

自协方差非平稳时间序列的时变参数自回归模型

费万春*, 白伦

苏州大学纺织与服装工程学院, 苏州 215021

* E-mail: feiwch@suda.edu.cn

收稿日期: 2006-08-08; 接受日期: 2008-08-05

教育部博士点研究基金 (批准号: 20040285008) 和日本文部科学省科学研究补助金 (批准号: 基盘 (2) 17300228) 资助项目

摘要 对一簇时间序列明确定义了自协方差非平稳时间序列. 对于自协方差非平稳时间序列, 提出了用于自协方差非平稳时间序列的 3 种时变参数自回归 (TVPAR) 模型: 满阶 TVPAR 模型、非时变阶次 TVPAR 模型和时变阶次 TVPAR 模型. 并进行了有关的最小赤池信息量准则 (AIC) 估计.

关键词 自协方差非平稳时间序列 时变参数 时变阶次 自回归模型 最小 AIC 估计

MSC(2000) 主题分类 37M10, 68Q10

1 引言

在时间序列分析中, 有几种非平稳时间序列. 已经有人研究过趋势部分随时间变化的非平稳时间序列 [1]. 有人为时间序列定义了方差平稳性 [2]. 也有人称具有时变频率的时间序列为非平稳的 [3]. 人们已经关注到, 在非平稳时间序列中, 趋势、方差、频谱结构、和/或自回归阶次是随时点变化的 [4-7], 并进行研究.

本文着重研究自协方差非平稳时间序列.

为分析有限长度时间序列, 有人提出了阶梯式 AR(自回归) 模型 [8]. 用这种阶梯式 AR 模型对茧丝纤度曲线进行了模拟生成 [9]. 继阶梯式 AR 模型之后, (满阶) TVPAR (时变参数自回归) 被提出, 用于分析有限长度自协方差非平稳时间序列 [10]. 用 TVPAR 模型对茧丝纤度序列进行了较精确地模拟生成 [11]. TVPAR 模型还可以用来对有限长度非平稳时间序列进行模式识别 [12]. TVPAR 模型不仅与阶梯式 AR 模型和时变系数自回归模型不同 [13], 也与 TVAR (time varying AR) 模型 [14] 不同. 在 TVAR(p) 模型中, 其阶次是非时变的, 而在 TVAR(p_t) 模型中, 误差项的方差是非时变的.

在本研究中, 对满阶 TVPAR 模型进行分析之后, 提出了非时变阶次的和时变阶次的 TVPAR 模型, 用于分析具有较长长度的自协方差非平稳时间序列, 进行了有关的最小 AIC

估计. 最后, 我们给出一些结论.

2 自协方差非平稳时间序列的定义

考虑一时间序列簇 $\{y_{i,t}\}$, 在各时间点观测值是独立的, $i = 1, 2, \dots, I$, 其中 I 为取样的序列数, 在统计意义上充分大, $t = 0, 1, \dots, T$, 其中 T 为一正整数. 这里, 我们不讨论实际应用中 I 取多大的问题, 这与实际的时间序列值的偏差有关. 在关于茧丝纤度序列的实际应用中, I 为 50. 在时间点 t 的平均值可用下式统计得到:

$$\mu_t = E y_{\bullet,t} = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I y_{i,t}.$$

其自协方差由下式得到:

$$c_{t,\tau} = E(y_{\bullet,t} - \mu_t)(y_{\bullet,\tau} - \mu_\tau) = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (y_{i,t} - \mu_t)(y_{i,\tau} - \mu_\tau),$$

其中 $t, \tau = 0, 1, \dots, T$. 不失一般性, 设 $\mu_t = \mu_\tau = \mu = 0$, 如果 $t \neq \tau$, 则通常有

$$c_{t,t+h} \neq c_{\tau,\tau+h} \quad (t, \tau, t+h, \tau+h = 0, 1, \dots, T),$$

定义这种序列为自协方差非平稳时间序列. 如图 1 所示为一自协方差非平稳时间序列的实例, 它是某一蚕茧庄口茧丝纤度序列中的随机波动部分, 测量单位是旦尼尔^[10], 其自协方差如图 2 所示.

