中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 4 期: 433～448
www.scichina.com math.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

一类四次椭圆 Hamilton 向量场在三次多项式下的扰动

赵丽琴 ①*, 王琦 ②

① 北京师范大学数学科学学院, 数学与复杂系统教育部重点实验室, 北京 100875
② 河北科技大学理学院数学系, 石家庄 050018
* E-mail: zhaoliqin@bnu.edu.cn

收稿日期: 2007-01-13; 接受日期: 2008-09-12
国家自然科学基金 (批准号: 10671020) 资助项目

摘要 本文研究一类四次椭圆 Hamilton 向量场在所有三次多项式下的扰动, 证明了如下结论: (1) 除全局中心外, 围绕一个中心定义的 Abel 积分的孤立零点的个数不超过 12; (2) 存在一个三次系统, 它在扰动前属于一个鞍点环的情形, 而在扰动后至少存在 3 个极限环.

关键词 Abel 积分 椭圆 Hamilton 向量场 同宿分支

MSC(2000) 主题分类 **58F14, 58F21, 58F30, 34C05**

1 引言

众所周知, 常微分方程在刻画自然现象中具有重要的作用, 然而, 由于缺乏得力的理论工具, 我们很难对非线性微分方程的解做出全面的研究, 比如确定极限环的个数和位置. 由于 Liénard 方程

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = P(x) + yQ(x) \tag{1.1}$$

包含了著名的 Van der Pol 方程

$$\ddot{x} + \alpha\phi(x)\dot{x} + x = 0 \tag{1.2}$$

和 Duffing 方程

$$\ddot{x}(t) + \delta\dot{x}(t) - x + x^3 = 0, \tag{1.3}$$

(1.1) 式在非线性力学、电子学等学科中具有重要的作用. 遗憾的就是对这种方程, Hilbert 第 16 问题仍然没有解决, 同时在局部分支理论中也常常遇到 Liénard 方程. Liénard 方程 (1.1) 称为是 (m, n)- 型的, 如果 $\deg P = m$ 以及 $\deg Q = n$.

于是在文献 [1–4] 中, Dumortier 和 Li 系统地研究了 $(3, 2)$- 型的 Liénard 方程 $\dot{x} = y$, $\dot{y} = P(x)$ 在 $\delta y(x^2+\beta x+\alpha)\frac{\partial}{\partial y}$ 扰动下 Abel 积分零点的个数和极限环的个数, 其中 $0 < \delta \ll 1$, $(\delta, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ 是任意常数. 经过适当的尺度变换, Hamilton 函数 $\frac{1}{2}y^2 + \int_0^x P(s)ds$ 可以化为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0. \tag{1.4}$$

引用格式: 赵丽琴, 王琦. 一类四次椭圆 Hamilton 向量场在三次多项式下的扰动. 中国科学 A, 2009, 39(4): 433–448
Zhao L Q, Wang Q. Perturbations from a kind of quartic. Sci China Ser A, 2009, 52(3): 427–442, DOI: 10.1007/s11425-009-0009-7

换句话讲, 文献 [1–4] 研究了如下系统的分支现象:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -(ax^3 + bx^2 + cx) + (\delta x^2 y + \delta\beta xy + \delta\alpha y), \tag{1.5}$$

其中 $(a, b, c, \delta, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^6$ 为任意常数, $a \neq 0$ 且 $0 < \delta \ll 1$.

本文将研究向量场

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -(ax^3 + bx^2 + cx), \quad \forall\,(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0, \tag{X_0}$$

在一般三次多项式扰动下的分支现象, 即我们要讨论如下向量场

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon \displaystyle\sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 3} p_{ij} x^i y^j =: H_y + \varepsilon P_3(x, y), \\ \dot{y} = -(ax^3 + bx^2 + cx) + \varepsilon \displaystyle\sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 3} q_{ij} x^i y^j =: -H_x + \varepsilon Q_3(x, y), \end{cases} \tag{$\tilde{X}_\varepsilon$}$$

Abel 积分孤立零点的个数和极限环的个数, 其中 p_{ij}, q_{ij} 和 ε 是任意常数, $0 < \varepsilon \ll 1$ (i, j 满足 $0 \leqslant i + j \leqslant 3$).

对任意 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ($a \neq 0$), 向量场 (X_0) 的相图有 5 种不同的拓扑类型, 分别称为含两鞍点的多角环、鞍点的同宿环、全局中心、尖点环和双同宿环 (见图 1 (A)–(E)).

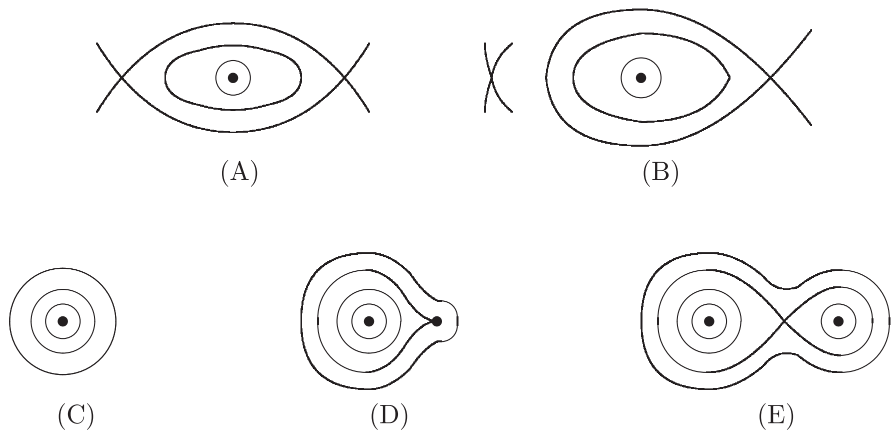

图 1

主要结论如下所示.

定理 1.1 考虑向量场 (X_0) 在一般三次多项式下的扰动, 即向量场 $(\tilde{X}_\varepsilon)$. 假设 $a\,(\neq 0), b$ 和 c 是任意常数, 使得 (X_0) 至少有一个中心, 则下列结论成立:

(i) 对 Abel 积分零点的个数, $(\tilde{X}_\varepsilon)$ 等价于

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -(ax^3 + bx^2 + cx) + \varepsilon(q_{01} y + q_{11} xy + q_{21} x^2 y + q_{03} y^3). \end{cases} \tag{X_ε}$$

(ii) 对于情形 (A), (B), (D) 和 (E), (X_ε) 确定的围绕一个中心的 Abel 积分孤立零点的个数不超过 12.

(iii) 对于情形 (B), 存在常数 $a^*, b^*, c^*, q_{01}^*, q_{11}^*, q_{21}^*, q_{03}^*$ 和 $\varepsilon^* > 0$, 使得对应的向量场 (X_ε^*) 至少有 3 个极限环.

注 1.1 (i) 由于本文讨论向量场 (X_0) 在一般三次多项式下的扰动, 因此很难得到 Abel 积分零点和极限环个数的上确界. 另一方面, 文献 [1–4] 中的方法也不太适用.

(ii) 我们将应用广义 Rolle 定理 (在 Khovanskii 方法的意义下, 见第 3 节中的定理 B), 通过考察两条曲线交点的个数来完成定理 1.1 的证明.

(iii) 由文献 [1] 的定理 1 知, 对于情形 (B), 向量场 (1.5) 极限环个数的上确界为 2. 结合本文定理 1.1, 可以看出一般三次多项式的扰动确实能改变极限环的个数.

