第 35 卷第 1 期
2004 年 2 月
中南大学学报(自然科学版)
J. CENT. SOUTH UNIV. (NATURAL SCIENCE)
Vol. 35 No. 1
Feb. 2004

块 TOR 迭代法的收敛性

向淑晃, 张生雷

(中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙, 410083)

摘要: 基于弱块对角占优矩阵与弱块 $\boldsymbol{H}$ 矩阵理论, 利用最优尺度矩阵的方法给出了块 TOR 迭代法(BTOR 迭代法)的收敛准则、迭代矩阵谱半径的上界估计式: 若 $\boldsymbol{A}$ 为弱块 $\boldsymbol{H}$ 矩阵理论, 则当 $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ 且 $0 < \alpha + \beta < 4/[1 + \rho(|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A})|)]$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的块 TOR 迭代法迭代矩阵谱半径满足:

$$\rho(\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,F}(A)) \leqslant \left|1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| + \frac{\alpha+\beta}{2}\rho(|\boldsymbol{J}(A)|)\text{。}$$

关键词: 线性方程组; 块 TOR 迭代法; 收敛性; 块矩阵; 谱半径

中图分类号: O241.6　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1672-7207(2004)01-0171-04

Convergence of block TOR iterative methods

XIANG Shu-huang, ZHANG Sheng-lei

(College of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: By the theory of weak block diagonally dominant matrices and weak block $\boldsymbol{H}$-matrices, the block two-parameter overrelaxation (BTOR) methods are present, which generalized the TOR iterative methods for the solution of large linear systems. The convergence of BTOR iterative methods and some estimations about the spectral radius about BTOR methods are investigated in case that $\boldsymbol{A}$ is a weak block $\boldsymbol{H}$-matrix: if $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, and $0 < \alpha + \beta < 4/[1 + \rho(|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A})|)]$, then

$$\rho(\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,F}(\boldsymbol{A})) \leqslant \left|1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| + \frac{\alpha+\beta}{2}\rho(|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A})|).$$

Key words: linear systems; block two-parameter overrelaxation method; convergence; block matrix; spectral radius

1 基本定义与引理

考虑线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{m,m},\ \det\boldsymbol{A} \neq 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^m,\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{C}^m\text{。} \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 具有如下分块:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{bmatrix}\text{。} \tag{2}$$

其中: $n \leqslant m$; $\boldsymbol{A}_{ii}$ 为 m_i 阶非奇异方阵; $i = 1, 2, \cdots, n$; $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$。令

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{E} - \bar{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{F} - \bar{\boldsymbol{F}}\text{。} \tag{3}$$

其中: $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}, \cdots, \boldsymbol{A}_{nn})$, 非奇异; $-(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{F})$ 和 $-(\bar{\boldsymbol{E}} + \bar{\boldsymbol{F}})$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的严格下和严格上块三角矩阵; $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{E}}, \bar{\boldsymbol{F}})$ 为 $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{E}} + \bar{\boldsymbol{F}})$ 部分块组成的严格下、严格上块三角矩阵; 块 TOR 迭代法为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(k+1)} = {} & (2\boldsymbol{D} - \alpha\boldsymbol{E} - \beta\boldsymbol{F})^{-1}[(2 - \alpha - \beta)\boldsymbol{D} + \\ & (\alpha + \beta)(\bar{\boldsymbol{E}} + \bar{\boldsymbol{F}}) + \alpha\boldsymbol{F} + \beta\boldsymbol{E}]\boldsymbol{x}^k + \\ & (\alpha + \beta)(2\boldsymbol{D} - \alpha\boldsymbol{E} - \beta\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{b}\text{。} \end{aligned} \tag{4}$$

收稿日期: 2003-04-23
基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(02JJY2006)
作者简介: 向淑晃(1966-), 男, 湖南新晃人, 中南大学教授, 博士, 从事数值分析与泛函分析研究
论文联系人: 张生雷, 男, 博士研究生; 电话: 010-62063912(O), 13520045314(手机); E-mail: zhangshenglei2002@yahoo.com.cn

其中: $\alpha \geqslant 0$; $\beta \geqslant 0$; $\alpha+\beta>0$。BTOR 迭代矩阵为:

$$L_{\alpha,\beta,F}(A)=(2D-\alpha E-\beta F)^{-1}\cdot$$
$$[(2-\alpha-\beta)D+(\alpha+\beta)(\bar{E}+\bar{F})+\alpha F+\beta E]。\tag{5}$$