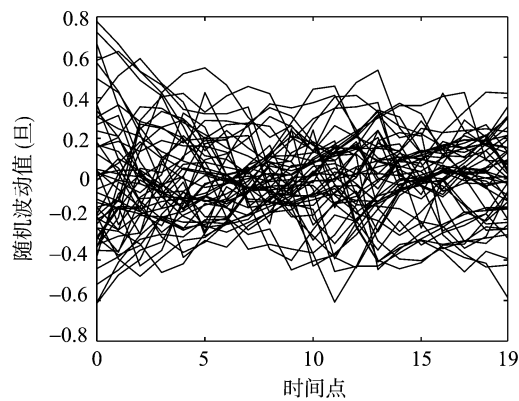


图 1 自协方差非平稳时间序列的一个例子

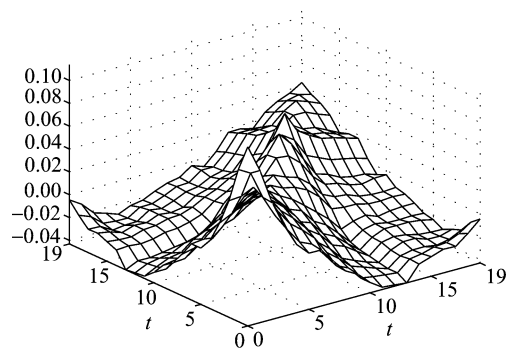


图 2 图 1 所示时间序列的自协方差

3 满阶 TVPAR 模型

为了分析有限长度自协方差非平稳时间序列, 提出了满阶 TVPAR 模型^[10].

对于上一节给出的零均值自协方差非平稳时间序列 $\{z_{i,t}\}$, 在各时间点的均值为零, 其满阶 TVPAR 模型如式 (1) 所示,

$$\text{TVPAR}(T): z_{i,t} = \begin{cases} \varepsilon_{i,0}, & t = 0, \\ \sum_{k=1}^t \varphi_{k,t} z_{i,t-k} + \varepsilon_{i,t}, & t = 1, 2, \dots, T, \end{cases} \quad (1)$$

其中 AR 系数 $\varphi_{k,t}$ 和误差项 $\varepsilon_{i,t}$ 的方差都随时间点 t 变化. 误差项 $\varepsilon_{i,t}$ 是均值为零、方差有限的白噪音. 该模型不仅与阶梯式 AR 模型和时变系数自回归模型不同, 而且与 TVAR 模型不同. 白噪音 $\varepsilon_{i,t} \sim N\{0, D\varepsilon_t\}$, 与前面的值 $z_{i,t-k}$ ($k = 1, 2, \dots, t$) 不相关, 由概率论, $D\varepsilon_0$ 和 $D\varepsilon_t$ 由下面的式子给出:

$$D\varepsilon_0 = Dz_0 = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I z_{i,0}^2, \\ D\varepsilon_t = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^t \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (2)$$

由最小二乘法, 使得 $D\varepsilon_t$ 最小, 可以得到时变 AR 系数 $\varphi_{k,t}$, 因此令

$$\frac{\partial D\varepsilon_t}{\partial \varphi_{k,t}} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, t, t = 1, 2, \dots, T),$$

于是, 由式 (3) 可以得到时变 AR 系数的估计量 $\hat{\varphi}_{k,t}$,

$$\begin{pmatrix} c_{t-1,t-1} & c_{t-2,t-1} & \cdots & c_{0,t-1} \\ c_{t-1,t-2} & c_{t-2,t-2} & \cdots & c_{0,t-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t-1,0} & c_{t-2,0} & \cdots & c_{0,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{1,t} \\ \hat{\varphi}_{2,t} \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{t,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{t-1,t} \\ c_{t-2,t} \\ \vdots \\ c_{0,t} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

其中

$$c_{t-k,t-\nu} = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I z_{i,t-k} z_{i,t-\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, t).$$

然后, 将 $\hat{\varphi}_{k,t}$ 代入式 (2), 其误差方差的估计量 $\hat{D}\varepsilon_t$ 可由式 (4) 得到,

$$\hat{D}\varepsilon_t = c_{t,t} - \sum_{k=1}^t \hat{\varphi}_{k,t}^2 Dz_{t-k} - 2 \sum_{\nu=1}^{t-1} \sum_{k=1+\nu}^t \hat{\varphi}_{\nu,t} \hat{\varphi}_{k,t} c_{t-k,t-\nu}, \quad (4)$$

其中

$$Dz_{t-k} = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I z_{i,t-k}^2.$$

对于零均值自协方差非平稳时间序列 $\{z_{i,t}\}$ ($t = 0, 1, \dots, T$), 所有模拟生成的时间序列 $\{z'_{i,t}\}$ 的自协方差 $c'_{t,\tau}$, 与原序列 $\{z_{i,t}\}$ 的自协方差 $c_{t,\tau}$ 相等, 即,

$$c_{t,\tau} = c'_{t,\tau}, \quad c_{t,t} = c'_{t,t} \quad (t, \tau = 0, 1, \dots, T), \quad (5)$$

如果采用满阶 TVPAR 模型进行模拟生成^[10].