(iv) Zhao 和 Zhang[5] 证明了向量场 (X_0) 在所有 n 次多项式扰动下对应的 Abel 积分零点的个数不超过 $7n+5$. Liu[6] 研究了情形 (E) 在所有 n 次多项式扰动下 Abel 积分零点的个数.

(v) 文献 [7–11] 研究了 Hamilton 函数 (1.4) 具有对称性时 Abel 积分零点的个数, 如 $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+x^4-x^2$, $H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+x^2-x^4$. 这时, 大部分结论是用 Petrov 方法得到的.

本文的结构如下: 第 2 节首先证明定理 1.1(i), 然后给出 Abel 积分 $I(h)$ 的表达式和 $I_i(h)$ 的性质, $i=1,2,3$. 第 3 节将给出 Abel 积分孤立零点个数的上界. 第 4 节完成定理 1.1 的证明.

2 预备知识

设 Γ_h 是由 $H(x,y)=h$ $(h\in\Sigma)$ 定义的等位线, 其中 Σ 是能定义等位线的 h 的最大范围.

2.1 定理 1.1 (i) 的证明及 $I_i(h)$ 的相关性质

引理 2.1 对于 Abel 积分, 向量场族 $(\tilde{X}_\varepsilon)$ 与向量场族 (X_ε) 等价.

证明 由文献 [11] 知, $(\tilde{X}_\varepsilon)$ 的后继函数 (又称为 Mel'nikov 函数) 可表示为

$$M(h,\varepsilon)=\varepsilon(I(h)+o(\varepsilon)),\quad h\in\Sigma, \tag{2.1}$$

其中

$$I(h)=\oint_{\Gamma_h}P_3(x,y)dy-Q_3(x,y)dx \tag{2.2}$$

是 Abel 积分. 由 Green 公式,

$$I(h)=\int\int_{\mathrm{int}\Gamma_h}\left(\frac{\partial P_3}{\partial x}+\frac{\partial Q_3}{\partial y}\right)dxdy,$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_3}{\partial x}+\frac{\partial Q_3}{\partial y}=&(p_{10}+q_{01})+(2p_{20}+q_{11})x+(p_{11}+2q_{02})y\\&+(3p_{30}+q_{21})x^2+2(p_{21}+q_{12})xy+(p_{12}+3q_{03})y^2.\end{aligned}$$

设 $x_l(h)$ 和 $x_r(h)$ 是 Γ_h 与 x 轴交点的横坐标, $x_l(h)<0<x_r(h)$, 则当 $x\in(x_l(h),x_r(h))$ 时, Γ_h 可表示为

$$\begin{aligned}&-y_+(x,h)\leqslant y(x,h)\leqslant y_+(x,h),\\&y_+(x,h)=\sqrt{2\left[h-\left(\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\right)\right]},\quad h\in\Sigma.\end{aligned}$$

从而

$$I(h)=\int_{x_l(h)}^{x_r(h)}dx\int_{-y_+(x,h)}^{y_+(x,h)}F(x,y)dy,$$

其中

$$F(x,y)=(p_{10}+q_{01})+(2p_{20}+q_{11})x+(3p_{30}+q_{21})x^2+(p_{12}+3q_{03})y^2.$$

注意到 p_{ij} 和 q_{ij} 是任意常数, 不失一般性, 可以假设 $p_{ij}\equiv 0$. 于是,

$$I(h)=\int\int_{\mathrm{int}\Gamma_h}[q_{01}+q_{11}x+q_{21}x^2+3q_{03}y^2]dxdy.$$

因此, 向量场族 (X_ε) 与向量场族 $(\tilde{X}_\varepsilon)$ 有相同的 Abel 积分, 即对于 Abel 积分, 两向量场族等价. 证毕.

为方便讨论, 记

$$I_i(h)=\oint_{\Gamma_h}x^iydx,\quad h\in\Sigma, i=0,1,2,\ldots, \tag{2.3}$$

$$Q(h)=\frac{I_2(h)}{I_0(h)},\quad h\in\Sigma, \tag{2.4}$$

$$\omega(h)=\frac{I_1''(h)}{I_0''(h)},\quad \text{对 } h\in\Sigma \text{ 且 } I_0''(h)\neq 0. \tag{2.5}$$

引理 2.2 对系统 (X_ε), Abel 积分 $I(h)$ 可表示为

$$I(h)=(\alpha_1h+\alpha_2)I_0(h)+\beta I_1(h)+\gamma I_2(h), \tag{2.6}$$

其中

$$\alpha_1=\frac{12}{5}q_{03},\quad \alpha_2=q_{01},$$

$$\beta=q_{11}+\frac{bc}{5a}q_{03},\quad \gamma=q_{21}+\frac{b^2-3ac}{5a}q_{03}.$$

证明 由 (2.2) 式,

$$I(h)=q_{01}I_0(h)+q_{11}I_1(h)+q_{21}I_2(h)+\oint_{\Gamma_h}q_{03}y^3dx. \tag{2.7}$$

沿着 Γ_h, 有

$$y^2=2h-\frac{a}{2}x^4-\frac{2b}{3}x^3-cx^2,$$

于是

$$\oint_{\Gamma_h}y^3dx=2hI_0(h)-\frac{a}{2}I_4(h)-\frac{2b}{3}I_3(h)-cI_2(h). \tag{2.8}$$

下面计算 $I_3(h)$ 和 $I_4(h)$. 沿着 Γ_h, 有

$$ydy+(ax^3+bx^2+cx)dx=0. \tag{2.9}$$

由于 $\oint_{\Gamma_h}y^2dy=0$, 则

$$aI_3(h)+bI_2(h)+cI_1(h)=0. \tag{2.10}$$

由 (2.9) 式,

$$xy^2dy+(ax^4+bx^3+cx^2)ydx=0. \tag{2.11}$$

注意到

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_h}xy^2dy&=\int\int_{\mathrm{int}\Gamma_h}y^2dxdy=\oint_{\Gamma_h}\frac{y^3}{3}dx\\&=\oint_{\Gamma_h}\frac{2}{3}y\left[h-\frac{a}{4}x^4-\frac{b}{3}x^3-\frac{c}{2}x^2\right]dx\\&=\frac{2}{3}\left\{hI_0(h)-\frac{a}{4}I_4(h)-\frac{b}{3}I_3(h)-\frac{c}{2}I_2(h)\right\},\end{aligned}$$

及 (2.11) 式, 从而有

$$\frac{2h}{3}I_0(h)+\frac{5a}{6}I_4(h)+\frac{7b}{9}I_3(h)+\frac{2c}{3}I_2(h)=0. \tag{2.12}$$

将 (2.10) 与 (2.12) 式代入 (2.8) 式得

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_h} y^3dx&=\frac{12h}{5}I_0(h)-\frac{b}{5}I_3(h)-\frac{3c}{5}I_2(h)\\&=\frac{12h}{5}I_0(h)+\frac{b}{5}\cdot\frac{1}{a}(bI_2(h)+cI_1(h))-\frac{3c}{5}I_2(h)\\&=\frac{12h}{5}I_0(h)+\frac{b^2-3ac}{5a}I_2(h)+\frac{bc}{5a}I_1(h).\end{aligned}$$

于是, 由 (2.7) 式, 有

$$\begin{aligned}I(h)&=\left[q_{01}+\frac{12}{5}q_{03}h\right]I_0(h)+\left[q_{11}+\frac{bc}{5a}q_{03}\right]I_1(h)+[q_{21}+\frac{b^2-3ac}{5a}q_{03}]I_2(h)\\&=(\alpha_1h+\alpha_2)I_0(h)+\beta I_1(h)+\gamma I_2(h).\end{aligned}$$

证毕.

