 是一个 C^r 黎曼流形, T 是其上的一个拓扑混合的 $C^{1+\delta}$ 共形扩张映射, 则有

$$\dim_H(K_\alpha)=\sup\left\{\frac{h(T,\mu)}{\int\log||dT||d\mu}:\mu\in M(X,T),\int\psi d\mu=\alpha\right\}.$$

Barreira 和 Saussol 在文献 [15] 中证明了: 若测度熵满足上半连续条件, φ,ψ 有唯一的平衡态, 则 BS-维数也满足推论 6.1 中的结论. 推论 6.3 中的结论也是文献 [9] 中的主要结论. 对于我们的结论在平均共形以及 C^1 共形排斥子上的应用, 我们将另文发表.

致谢 衷心感谢审稿人对我们的文章提出的修改建议.

参考文献

1 Ruelle D. Statistical mechanics on a compact set with Z^v action satisfying expansiveness and specification. *Trans Amer Math Soc*, **185**: 79–122 (1973)

2 Walters P. A variational principle for the pressure of continuous transformations. *Amer J Math*, **17**: 500–516 (1974)

3 Bowen R. Topological entropy for non-compact sets. *Trans Amer Math Soc*, **184**: 125–136 (1973)

4 Pesin Y B, Pitskel' B. Topological pressure and the variational principle for non-compact sets. *Funct Anal Appl*, **18**: 50–63 (1984)

5 Takens F, Verbitskiy E. On the variational principle for the topological entropy of certain non-compact sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, **23**: 317–348 (2003)

6 Luzia N. Measure of full dimension for some non conformal repellers. *Preprint*, arXiv: 0705.3604v1, (2006)

7 Pfister C E, Sullivan W G. On the topological entropy of saturated sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, **27**: 929–956 (2007)

8 Fan A H, Liao L M, Peyriére J. Generic points in system of specification and Banach valued Birkhoff ergodic average. *Discrete Contin Dyn Syst*, **21**: 1103–1128 (2008)

9 Feng D J, Lau K S, Wu J. Ergodic limits on the conformal repeller. *Adv Math*, **169**: 58–91 (2002)

10 Barreira L, Schmeling J. Sets of "non-typical" points have full topological entropy and full Hausdorff dimension. *Israel J Math*, **116**: 29–70 (2000)

11 Pfister C E, Sullivan W G. Large deviations estimates for dynamical systems without the specification property. Application to the β-shift. *Nonlinearity*, **18**: 237–261 (2005)

12 Pfister C E, Sullivan W G. Billingsley Dimension on shift spaces. *Nonlinearity*, **16**: 661–682 (2003)

13 Walters P. An Introduction to Ergodic Theory, Graduate Texts in Mathematics 79. Berlin: Springer, 2000

14 Thompson D. A variational principle for topological pressure for certain non-compact sets. *Preprint*, arXiv: 0809.3941v1, 2008

15 Barreira L, Saussol B. Variational principles and mixed multifractal spectra. *Trans Amer Math Soc*, **353**: 3919–3944 (2001)