4 非时变阶次 TVPAR 模型及其 AIC 分析

对于上面描述的零均值自协方差非平稳时间序列 $\{z_{i,t}\}$, 非时变阶次 TVPAR 模型表示为式 (6), 即当前时间点上的序列值可以表示为两部分之和, 一部分与过去时间点的序列值线性依存, 另一部分与过去时间点的序列值非线性依存.

$$\text{TVPAR}(p): z_{i,t} = \begin{cases} \varepsilon_{i,0}, & t = 0, \\ \sum_{k=1}^q \varphi_{k,t} z_{i,t-k} + \varepsilon_{i,t}, & t = 1, 2, \dots, T; q = \min(t, p), \end{cases} \quad (6)$$

其中 p 是该 TVPAR 模型的非时变阶次, 通常小于 $[T/2]$. 其中的 AR 系数 $\varphi_{k,t}$ 和误差项 $\varepsilon_{i,t}$ 的方差都随时间点 t 变化. $\varepsilon_{i,t}$ 是一白噪音, $\varepsilon_{i,t} \sim N\{0, D\varepsilon_t\}$. 假设 $\varepsilon_{i,0}$ 为一已知值, 则 $z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,T}$ 的似然函数为

$$L(\varphi_{1,t}, \dots, \varphi_{q,t}, D\varepsilon_t) = \prod_{t=1}^T f(z_{i,t} | z_{i,t-q}, \dots, z_{i,t-1}),$$

其中, $f(z_{i,t} | z_{i,t-q}, \dots, z_{i,t-1})$ 为正态分布的密度函数, 其平均值为 $\sum_{k=1}^q \varphi_{k,t} z_{i,t-k}$, 其方差为 $D\varepsilon_t$, 该密度函数可表示为

$$f(z_{i,t} | z_{i,t-q}, \dots, z_{i,t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\varepsilon_t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2D\varepsilon_t} \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^q \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2 \right\}.$$

因此, TVPAR(p) 模型的第 i 序列的似然函数为

$$L_i(\varphi_{k,t}, D\varepsilon_t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{T/2} \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{D\varepsilon_t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{D\varepsilon_t} \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^q \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2 \right\}.$$

TVPAR(p) 模型的第 i 序列和所有 I 个序列的对数似然函数由下面两个式子给出:

$$\begin{aligned} l_i(\varphi_{k,t}, D\varepsilon_t) &= -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln D\varepsilon_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{D\varepsilon_t} \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^q \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2, \\ l(\varphi_{k,t}, D\varepsilon_t) &= -\frac{IT}{2} \ln 2\pi - \frac{I}{2} \sum_{t=1}^T \ln D\varepsilon_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{1}{D\varepsilon_t} \sum_{i=1}^I \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^q \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

我们令

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \varphi_{k,t}} &= \sum_{i=1}^I z_{i,t-k} \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^q \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right) = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial D\varepsilon_t} &= -\frac{I}{2D\varepsilon_t} + \frac{1}{2(D\varepsilon_t)^2} \sum_{i=1}^I \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^q \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

在某一时间点 t 的极大似然估计值 $\hat{\varphi}_{1,t}, \dots, \hat{\varphi}_{q,t}$ 可由下式求得:

$$\begin{pmatrix} c_{t-1,t-1} & c_{t-2,t-1} & \cdots & c_{t-q,t-1} \\ c_{t-1,t-2} & c_{t-2,t-2} & \cdots & c_{t-q,t-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t-1,t-q} & c_{t-2,t-q} & \cdots & c_{t-q,t-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{1,t} \\ \hat{\varphi}_{2,t} \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{q,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{t-1,t} \\ c_{t-2,t} \\ \vdots \\ c_{t-q,t} \end{pmatrix}.$$