2.2 $I_i(h)$, $Q(h):=\frac{I_2(h)}{I_0(h)}$ 和 $\omega(h):=\frac{I_1''(h)}{I_0''(h)}$ 的性质

由文献 [1], 下列结论成立.

定理 A[1]

(i)

$$N\begin{pmatrix}I_0\\I_1\\I_2\end{pmatrix}=(4hE+S)\begin{pmatrix}I_0'\\I_1'\\I_2'\end{pmatrix},$$

其中 E 是单位矩阵, 且

$$N=\begin{pmatrix}3&0&0\\\frac{b}{3a}&4&0\\\frac{3ac-b^2}{3a^2}&\frac{2b}{3a}&5\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0&\frac{bc}{3a}&\frac{b^2-3ac}{3a}\\0&\frac{3ac^2-cb^2}{3a^2}&\frac{b(4ac-b^2)}{3a^2}\\0&\frac{-bc(4ac-b^2)}{3a^3}&\frac{3a^2c^2-5ab^2c+b^4}{3a^3}\end{pmatrix}.$$

(ii) 若 $b(2b^2-9ac)\neq 0$, 则

$$I_2''=\frac{12a}{2b^2-9ac}hI_0''+\frac{1}{b}\left(\frac{36a^2}{2b^2-9ac}h-c\right)I_1''. \tag{2.13}$$

(iii) 若 $I_1(h)\equiv 0$, 则 $Q(h)$ 满足下面的方程

$$G(h)Q'(h)=a_{20}+a_{22}Q-Q(a_{00}+a_{02}Q), \tag{2.14}$$

其中

$$\begin{aligned}G(h)&=12h[144a^3h^2+12(b^4-6ab^2c+6a^2c^2)h-c^3(2b^2-9ac)],\\a_{00}&=12[108a^3h^2+(10b^4-61ab^2c+63a^2c^2)h-c^3(2b^2-9ac)],\\a_{02}&=-15a[12a(b^2-3ac)h+c^2(2b^2-9ac)],\\a_{20}&=-12[12a(b^2-3ac)h+c^2(2b^2-9ac)]h,\\a_{22}&=180a[12a^2h-c(b^2-3ac)]h.\end{aligned}$$

(iv) 若 $b(2b^2-9ac)\neq 0$, 则 $\omega(h)$ 满足下面的 Riccati 方程

$$G(h)\omega'(h)=-b_{01}\omega^2-(b_{00}-b_{11})\omega+b_{10}, \tag{2.15}$$

其中

$$\begin{aligned}
b_{00}&=\frac{432a^3(36ac-7b^2)}{2b^2-9ac}h^2-(864a^2c^2-996ab^2c+168b^4)h+12(2b^2-9ac)c^3,\\
b_{01}&=\frac{3888a^4(b^2-3ac)}{b(2b^2-9ac)}h^2+\frac{12a(54a^2c^2+9ab^2c-2b^4)}{b}h\\
&\quad+\frac{(2b^2-9ac)(10b^2-9ac)c^2}{b},\\
b_{10}&=-\frac{144a^2b(7b^2-27ac)}{2b^2-9ac}h^2+12bc(2b^2-9ac)h,\\
b_{11}&=\frac{432a^3(72ac-17b^2)}{2b^2-9ac}h^2-12(2b^2-9ac)(5b^2-8ac)h.
\end{aligned}$$

注 2.1 当 $h\in\Sigma$ 时, $G(h)\neq 0$.

3 定理 1.1(ii) 的证明

定理 B[12–14] 设函数 $F(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 在 $\overline{\mathcal{D}}$ 上连续, 在 $\mathcal{D}$ 内光滑, 其中 $\mathcal{D}=(x_1,x_2)\times(y_1,y_2)$. 若 $F'_x(x,y)$ 及 $F'_y(x,y)\neq 0$, 则在区域 $\mathcal{D}$ 内, 方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=0,\\ G(x,y)=0\end{cases}$$

解的个数不超过 1 加上方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=0,\\ F'_y(x,y)G'_x(x,y)-F'_x(x,y)G'_y(x,y)=0\end{cases}$$

解的个数.

以下用 $\sharp\{f(h)=0\ (h\in\Sigma)\}$ 表示 $f(h)$ 在 $h\in\Sigma$ 上孤立零点的个数.

引理 3.1 假设 $b=0$, 则

$$\sharp\{I(h)=0(h\in\Sigma)\}\leqslant\max(4,q), \tag{3.1}$$

其中 q 是 $Q(h)$ 在 Σ 上单调区间的个数.

证明 当 $b=0$ 时,

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{a}{4}x^4+\frac{c}{2}x^2,\quad (a,b,c)\in\mathbb{R}^3, a\neq 0,$$

此时等位线 $H(x,y)=h$ 同时关于 x 轴和 y 轴对称, 从而 $I_1(h)\equiv 0$. 由 (2.6) 式,

$$I(h)=(\alpha_1h+\alpha_2)I_0(h)+\gamma I_2(h),\quad h\in\Sigma, \tag{3.2}$$

其中 α_1, α_2 和 γ 是任意常数. 若 $\gamma=0$, 则 $I(h)=(\alpha_1h+\alpha_2)I_0(h)$. 注意到 $I_0(h)\neq 0$, 因此 $I(h)$ 在 Σ 内至多有一个孤立零点. 若 $\gamma\neq 0$, 则

$$I(h)=\gamma I_0(h)\left[\frac{\alpha_1h+\alpha_2}{\gamma}+\frac{I_2(h)}{I_0(h)}\right]=:\gamma[(\widetilde{\alpha}_1h+\widetilde{\alpha}_2)+Q(h)]I_0(h),$$

因此方程 $I(h)=0$ 与方程

$$(\widetilde{\alpha}_1h+\widetilde{\alpha}_2)+Q(h)=0,\quad h\in\Sigma, \tag{3.3}$$

同解, 其中 $\tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\alpha}_2$ 是任意常数. 方程 (3.3) 与方程组

$$\begin{cases} G(h,y) := y - Q(h) = 0, \\ F(h,y) := y + (\tilde{\alpha}_1 h + \tilde{\alpha}_2) = 0, \end{cases} \quad h \in \Sigma, \tag{3.4}$$

同解. 下面考虑 $\tilde{\alpha}_1 = 0$ 的情形. 此时方程组 (3.4) 等价于

$$\begin{cases} y = Q(h), \\ y = -\tilde{\alpha}_2. \end{cases} \quad h \in \Sigma. \tag{3.5}$$

方程组 (3.5) 解的个数即为曲线 $y = Q(h)$ 与任意直线 $y = -\tilde{\alpha}_2$ 的交点个数. 由于 $Q(h)$ 的单调区间的个数是 q, 故对任意 $\tilde{\alpha}_2$, 直线 $y = -\tilde{\alpha}_2$ 与曲线 $Q(h)$ 至多有 q 个交点, 也就是说, 当 $\tilde{\alpha}_1 = 0$ 时, $\sharp\{I(h) = 0(h \in \Sigma)\} \leqslant q$.