当 $F=\bar{F}=0$, $\alpha=0$, $\beta=2$ 时, BTOR 迭代法即为 BJ 迭代法; 当 $F=\bar{F}=0$, $\alpha=2$, $\beta=0$ 时, BTOR 迭代法即为 BGS 迭代法; 当 $F=\bar{F}=0$, $\alpha=2\omega$, $\beta=0$ 时, BTOR 迭代法即为 BSOR 迭代法; 当 $F=\bar{F}=0$, $\alpha=2r$, $\alpha+\beta=2\omega$ 时, BTOR 迭代法即为 BAOR 迭代法。$L_{\alpha,\beta,F}(A)$ 为对应矩阵 A 的点 TOR 迭代矩阵。

为了讨论方便, 先给出一些定义、引理及符号。约定:

$$\|x\|_\infty=\max_i|x_i|,\ \|A\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|;$$

$J(A)$, $\varphi_\omega(A)$, $\varphi_{r,\omega}(A)$, $S_\omega(A)$, $S_{r,\omega}(A)$ 分别表示 A 的 BJ, BSOR, BAOR, BSSOR 和 BSAOR 迭代矩阵。

记 $\Omega_D=\{A\in C^{m,m}\ \|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\ \forall i\}$。

令 $C_\pi^{m,n}$ 为 $C^{m,m}$ 中按分块法 π 分块后形如(2)式的所有矩阵构成的集合。

引理 1[1] 设 $M\in\Omega_D$, 则对任意的 $N=[n_{ij}]\in C^{m,n}$, 有

$$\|M^{-1}N\|_\infty\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{\sum_{j=1}^n|n_{ij}|}{|m_{ii}|-\sum_{j\neq i}|m_{ij}|}。\tag{6}$$

令 $A=[A_{ij}]\in C_\pi^{m,n}$, 且 $A_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 非奇异, 则 A 的块比较矩阵 $\mu_b=[b_{ij}]$。其中:

$$b_{ij}=\begin{cases}\|A_{ij}^{-1}\|_\infty^{-1}, & i=j;\\ -\|A_{ij}\|_\infty, & i\neq j。\end{cases}$$

定义 1[2] 若 A 的块比较矩阵 $\mu_b=[b_{ij}]$ 存在且为严格对角占优矩阵, 则称 A 为块严格对角占优矩阵。

若 $D_{ij}=0$, $i\neq j$, 则称 $D=[D_{ij}]\in C_\pi^{m,n}$ 为块对角矩阵。

定义 2[3] 若存在非奇异块对角矩阵 D 和 E 使得 $\mu_b(DAE)$ 为非奇异 M 矩阵, 则称 A 为非奇异块 H 矩阵。

记 $\Omega_H=\{A\in C_\pi^{m,n}|A$ 为非奇异块 H 矩阵$\}$。

引理 2[4] 若 $A=[a_{ij}]$ 不可约, $a_{ii}\neq 0(\forall i)$, 则有正对角阵 $Q=\mathrm{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_n)$, 使对于 $\bar{A}=[\bar{a}_{ij}]=AQ$, 有 $\sum_{j\neq i}|\bar{a}_{ij}|/|\bar{a}_{ii}|=\rho(|J(A)|)$, $\forall i$, 这时称 $\bar{A}$ 为 A 的最优尺度矩阵。

定义 3[5] 设 $A\in C_\pi^{m,n}$, 若 $D=\mathrm{diag}(A_{11},A_{22},\cdots,A_{nn})$ 非奇异, 且 $D^{-1}A$ 为严格对角占优矩阵, 则称 A 为弱块对角占优矩阵。

定义 4[5] 设 $A\in C_\pi^{m,n}$, 若存在非奇异块对角矩阵 D 和 E, 使得 DAE 为弱块对角占优矩阵, 则称 A 为弱块 H 矩阵。

记 $\Omega_W=\{A\in C_\pi^{m,n}|A$ 为弱块 H 矩阵$\}$。

引理 3[5] 若 $A\in C^{m,m}$ 为非奇异 H 矩阵, 且有式(2)分块形式, 则 $A\in Q_W$。

引理 4[5] $\Omega_H\subset\Omega_W$ 且 $\Omega_H\neq\Omega_W$; 若 $A\in\Omega_W$, 则 A 的 BJ 迭代法收敛。

2 $\rho(L_{\alpha,\beta,F}(A))$ 上界的估计

定理 1 若 $A\in\Omega_W$, 则当 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, 且

$$0<\alpha+\beta<4/[1+\rho(|J(A)|)]\tag{7}$$

时,

$$\rho(L_{\alpha,\beta,F}(A))\leqslant\left|1-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|+\frac{\alpha+\beta}{2}\rho(|J(A)|)。\tag{8}$$