同时极大似然估计值 $\hat{D}\varepsilon_t$ 为

$$\hat{D}\varepsilon_t = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^q \hat{\varphi}_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2. \tag{8}$$

将式 (8) 代入式 (7), 其对数极大似然值可由式 (9) 表示,

$$l(\hat{\varphi}_{k,t}, \hat{D}\varepsilon_t) = -\frac{IT}{2}(1 + \ln 2\pi) - \frac{I}{2} \sum_{t=1}^T \ln \hat{D}\varepsilon_t. \tag{9}$$

在 TVPAR(p) 模型中有 $T + p \{2T - (p - 1)\} / 2$ 个估计的参数. 因而可以用下式计算 AIC(p):

$$\begin{aligned} \text{AIC}(p) &= -2l(\hat{\varphi}_{k,t}, \hat{D}\varepsilon_t) + 2T + p(2T + 1 - p) \\ &= IT(1 + \ln 2\pi) + 2T + I \sum_{t=1}^T \ln \hat{D}\varepsilon_t + p(2T + 1 - p). \end{aligned}$$

在实际的阶次选择中, 可用下式计算 AIC(p):

$$\text{AIC}(p) = I \sum_{t=1}^T \ln \hat{D}\varepsilon_t + p(2T + 1 - p).$$

如果序列长度较长 ($T \gg p$)、序列是平稳的、各态历经的, 并且满足

$$\hat{D}\varepsilon_1 = \hat{D}\varepsilon_2 = \dots = \hat{D}\varepsilon_T = \hat{\sigma}^2,$$

对于给定的该种序列簇中某单一序列, 可以认为这种模型的参数个数为 $p + 1$. 因此有,

$$\text{AIC}(p) = T(\ln 2\pi + 1) + T \ln \hat{\sigma}^2 + 2(p + 1). \tag{10}$$

式 (10) 就是为人熟知的单一平稳时间序列的 AIC 公式.

根据上述分析, 作为一个例子, 如图 1 所示的时间序列的 TVPAR(p) 模型的 AIC(p) 算得后列于表 1, 如图 3 所示, 其 AR 阶次 p 应该选为 1 与 $[T/2]$ 之间的 3. 我们进而对 8 个自协方差非平稳时间序列用 TVPAR(p) 模型进行了分析, 其结果验证了该模型的有效性.

表 1 图 1 所示时间序列的 TVPAR(p) 模型的 AIC(p) 值

p	1	2	3	4	5	6	7	...	18	19
AIC(p) ($-10^3 \times$)	4.266	4.301	4.302	4.280	4.282	4.259	4.242	...	3.294	6.362

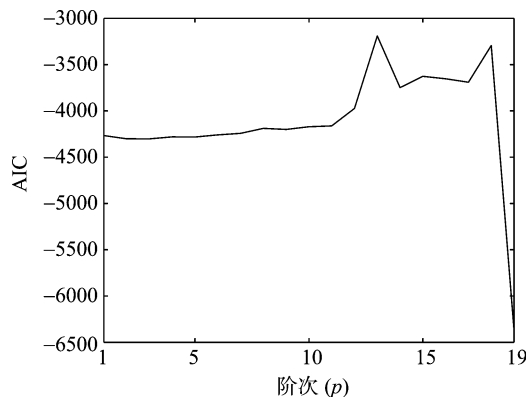


图 3 图 1 所示时间序列的 TVPAR(p) 模型的 AIC(p) 值

其实, 如果 $p = T$, TVPAR(p) 模型将成为 TVPAR(T) 模型. 如果使用 TVPAR(p) 模型 ($p = 1, 2, \dots, T-1$) 对自协方差非平稳时间序列进行模拟生成, 那么^[10]

$$c_{t,t+\nu} = c'_{t,t+\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, q; \quad t, t+\nu = 0, 1, \dots, T.$$

5 时变阶次 TVPAR 模型及其 AIC 分析

对于上述的零均值自协方差非平稳时间序列 $\{z_{i,t}\}$, 时变阶次 TVPAR 模型如式 (11) 所示, 即, 当前时间点的序列值可表示为两部分之和, 一部分与过去时间点的序列值线性依存, 另一部分与过去时间点的序列值非线性依存.

$$\text{TVPAR}(p_t): \quad z_{i,t} = \begin{cases} \varepsilon_{i,0}, & t = 0, \\ \sum_{k=1}^{p_t} \varphi_{k,t} z_{i,t-k} + \varepsilon_{i,t}, & t = 1, 2, \dots, T; p_t \leq t, \end{cases} \quad (11)$$