现在考虑 $\tilde{\alpha}_1 \neq 0$ 的情形. 由定理 B, 方程组 (3.4) 解的个数不超过 1 加如下方程组

$$\begin{cases} Q'(h) = -\tilde{\alpha}_1, \\ Q(h) = -(\tilde{\alpha}_1 h + \tilde{\alpha}_2), \end{cases} \quad h \in \Sigma \tag{3.6}$$

解的个数. 注意到当 $h \in \Sigma$ 时, $G(h) \neq 0$, 则方程组 (3.6) 等价于

$$\begin{cases} G(h)Q'(h) = -\tilde{\alpha}_1 G(h), \\ Q(h) = -(\tilde{\alpha}_1 h + \tilde{\alpha}_2), \end{cases} \quad h \in \Sigma. \tag{3.7}$$

设

$$f(h) = G(h)Q'(h) + \tilde{\alpha}_1 G(h).$$

由 (2.14) 式, 有

$$f(h) = [a_{20} + a_{22}Q - Q(a_{00} + a_{02}Q)] + \tilde{\alpha}_1 G(h). \tag{3.8}$$

将方程组 (3.7) 的第 2 个方程代入 (3.8) 式, 可得

$$f(h) = [a_{20} + a_{22}Q - Q(a_{00} + a_{02}Q)]|_{Q(h)=-(\tilde{\alpha}_1 h + \tilde{\alpha}_2)} + \tilde{\alpha}_1 G(h). \tag{3.9}$$

由定理 A, $\deg a_{02} = 1$, $\deg a_{20}$, $\deg a_{22}$, $\deg a_{00} = 2$ 且 $\deg G(h) = 3$, 从而 $f(h)$ 是 h 的三次多项式, 在 $h \in \mathbb{R}$ 上至多有 3 个孤立零点, 因此方程组 (3.6) 在 $h \in \mathbb{R}$ 上至多有 3 个孤立零点, 从而 (3.4) 当 $h \in \Sigma$ 时至多有 4 个孤立零点. 综上所述, 我们证明了

$$\sharp\{I(h) = 0(h \in \Sigma)\} \leqslant \begin{cases} 1, & 若\ \gamma = 0; \\ q, & 若\ \gamma \neq 0\ 且\ \tilde{\alpha}_1 = 0, \\ 4, & 若\ \gamma \neq 0\ 且\ \tilde{\alpha}_1 \neq 0. \end{cases}$$

证毕.

下面通过讨论 $I''(h)$ 孤立的零点的个数来研究 $I(h)$ 的孤立零点数.

引理 3.2 若 $2b^2 - 9ac \neq 0$, 则

$$I''(h) = (\sigma_1 h + \sigma_2)I_0''(h) + (\sigma_3 h + \sigma_4)I_1''(h), \quad h \in \Sigma, \tag{3.10}$$

其中 σ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, 是任意常数.

证明 由 (2.6) 式, 有

$$I'(h) = (\alpha_1 h + \alpha_2)I_0'(h) + \beta I_1'(h) + \gamma I_2'(h) + \alpha_1 I_0(h). \tag{3.11}$$

由于 q_{01}, q_{11}, q_{21} 和 q_{03} 是任意常数, $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 和 γ 也是任意常数. 由定理 A(i),

$$3I_0 = 4hI_0' + \frac{bc}{3a}I_1' + \frac{b^2-3ac}{3a}I_2'. \tag{3.12}$$

将 (3.12) 代入 (3.11) 式, 可得

$$I'(h) = (\rho_1 h + \rho_2)I_0'(h) + \rho_3 I_1'(h) + \rho_4 I_2'(h), \tag{3.13}$$

其中 ρ_i, $i = 1,2,3,4$, 是任意常数. 于是

$$I''(h) = \rho_1 I_0'(h) + (\rho_1 h + \rho_2)I_0''(h) + \rho_3 I_1''(h) + \rho_4 I_2''(h). \tag{3.14}$$

由定理 A(i),

$$(N - 4E)\begin{pmatrix} I_0' \\ I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = (4hE + S)\begin{pmatrix} I_0'' \\ I_1'' \\ I_2'' \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

由 (3.15) 的第一行可知

$$-I_0'(h) = 4hI_0'' + \frac{bc}{3a}I_1'' + \frac{b^2-3ac}{3a}I_2''. \tag{3.16}$$

将 (3.16) 和 (2.13) 式代入 (3.14) 可得 (3.10). 证毕.

引理 3.3 设 $b(2b^2-9ac) \neq 0$, 且当 $h \in \Sigma$ 时 $I_0''(h) \neq 0$, 则下列结论成立:

(i) 若 $(\sigma_1 h + \sigma_2)$ 和 $(\sigma_3 h + \sigma_4)$ 有公因子, 则

$$\sharp\{I(h) = 0 (h \in \Sigma)\} \leqslant l + 2, \tag{3.17}$$

其中 l 是 $\omega(h)$ 在 $h \in \Sigma$ 上单调区间的个数.

(ii) 若 $\sigma_1\sigma_4 = \sigma_2\sigma_3$, 则

$$\sharp\{I(h) = 0 (h \in \Sigma)\} \leqslant l + 2.$$

(iii) 若 $\sigma_1\sigma_4 \neq \sigma_2\sigma_3$, 则

$$\sharp\{I(h) = 0 (h \in \Sigma)\} \leqslant \max(6, l + 2). \tag{3.18}$$

总之,

$$\sharp\{I(h) = 0 (h \in \Sigma)\} \leqslant \max(6, l + 2). \tag{3.19}$$

证明 (i) 若 $(\sigma_1 h + \sigma_2)$ 和 $(\sigma_3 h + \sigma_4)$ 有公因子, 则存在 $k \neq 0$, 使得

$$\sigma_1 h + \sigma_2 = k(\sigma_3 h + \sigma_4), \quad h \in \mathbb{R}.$$

于是

$$I''(h) = (\sigma_3 h + \sigma_4)[kI_0''(h) + I_1''(h)] = (\sigma_3 h + \sigma_4)I_0''(h)[k + \omega(h)],$$

且有

$$\sharp\{I''(h) = 0 (h \in \Sigma)\} \leqslant 1 + \sharp\{\omega(h) = -k (h \in \Sigma)\}.$$

由于 $\omega(h)$ 在 Σ 上有 l 个单调区间, 则

$$\sharp\{I''(h) = 0 (h \in \Sigma)\} \leqslant 1 + l.$$

由 Rolle 定理, $I(h)$ 在 $h \in \Sigma \cup \partial\Sigma$ 上至多有 $l+3$ 个孤立零点. 注意到 $I(h)$ 在 $\partial\Sigma$ 上的两点中总有一点等于零, 故不等式 (3.17) 成立.

(ii) 若 $\sigma_1\sigma_4=\sigma_2\sigma_3$, 则 $I''(h)$ 有如下的表达式

$$\sigma_1\sigma_4=\sigma_2\sigma_3\begin{cases}\text{(a) } \sigma_2,\sigma_4\neq 0,\\ \qquad \text{则存在 } k, \text{使得 } I''(h)=(\sigma_3h+\sigma_4)I_0''[k+\omega(h)];\\ \text{(b) } \sigma_2=0,\sigma_4\neq 0,\\ \qquad \text{则 } I''(h)=(\sigma_3h+\sigma_4)I_0''\omega(h)=(\sigma_3h+\sigma_4)I_0''(0+\omega(h));\\ \text{(c) } \sigma_2=\sigma_4=0, \ \ \text{则 } I''(h)=\sigma_1hI_0''+\sigma_3hI_1''=h(\sigma_1I_0''+\sigma_3I_1'');\\ \text{(d) } \sigma_4=0,\sigma_2\neq 0, \ \ \text{则 } I''(h)=(\sigma_1h+\sigma_2)I_0''.\end{cases}$$

情形 (a–c) 属于 (i); 对情形 (d), $I''(h)$ 至多有一个孤立零点.