其中, p_t 是该 TVPAR 模型的时变 AR 阶次, 通常小于 $[T/2]$, 其中的 AR 系数 $\varphi_{k,t}$ 和误差项 $\varepsilon_{i,t}$ 的方差都随时间点 t 变化. $\varepsilon_{i,t}$ 是一白噪音, $\varepsilon_{i,t} \sim N\{0, D\varepsilon_t\}$. 假设 $\varepsilon_{i,0}$ 为一已知值, 则 $z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,T}$ 的似然函数为

$$L(\varphi_{1,t}, \dots, \varphi_{p_t,t}, D\varepsilon_t) = \prod_{t=1}^T f(z_{i,t} | z_{i,t-p_t}, \dots, z_{i,t-1}),$$

其中, $f(z_{i,t} | z_{i,t-p_t}, \dots, z_{i,t-1})$ 为正态分布的密度函数, 其平均值为 $\sum_{k=1}^{p_t} \varphi_{k,t} z_{i,t-k}$, 方差为 $D\varepsilon_t$, 该密度函数可表示为

$$f(z_{i,t} | z_{i,t-p_t}, \dots, z_{i,t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D\varepsilon_t}} \exp \left\{ -\frac{1}{2 D\varepsilon_t} \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^{p_t} \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2 \right\}.$$

因此, TVPAR(p_t) 模型在这种时间序列簇的所有 I 序列的时间点 t 的似然函数为

$$L_t(\varphi_{k,t}, D\varepsilon_t) = \left(\frac{1}{2\pi D\varepsilon_t} \right)^{I/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2 D\varepsilon_t} \sum_{i=1}^I \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^{p_t} \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2 \right\}.$$

TVPAR(p_t) 模型在所有 I 序列的时间点 t 的对数似然函数由式 (12) 给出.

$$l_t(\varphi_{k,t}, D\varepsilon_t) = -\frac{I}{2} \ln 2\pi D\varepsilon_t - \frac{1}{2 D\varepsilon_t} \sum_{i=1}^I \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^{p_t} \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2. \quad (12)$$

我们令

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t}{\partial \varphi_{k,t}} &= \sum_{i=1}^I z_{i,t-k} \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^{p_t} \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right) = 0, \\ \frac{\partial l_t}{\partial D\varepsilon_t} &= -\frac{I}{2 D\varepsilon_t} + \frac{1}{2(D\varepsilon_t)^2} \sum_{i=1}^I \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^{p_t} \varphi_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

对于给定的时间点 t , 其极大似然估计值 $\hat{\varphi}_{1,t}, \dots, \hat{\varphi}_{p_t,t}$ 可以由下式得到:

$$\begin{pmatrix} c_{t-1,t-1} & c_{t-2,t-1} & \cdots & c_{t-p_t,t-1} \\ c_{t-1,t-2} & c_{t-2,t-2} & \cdots & c_{t-p_t,t-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t-1,t-p_t} & c_{t-2,t-p_t} & \cdots & c_{t-p_t,t-p_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{1,t} \\ \hat{\varphi}_{2,t} \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{p_t,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{t-1,t} \\ c_{t-2,t} \\ \vdots \\ c_{t-p_t,t} \end{pmatrix}.$$

同时, 极大似然估计值 $\hat{D}\varepsilon_t$ 为

$$\hat{D}\varepsilon_t = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left(z_{i,t} - \sum_{k=1}^{p_t} \hat{\varphi}_{k,t} z_{i,t-k} \right)^2. \quad (13)$$

将式 (13) 代入式 (12), 可得对数极大似然值:

$$l(\hat{\varphi}_{k,t}, \hat{D}\varepsilon_t) = -\frac{I}{2}(1 + \ln 2\pi) - \frac{I}{2} \ln \hat{D}\varepsilon_t.$$

在 TVPAR(p_t) 模型中, 有 $p_t + 1$ 个估计的参数, 其 AIC(p_t) 由下式计算得到:

$$\begin{aligned} \text{AIC}(p_t) &= -2l(\hat{\varphi}_{k,t}, \hat{D}\varepsilon_t) + 2(p_t + 1) \\ &= I(1 + \ln 2\pi) + 2 + I \ln \hat{D}\varepsilon_t + 2p_t. \end{aligned}$$

在实际的阶次选择中, 其 AIC(p_t) 可由下式计算:

$$\text{AIC}(p_t) = I \ln \hat{D}\varepsilon_t + 2p_t.$$

作为一个例子, 如图 1 所示的时间序列, 其 TVPAR(p_t) 模型的从 1 到 8 选择的时变阶次 p_t , 如表 2 所示, 其 p_t 的平均值大约为 3. 可以认为, TVPAR(p) 模型是 TVPAR(p_t) 模型的特例.