(iii) 首先, 假设当 $h\in\Sigma$ 时, $\sigma_3h+\sigma_4\neq 0$. 则由 (3.10) 式,

$$I''(h)=0\Longleftrightarrow\frac{\sigma_1h+\sigma_2}{\sigma_3h+\sigma_4}=-\omega(h)\Longleftrightarrow\begin{cases}y=-\omega(h),\\ y=\dfrac{\sigma_1h+\sigma_2}{\sigma_3h+\sigma_4}.\end{cases}\tag{3.20}$$

由定理 B, 方程 (3.20) 解的个数至多比下面方程组解的个数多 1:

$$\begin{cases}\omega'(h)=-\dfrac{\sigma_1\sigma_4-\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_3h+\sigma_4)^2},\\ \omega(h)=\dfrac{\sigma_1h+\sigma_2}{\sigma_3h+\sigma_4},\end{cases}\quad h\in\Sigma.\tag{3.21}$$

方程组 (3.21) 等价于

$$\begin{cases}G(h)\omega'(h)=G(h)\left[-\dfrac{\sigma_1\sigma_4-\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_3h+\sigma_4)^2}\right],\\ \omega(h)=\dfrac{\sigma_1h+\sigma_2}{\sigma_3h+\sigma_4},\end{cases}\quad h\in\Sigma.\tag{3.22}$$

令

$$f(h)=G(h)\omega'(h)+\frac{\sigma_1\sigma_4-\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_3h+\sigma_4)^2}G(h).\tag{3.23}$$

将 (2.15) 和 (3.22) 式的第二个方程代入 (3.23) 可得

$$\begin{aligned}f(h)=&\frac{1}{(\sigma_3h+\sigma_4)^2}\{-b_{01}(\sigma_1h+\sigma_2)^2-(b_{00}-b_{11})(\sigma_1h+\sigma_2)(\sigma_3h+\sigma_4)\\ &+b_{10}(\sigma_3h+\sigma_4)^2+(\sigma_1\sigma_4-\sigma_2\sigma_3)G(h)\}\\ =:&\frac{1}{(\sigma_3h+\sigma_4)^2}f_1(h).\end{aligned}$$

注意到 b_{ij} 和 $G(h)$ 分别是 h 的二次和三次多项式, $f_1(h)$ 是 h 的次数不超过 4 的多项式, 在 $h\in R$ 上至多有 4 个孤立零点. 于是 $I''(h)$ 在 $h\in\Sigma\cup\partial\Sigma$ 上至多有 5 个孤立零点. 由于 $I(h)$ 在 $\partial\Sigma$ 的两点总有一点等于零, 因此 $I(h)$ 当 $h\in\Sigma$ 时至多有 6 个孤立零点, 即

$$\sharp\{I(h)=0\ (h\in\Sigma)\}\leqslant 6.\tag{3.24}$$

其次, 假设存在 $\widetilde{h}\in\Sigma$, 使得 $\sigma_3\widetilde{h}+\sigma_4=0$. 若 $I''(\widetilde{h})\neq 0$, 令

$$\tilde{\Sigma}=\{(-\infty,\widetilde{h})\cup(\widetilde{h},\infty)\}\cap\Sigma.$$

则当 $h\in\tilde{\Sigma}$ 时, $\sigma_3h+\sigma_4\neq 0$, 且当 $h\in\tilde{\Sigma}$ 时 $I(h)$ 至多有 6 个孤立零点. 注意到 $I''(\widetilde{h})\neq 0$, 可知当 $h\in\Sigma$ 时, $I(h)$ 至多有 6 个孤立零点. 若 $I''(\widetilde{h})=0$, 由 $I_0''(h)\neq 0\ (h\in\Sigma)$ 知 $\sigma_1\widetilde{h}+\sigma_2=0$. 于是

$$\sigma_3\widetilde{h}+\sigma_4=0,\quad \sigma_1\widetilde{h}+\sigma_2=0,$$

这说明 $\sigma_3 h+\sigma_4$ 和 $\sigma_1 h+\sigma_2$ 有一个公因子. 由此引理的 (i) 知, $\sharp\{I(h)=0(h\in\Sigma)\}\leqslant l+2$. 证毕.

定理 1.1 (ii) 的证明

对情形 (A), 我们取文献 [1] 中的正规形

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2.$$

由文献 [11] 知 $h\in\Sigma=(0,1/4)$ 时, $Q'(h)>0$, 故由引理 3.1 知, $\sharp\{I(h)=0(h\in\Sigma)\}\leqslant 4$.

对情形 (B), 我们取文献 [1] 中的正规形

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{1}{4}x^4-\frac{\lambda-1}{3}x^3+\frac{\lambda}{2}x^2,\quad \lambda>1,\quad \Sigma=\left(0,\frac{2\lambda+1}{12}\right),$$

其中当 $h\downarrow 0$ 时 $\Gamma_h\downarrow$ 中心 $(0,0)$. 由文献 [1] 知, $\omega(h)$ 的单调区间数至多为 2. 注意到 $2b^2-9ac\neq 0$, 且当 $h\in\Sigma$ 时 $I_0''(h)\neq 0$, 故由引理 3.3 知 $\sharp\{I(h)=0(h\in\Sigma)\}\leqslant 6$.

对情形 (D), 我们取文献 [2] 中的正规形

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3,\quad \Sigma=\left(-\frac{1}{12},0\right)\cup(0,+\infty),$$

其中当 $h\downarrow -\frac{1}{12}$ 时, $\Gamma_h\downarrow$ 中心 $(-1,0)$. 由文献 [2] 知 $\omega(h)$ 的单调区间数至多为 3. 注意到 $2b^2-9ac\neq 0$, 且当 $h\in\Sigma$ 时 $I_0''(h)\neq 0$, 故由引理 3.3 知 $\sharp\{I(h)=0\ (h\in\Sigma)\}\leqslant 6$.

对情形 (E), 我们取文献 [4] 中的正规形

$$H(x,y)=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{4}x^4+\frac{1-\lambda}{3}x^3-\frac{\lambda}{2}x^2,\quad \lambda\in(0,1]. \tag{3.25}$$

Hamilton 函数 (3.25) 有 3 个临界值 h_1, h_2 和 0, 其中

$$h_1=-\frac{1}{12}(2\lambda+1),\quad h_2=-\frac{1}{12}\lambda^3(\lambda+2),\quad h_1\leqslant h_2.$$

分别以

$$\begin{aligned}
\Gamma_h^L&=\{(x,y)|H(x,y)=h,h\in(h_1,0),x<0\},\\
\Gamma_h^R&=\{(x,y)|H(x,y)=h,h\in(h_2,0),x>0\},\\
\Gamma_h^{L,R}&=\{(x,y)|H(x,y)=h,h\in(0,+\infty)\}
\end{aligned}$$

表示等位线的 3 类紧致分支, 则当 $h\downarrow h_1$ 时 $\Gamma_h^L\downarrow$ 中心 $(-1,0)$; 当 $h\downarrow h_2$ 时 $\Gamma_h^R\downarrow$ 中心 $(\lambda,0)$; 当 $h\downarrow 0$ 时 $\Gamma_h^{L,R}\downarrow\Gamma_0$, 其中 Γ_0 是通过鞍点 $(0,0)$ 且围绕中心 $(-1,0)$ 和 $(\lambda,0)$ 的双同宿轨.

若 $\lambda=1$, 则 $b=0$. 由文献 [11] 知, $Q(h)$ 在 $(-\frac{1}{4},0)\cup(0,+\infty)$ 上单调区间的个数为 2. 注意到 $2b^2-9ac\neq 0$, 且当 $h\in\Sigma$ 时 $I_0''(h)\neq 0$, 故由引理 3.1 知, $\sharp\{I(h)=0,h\in(h_1,0)\}\leqslant 8$.