表 2 图 1 所示的时间序列的 TVPAR(p_t) 模型的 AIC(p_t) 值

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
p_t	1	2	3	2	2	1	2	6	6	4	4	6	7	3	1	1	1	2	2

6 讨论

1. 我们提出了 3 种 TVPAR 模型, 并进行了分析, 在分析自协方差非平稳时间序列时, 这些 TVPAR 模型有各自的效用.

2. 当对自协方差特别需要高精度时, 应该选用满阶 TVPAR 模型, 来分析只有较短长度的自协方差非平稳时间序列. 在工程应用中该模型的不足是, 随着时间序列的长度增大, 会有太多的参数和计算影响模型的实用.

3. 有必要在实际应用中使用非时变阶次 TVPAR 模型和时变阶次 TVPAR 模型, 而不是满阶 TVPAR 模型, 特别是当时间序列长度增大的时候.

4. 目前还难以表明, 在实际应用中应选非时变阶次 TVPAR 模型还是时变阶次 TVPAR 模型. 我们建议在进行模型选择前, 先对这些 TVPAR 模型及其模拟生成进行分析.

我们将在后续研究中, 用上面讨论的这 3 种 TVPAR 模型对实际的自协方差非平稳时间序列进行模拟生成.

致谢 对审稿者的建议和帮助, 我们表示诚挚的谢意.

参考文献

- 1 Kitagawa G. A nonstationary time series model and its fitting by a recursive technique. *J Time Ser Anal*, 2(2): 103–116 (1981)

- 2 Haslett J. On the sample variogram and the sample autocovariance for nonstationary time series. *The Statistician*, **46**(4): 475–484 (1997)
- 3 Li T. Time-correlation analysis of nonstationary time series. *J Time Ser Anal*, **19**(1): 47–67 (1998)
- 4 Lee S, Na O, Na S. On the cusum of squares test for variance change in nonstationary and nonparametric time series models. *Ann Inst Statist Math*, **55**(3): 467–485 (2003)
- 5 Fryzlewicz P, Bellegem S, Sachs R. Forecasting non-stationary time series by wavelet process modeling. *Ann Inst Statist Math*, **55**(4): 737–764 (2003)
- 6 Ozaki T, Tong H. On the fitting of non-stationary autoregressive models in time series analysis. In: Proceedings of 8th Hawaii International Conference on System Science. Hawaii: Western Periodical Company, 1975, 224–226
- 7 Kitagawa G, Akaike H. A procedure for the modeling of nonstationary time series. *Ann Inst Statist Math*, **30**(2): 351–363 (1978)
- 8 白伦, 谢佳, 李林甫, 等. 计算机模拟生成茧丝纤度曲线的统计特征. *苏州丝绸工学院学报*, **19**(1): 1–7 (1999)
- 9 Fei W, Bai L. Ladder auto-regressive model and simulation of size curves of cocoon filament. *J Jap Soc Silk Sci Techn*, **13**: 103–119 (2004)
- 10 Fei W, Bai L. Auto-regressive models of non-stationary time series with finite length. *Tsinghua Sci Technol*, **10**(2): 162–168 (2005)
- 11 Fei W, Bai L, Morikawa H, et al. Study on the simulation of size series of cocoon filament. In: Proc of 3rd Int Conf on Advanced Fiber/Textile Materials 2005 in Ueda. Ueda: Shinshu University, 2005, 203–204
- 12 Fei W, Bai L. Pattern recognition of non-stationary time series with finite length. *Tsinghua Sci Technol*, **11**(5): 611–616 (2006)
- 13 Jiang X. Time varying coefficient AR and VAR models. In: Akaike H, Kitagawa G, eds. The Practice of Time Series Analysis. New York: Springer, 1999, 175–183
- 14 Prado R, Huerta G. Time-varying autoregressions with model order uncertainty. *J Time Ser Anal*, **23**(5): 599–616 (2002)