若 $\lambda\in(0,1)$, 文献 [4] 已证 $\omega(h)$ 在 $h\in(h_1,0)$ 上严格增加, 且由文献 [15] 知 $h>0$ 时, $I_0''(h)\neq 0$. 注意到 $2b^2-9ac\neq 0$, 且仅考虑 Abel 积分围绕一个中心的情形, 故由引理 3.3 知 $\sharp\{I(h)=0,h\in(h_1,0)\}\leqslant 12$. 证毕.

4 定理 1.1(iii) 的证明

本节将证明如下结论.

定理 4.1 对情形 (B), 以下结论成立:

(i) 存在 $\lambda_0>1$, 使得 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时, 对任意 q_{ij} 和 $\varepsilon>0$, (X_ε) 在未扰动的同宿环附近至多有 3 个极限环;

(ii) 存在 $\lambda=\lambda^*$, $\varepsilon^*>0$ ($|\varepsilon^*|\ll 1$) 和 $q_{ij}^*\in\mathbb{R}$, 使得相应的向量场 (X_{ε^*}) 在原同宿环附近恰有 3 个极限环.

我们用文献 [1] 中的正规形, 即在 (1.4) 式中令 $a=-1$, $b=1-\lambda$, $c=\lambda$ ($\lambda>1$). 于是 (X_ε) 化为

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=x(x+\lambda)(x-1)+\varepsilon(q_{01}+q_{11}x+q_{21}x^2+q_{03}y^2)y,\end{cases}\tag{4.1}$$

且

$$\Gamma_h=\{(x,y)|H(x,y)=h,0<h<h_1\},\quad h_1=\frac{2\lambda+1}{12}.$$

同宿环 Γ 由 $H(x,y)=h_1$ 确定. 由文献 [16] 知, 对 h_1 附近的 h, $I(h)$ 有如下展式:

$$I(h)=c_1+c_2|h-h_1|\ln|h-h_1|+c_3|h-h_1|+c_4|h-h_1|^2\ln|h-h_1|+\cdots,\tag{4.2}$$

其中

$$\begin{aligned}&c_1=I(h_1),\\&c_2=\left(\frac{\partial P_3}{\partial x}+\frac{\partial Q_3}{\partial y}\right)\Big|_{(1,0)},\ 若\ c_1=0;\\&c_3=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial P_3}{\partial x}+\frac{\partial Q_3}{\partial y}\right)\Big|_{\Gamma}(x(t),y(t))dt,\ 若\ c_1=c_2=0;\\&c_4=V_1\quad(若\ c_1=c_2=c_3=0),是一阶鞍点量.\end{aligned}$$

定理 C[16] 若 $c_i=0$, $i=1,2,\ldots,k-1$, 但 $c_k\neq 0$, 则 (X_ε) 在 Γ 附近至多有 $k-1$ 条极限环.

4.1 计算 c_1 和 c_2

由于

$$I_i(h)=2\int_{x_l(h)}^{x_r(h)}x^iy_+(x,h)\ dx,\ h\in(0,h_1],\quad i=0,1,2;\tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}&x_l(h_1)=x^*=-\frac{2}{3}\lambda-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\lambda-1)(2\lambda+1)},\\&y_+(x,h_1)=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{f(x)},\\&f(x)=3(x-1)^2(x-x^*)(x-\tilde{x}),\\&\tilde{x}=-\frac{1}{3}\big[2\lambda+1+\sqrt{2(\lambda-1)(2\lambda+1)}\big],\end{aligned}$$

通过直接计算可得

$$I_i(h_1)=a_{i1}v_1+a_{i2}v_2+a_{i3}v_3+a_{i0},\quad i=0,1,2,$$

其中

$$v_1=\sqrt{2\lambda+2},\quad v_2=\ln(2\lambda+4+3\sqrt{2\lambda+2}),\tag{4.4}$$

$$v_3=\ln((\lambda-1)(2\lambda+1)),\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}&a_{21}=\frac{\sqrt{2}}{405}(70\lambda^4+65\lambda^3-54\lambda^2-43\lambda+16)\\&a_{22}=\frac{\sqrt{2}}{1701}(7\lambda+5+3\sqrt{2})(-7\lambda-5+3\sqrt{2})(\lambda-1)(2\lambda+1)^2;\end{aligned}$$

$$a_{23}=-\frac{1}{2}a_{22};\quad a_{20}=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{486}(\lambda-1)(7\lambda^2+10\lambda+1)(2\lambda+1)^2;$$
$$a_{11}=-\frac{\sqrt{2}}{54}(10\lambda^2+19\lambda+10)(\lambda-1);$$
$$a_{12}=\frac{\sqrt{2}}{162}(5\lambda+7)(\lambda-1)(2\lambda+1)^2;$$
$$a_{13}=-\frac{1}{2}a_{12};$$
$$a_{10}=-\frac{\sqrt{2}\ln 2}{324}(5\lambda+7)(\lambda-1)(2\lambda+1)^2;$$
$$a_{01}=\frac{2\sqrt{2}}{9}(\lambda^2+\lambda+1);$$
$$a_{02}=-\frac{2\sqrt{2}}{27}(\lambda+2)(2\lambda+1)(\lambda-1);$$
$$a_{03}=-\frac{1}{2}a_{02};$$
$$a_{00}=\frac{\sqrt{2}\ln 2}{27}(\lambda-1)(2\lambda+1)(\lambda+2).$$

代入 (2.6) 式, 得

$$\begin{aligned}c_1=&I_0(h_1)q_{01}+I_2(h_1)q_{21}+\frac{1}{5}[(I_1(h_1)-I_2(h_1))\lambda^2\\&+(2I_0(h_1)-I_1(h_1)-I_2(h_1))\lambda+(I_0(h_1)-I_2(h_1))]q_{03}+I_1(h_1)q_{11}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

容易看出

$$c_2=q_{01}+q_{11}+q_{21}.\tag{4.7}$$

4.2 计算 c_3

由于不容易得到 Γ 的参数化表达式, 我们将通过下面的方法来计算 c_3. 由 (4.2), 如果 $c_1=c_2=0$, 则

$$I'(h)=c_3+2c_4(h-h_1)\ln(h-h_1)+c_4(h-h_1)+\cdots,$$

从而 $c_3=I'(h_1)$. 注意到沿着 Γ_0, 有

$$\frac{y^2}{2}-\frac{1}{4}x^4-\frac{\lambda-1}{3}x^3+\frac{\lambda}{2}x^2=h_1,$$

于是 $y\cdot\frac{\partial y}{\partial h_1}=1$. 因此由 (4.3) 式,

$$\begin{aligned}I_i'(h_1)&=2\int_{x_l(h_1)}^{x_r(h_1)}\frac{x^i}{y_+(x,h_1)}dx\\&=2\sqrt{2}\int_{x^*}^{1}\frac{x^i}{(1-x)\sqrt{(x-x^*)(x-\tilde{x})}}dx,\end{aligned}\tag{4.8}$$

其中 $x_r(h_1)=1$, $x_l(h_1)=x^*$ 是 Γ 和 x 轴交点的横坐标. 由于

$$I'(h_1)=\alpha_1I_0(h_1)+(\alpha_1h_1+\alpha_2)I_0'(h_1)+\beta I_1'(h_1)+\gamma I_2'(h_1),$$

以及 $I_0(h_1)$ 已知, 我们只要计算

$$\Psi=(\alpha_1h_1+\alpha_2)I_0'(h_1)+\beta I_1'h_1)+\gamma I_2'(h_1).\tag{4.9}$$

把 (4.8) 代入 (4.9) 式, 则

$$\Psi=2\sqrt{2}\int_{x^*}^{1}\frac{\alpha_1h_1+\alpha_2+\beta x+\gamma x^2}{(1-x)\sqrt{(x-x^*)(x-\tilde{x})}}dx.\tag{4.10}$$

由引理 2.2,

$$\alpha_1 h_1+\alpha_2+\beta+\gamma=\left[\frac{bc}{5a}+\frac{b^2-3ac}{5a}+\frac{12}{5}h_1\right]q_{03}.$$

注意到 $a=-1$, $b=1-\lambda$, $c=\lambda$ 和 $c_2=0$, 从而

$$\frac{bc}{5a}+\frac{b^2-3ac}{5a}+\frac{12}{5}\cdot\frac{2\lambda+1}{12}\equiv 0$$

且

$$\alpha_1 h_1+\alpha_2+\beta x+\gamma x^2=(x-1)[\gamma x-(\alpha_1 h_1+\alpha_2)].$$

于是 (4.10) 式是正常积分, 计算可得

$$\begin{aligned}\Psi=\frac{\sqrt{2}}{15}&[-30\sqrt{2\lambda+2}q_{21}+10q_{21}\ln(4+2\lambda+3\sqrt{2\lambda+2})+4q_{03}\ln(4+2\lambda+3\sqrt{2\lambda+2})\\&-5\ln((\lambda-1)(2\lambda+1))q_{21}+6\sqrt{2\lambda+2}q_{03}-5\ln(2)q_{21}+30q_{01}\ln(4+2\lambda+3\sqrt{2\lambda+2})\\&-2q_{03}\ln((\lambda-1)(2\lambda+1))-2q_{03}\ln(2)-15q_{01}\ln((\lambda-1)(2\lambda+1))+3\lambda^2\ln((\lambda-1)\\&\cdot(2\lambda+1))q_{03}+2\lambda^3\ln((\lambda-1)(2\lambda+1))q_{03}-10\lambda\ln((\lambda-1)(2\lambda+1))q_{21}+6\sqrt{2\lambda+2}q_{03}\lambda\\&+6\sqrt{2\lambda+2}q_{03}\lambda^2-3q_{03}\ln(2)\lambda-3q_{03}\ln((\lambda-1)(2\lambda+1))\lambda+3\lambda^2\ln(2)q_{03}\\&+2\lambda^3\ln(2)q_{03}-10\lambda\ln(2)q_{21}-15q_{01}\ln(2)-6q_{03}\lambda^2\ln(4+2\lambda+3\sqrt{2\lambda+2})\\&+20\lambda q_{21}\ln(4+2\lambda+3\sqrt{2\lambda+2})-4q_{03}\lambda^3\ln(4+2\lambda+3\sqrt{2\lambda+2})\\&+6q_{03}\lambda\ln(4+2\lambda+3\sqrt{2\lambda+2})].\end{aligned}$$

为简便, 令

$$b_1=q_{01},\ b_2=q_{21},\ b_3=q_{03},\ b_4=q_{11}, \tag{4.11}$$

于是 c_3 可以表示为

$$c_3=I'(h_1)=2\sqrt{6}(z_1b_1+z_2b_2+z_3b_3)-\frac{12}{5}I_0b_3, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}z_1&=-\frac{\sqrt{3}}{6}(-2v_2+v_3+\ln 2);\\z_2&=-\frac{\sqrt{3}}{18}(6v_1-(2+4\lambda)v_2+(1+2\lambda)v_3+(1+2\lambda)\ln 2);\\z_3&=\frac{\sqrt{3}}{15}\left[(\lambda^2+\lambda+1)v_1-\frac{1}{3}(\lambda+2)(2\lambda+1)(\lambda-1)v_2+\frac{1}{6}(\lambda+2)(2\lambda+1)(\lambda-1)v_3\right].\end{aligned}$$

4.3 计算 c_4

引理 4.1[17] 对于向量场

$$\dot{x}=y+f(x,y),\quad \dot{y}=x+g(x,y),$$

其中 $f(0,0)=g(0,0)$, 第一阶鞍点量由下式给出:

$$\begin{aligned}V_1=&[f_{xxx}-f_{xyy}+g_{xxy}-g_{yyy}+f_{xy}(f_{yy}-f_{xx})\\&+g_{xy}(g_{yy}-g_{xx})-f_{xx}g_{xx}+f_{yy}g_{yy}]|_{(0,0)}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

令 $u=x-1$, $v=y$, 则方程组 (4.1) 化为

$$\begin{cases}\dot{u}=v,\\\dot{v}=(u+1)(u+1+\lambda)u+\varepsilon[b_1+b_4(u+1)+b_2(u+1)^2]v+\varepsilon b_3v^3.\end{cases} \tag{4.14}$$

由于 $c_2=0$, 方程组 (4.14) 可以表示为

$$\begin{cases}\dot{u}=v,\\ \dot{v}=(\lambda+1)u+(2+\lambda)u^2+u^3+\varepsilon(b_4u+2b_2u+b_2u^2)v+\varepsilon b_3v^3.\end{cases}\tag{4.15}$$

令 $\xi=u,\eta=\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}v$, $\tau=\sqrt{\lambda+1}\,t$, 则方程组 (4.15) 化为

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\eta,\quad \frac{d\eta}{d\tau}=\xi+\frac{1}{\lambda+1}g(\xi,\sqrt{\lambda+1}\,\eta),\tag{4.16}$$

其中

$$\begin{aligned}&g(\xi,\sqrt{\lambda+1}\,\eta)=(2+\lambda)\xi^2+\xi^3+\varepsilon(b_4\xi+2b_2\xi+b_2\xi^2)\sqrt{\lambda+1}\,\eta\\&+\varepsilon b_3(\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}\,\eta^3.\end{aligned}$$

注意到 $\varepsilon>0$ 和 $\lambda>1$, 由 (4.13) 式, 有

$$c_4=-2\frac{\lambda+2}{\lambda+1}b_4+\left[2-\frac{4(\lambda+2)}{\lambda+1}\right]b_2+(-6\lambda-6)b_3.\tag{4.17}$$

4.4 定理 4.1 的证明

(i) 由 (4.6), (4.7), (4.12) 和 (4.17) 式可以看出 c_i $(i=1,2,3,4)$ 可以由 b_1,b_2,b_3 和 b_4 线性表示. 考虑变量为 b_1,b_2,b_3, b_4 的线性方程组

$$c_1=c_2=c_3=c_4=0,\tag{4.18}$$

并用 $\det(\lambda)$ 表示此方程组的系数行列式, 直接计算可得

$$\begin{aligned}&4920750(\lambda+1)^4\det(\lambda)\\
&=33600(v_3-2v_2+\ln 2)^2\lambda^{11}+67200(v_3-2v_2+\ln 2)(4\ln 2+3v_1-8v_2+4v_3)\lambda^{10}\\
&\quad+\Big[4166400v_2^2-4166400v_2v_3-3024000v_2v_1+1041600v_3^2+1512000v_3v_1+302400v_1^2\\
&\qquad-4166400\ln 2v_2+2083200\ln 2v_3+1512000\ln 2v_1+1041600(\ln 2)^2\Big]\lambda^9\\
&\quad+\Big[8668800v_2^2-8668800v_2v_3-7570080v_2v_1+2167200v_3^2+3785040v_3v_1+2116800v_1^2\\
&\qquad-8668800\ln 2v_2+4334400\ln 2v_3+3785040\ln 2v_1+2167200(\ln 2)^2\Big]\lambda^8\\
&\quad+\Big[6476400v_2^2-6476400v_2v_3-381600v_2v_1+1619100v_3^2+190800v_3v_1+2056320v_1^2\\
&\qquad-6476400\ln 2v_2+3238200\ln 2v_3+190800\ln 2v_1+1619100(\ln 2)^2\Big]\lambda^7\\
&\quad+\Big[-8668800v_2^2+8668800v_2v_3+35751960v_2v_1-2167200v_3^2-17875980v_3v_1\\
&\qquad-15840360v_1^2+8668800\ln 2v_2-4334400\ln 2v_3-17875980\ln 2v_1-2167200(\ln 2)^2\Big]\lambda^6\\
&\quad+\Big[-21294000v_2^2+21294000v_2v_3+77717520v_2v_1-5323500v_3^2-38858760v_3v_1\\
&\qquad-54152280v_1^2+21294000\ln 2v_2-10647000\ln 2v_3-38858760\ln 2v_1-5323500(\ln 2)^2\Big]\lambda^5\\
&\quad+\Big[-12247200v_2^2+12247200v_2v_3+74007720v_2v_1-3061800v_3^2-37003860v_3v_1\\
&\qquad-75250080v_1^2+12247200\ln 2v_2-6123600\ln 2v_3-37003860\ln 2v_1-3061800(\ln 2)^2\Big]\lambda^4\\
&\quad+\Big[5821200v_2^2-5821200v_2v_3+29966400v_2v_1+1455300v_3^2-14983200v_3v_1\\
&\qquad-55721520v_1^2-5821200\ln 2v_2+2910600\ln 2v_3-14983200\ln 2v_1+1455300(\ln 2)^2\Big]\lambda^3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big[10449600v_2^2-10449600v_2v_3-425880v_2v_1+2612400v_3^2+212940v_3v_1\\
&\quad-24480360v_1^2-10449600\ln 2v_2+5224800\ln 2v_3+212940\ln 2v_1+2612400(\ln 2)^2\Big]\lambda^2\\
&+\Big[4695600v_2^2-4695600v_2v_3-3501360v_2v_1+1173900v_3^2+1750680v_3v_1\\
&\quad-7258680v_1^2-4695600\ln 2v_2+2347800\ln 2v_3+1750680\ln 2v_1+1173900(\ln 2)^2\Big]\lambda\\
&+722400v_2^2-722400v_2v_3-583560v_2v_1+180600v_3^2+291780v_3v_1-1319760v_1^2\\
&\quad-722400\ln 2v_2+361200\ln 2v_3+291780\ln 2v_1+180600(\ln 2)^2.
\end{aligned}
$$

令

$$4920750(\lambda+1)^4\det(\lambda):=\sum_{i=0}^{11}\eta_i\lambda^i=\lambda^{11}\left(\eta_{11}+\sum_{i=0}^{10}\frac{\eta_i\lambda^i}{\lambda^{11}}\right),$$

其中

$$\eta_{11}=33600(v_3-2v_2+\ln 2)^2.$$

由 (4.4), (4.5) 式可得 $\lim_{\lambda\to+\infty}(v_3-2v_2)=0$, 以及

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\eta_{11}=33600(\ln 2)^2,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\eta_i\lambda^i}{\lambda^{11}}=0\ (i=0,1,\dots,10).$$

因此, 存在 $\lambda_0>1$, 使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有 $\det(\lambda)>0$. 因为 $(b_1,b_2,b_3,b_4)\neq 0$, 故对 $\lambda>\lambda_0$, (X_ε) 在同宿环 Γ 附近至多有 3 个极限环.

(ii) 令 $\lambda^*=7$. 于是

$$
\begin{aligned}
&c_1=-32.892b_1-1389.4b_2+17526b_3+211.96b_4,\\
&c_2=-41.24127447b_2+532.8347318b_3+7.444120151b_4,\ \text{若}\ c_1=0,\\
&c_3=53.676934b_3-3.01069714b_4,\ \text{若}\ c_1=c_2=0,\\
&c_4=-7.205209670b_4,\ \text{若}\ c_1=c_2=c_3=0.
\end{aligned}
$$

如果下列不等式成立, 则 Γ 恰好分支出 3 个极限环:

$$c_4<0,\quad c_3>0,\quad c_2<0,\quad c_1<0,\quad |c_1|\ll|c_2|\ll|c_3|\ll|c_4|. \tag{4.19}$$

容易看出, 存在 b_i^*, $i=1,2,3,4$, 使得不等式组 (4.19) 成立, 故当 $(b_1,b_2,b_3,b_4)=(b_1^*,b_2^*,b_3^*,b_4^*)$, $0<\varepsilon\ll 1$ 时, (X_ε) 在 Γ 附近恰有 3 个极限环. 证毕.

致谢 作者衷心感谢张芷芬教授和李承治教授的有益讨论, 同时也衷心感谢审稿专家提出的宝贵意见和建议.

参考文献

1 Dumortier F, Li C. Perturbations from an elliptic Hamiltonian of degree four: I. Saddle loop and two saddle cycle. *J Differential Equations*, **176**: 114–157 (2001)

2 Dumortier F, Li C. Perturbations from an elliptic Hamiltonian of degree four: II. Cuspidal Loop. *J Differential Equations*, **175**: 209–243 (2001)

3 Dumortier F, Li C. Perturbation from an elliptic Hamiltonian of degree four: III global center. *J Differential Equations*, **188**: 473–511 (2003)

4 Dumortier F, Li C. Perturbation from an elliptic Hamiltonian of degree four: IV figure eight-loop. *J Differential Equations*, **188**: 512–554 (2003)

5 Zhao Y, Zhang Z. Linear Estimate of the Number of Zeros of Abelian Integrals for a Kind of Quartic Hamiltonians. *J Differential Equations*, **155**: 73–88 (1999)

6 Liu C. Estimate of the number of zeros of Abelian integrals for an elliptic Hamiltonian with figure-of-eight loop. *Nonlinearity*, **16**: 1151–1163 (2003)

7 Petrov G S. Complex zeros of an elliptic integral. *Funct Anal Appl*, **21**: 160–161 (1987)

8 Petrov G S. Complex zeros of an elliptic integral. *Funct Anal Appl*, **23**: 247–248 (1989)

9 Petrov G S. Nonoscillation of elliptic integrals. *Funct Anal Appl*, **24**: 45–50 (1990)

10 Rousseau C, Zoladek H. Zeroes of complete elliptic integrals for 1:2 resonance. *J Differential Equations*, **94**: 42–54 (1991)

11 Chow S N, Li C, Wang D. Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields. Cambridge: Cambridge University Press, 1994

12 Dumortier F, Morsalani M El, Rousseau C. Hilbert's 16th problem for quadratic systems and cyclicity of elementary graphics. *Nonlinearity*, **9**: 1209–1261 (1996)

13 Morsalani M El, Mourtada A. Degenerate and non-trivial hyperbolic 2-polycycles: appearance of two independant Ecalle-Roussarie compensators and Khovanskii's theory. *Nonlinearity*, **7**: 1593–1604 (1994)

14 Zhu H, Rousseau C. Finite cyclicity of graghics with a nilpotent singularity of saddle or elliptic type. *J Differential Equations*, **178**: 325–436 (2002)

15 Gavrilov L. Remark on the number of critical points of the period. *J Differential Equations*, **101**: 58–65 (1993)

16 Roussarie R. On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields. *Bol Soc Bras Mat*, **17**: 67–101 (1986)

17 Joyal P, Rousseau C. Saddle quantities and applications. *J Differential Equations*, **78**: 374–399 (1989)