证明 因 $A\in\Omega_W$, 故存在非奇异块对角矩阵 G 和 H, 使得 $B=GAH=GDH-GEH-G\bar{E}H-GFH-G\bar{F}H$ 为弱块对角占优矩阵。从而 $\bar{B}=(GDH)^{-1}B=I-H^{-1}D^{-1}EH-H^{-1}D^{-1}\bar{E}H-H^{-1}D^{-1}FH-H^{-1}D^{-1}\bar{F}H$ 为严格对角占优矩阵(这里 I 为块单位矩阵)。下面分 2 种情况讨论。

a. 若 $\bar{B}$ 不可约, 则由引理 2 知 $\bar{B}$ 的最优尺度矩阵 $\bar{\bar{B}}=\bar{B}D_0=(\bar{\bar{b}}_{ij})$ 为严格对角占优矩阵(其中, D_0 为正对角矩阵), 且 $\sum_{j\neq i}|\bar{\bar{b}}_{ij}|=\rho(|J(\bar{\bar{B}})|)|\bar{\bar{b}}_{ii}|<|\bar{\bar{b}}_{ii}|$。由式(5)可得:

$$L_{\alpha,\beta,F}(B)=H^{-1}L_{\alpha,\beta,F}(A)H,\tag{9}$$
$$L_{\alpha,\beta,F}(\bar{B})=H^{-1}L_{\alpha,\beta,F}(A)H,\tag{10}$$
$$L_{\alpha,\beta,F}(\bar{\bar{B}})=D_0^{-1}L_{\alpha,\beta,F}(\bar{B})D_0。\tag{11}$$

由式(9)~(11)得:

$$\rho(L_{\alpha,\beta,F}(A))=\rho(L_{\alpha,\beta,F}(B))=$$
$$\rho(L_{\alpha,\beta,F}(\bar{B}))=\rho(L_{\alpha,\beta,F}(\bar{\bar{B}}))\cdot$$
$$\rho(|J(\bar{\bar{B}})|)=\rho(|J(B)|)=\rho(|L(A)|)$$

从而 $\sum_{j\neq i}|\bar{\bar{b}}_{ij}|=\rho(|J(A)|)|\bar{\bar{b}}_{ii}|$, 且

$$\rho(|L_{\alpha,\beta,F}(A)|)\leqslant\|L_{\alpha,\beta,F}(\bar{\bar{B}})\|_\infty=$$
$$\|(2D_{\bar{\bar{B}}}-\alpha E_{\bar{\bar{B}}}-\beta F_{\bar{\bar{B}}})^{-1}[(2-\alpha-\beta)D_{\bar{\bar{B}}}+$$

$(\alpha+\beta)(\overline{E}_{\bar{\bar{B}}}+\overline{F}_{\bar{\bar{B}}})+\alpha F_{\bar{\bar{B}}}+\beta E_{\bar{\bar{B}}}]\|_\infty$。

下面证明: $2D_{\bar{\bar{B}}}-\alpha E_{\bar{\bar{B}}}-\beta F_{\bar{\bar{B}}}$ 为严格对角占优矩阵。事实上,

$$2|\bar{\bar{b}}_{ii}|-\alpha\sum_{L_E}|\bar{\bar{b}}_{ij}|-\beta\sum_{L_F}|\bar{\bar{b}}_{ij}|\geqslant 2|\bar{\bar{b}}_{ii}|-\alpha\sum_{L}|\bar{\bar{b}}_{ij}|-\beta\sum_{L}|\bar{\bar{b}}_{ij}|\geqslant 2|\bar{\bar{b}}_{ii}|-$$

$$\frac{4}{1+\rho(|J(A)|)}\sum_{L}|\bar{\bar{b}}_{ij}|=\frac{2}{1+\rho(|J(A)|)}\cdot\left[|\bar{\bar{b}}_{ii}|(1+\rho(|J(A)|))-2\sum_{L}|\bar{\bar{b}}_{ij}|\right]=$$

$$\frac{2}{1+\rho(|J(A)|)}\cdot\left[|\bar{\bar{b}}_{ii}|+\sum_{j\neq i}|\bar{\bar{b}}_{ij}|-2\sum_{L}|\bar{\bar{b}}_{ij}|\right]$$

$$>\frac{2}{1+\rho(|J(A)|)}[2\sum_{U}|\bar{\bar{b}}_{ij}|]\geqslant 0。$$

由引理 1, 可得:

$$\rho(L_{\alpha,\beta,F}(A))=\rho(L_{\alpha,\beta,F}(\bar{\bar{B}}))\leqslant\|L_{\alpha,\beta,F}(\bar{\bar{B}})\|_\infty$$

$$\leqslant\max_i\Big\{[|2-\alpha-\beta||\bar{\bar{b}}_{ii}|+(\alpha+\beta)\sum_{U}|\bar{\bar{b}}_{ij}|+\alpha\sum_{L_F}|\bar{\bar{b}}_{ij}|+\beta\sum_{L_E}|\bar{\bar{b}}_{ij}|]/[2|\bar{\bar{b}}_{ii}|-\alpha\sum_{L_E}|\bar{\bar{b}}_{ij}|-\beta\sum_{L_F}|\bar{\bar{b}}_{ij}|]\Big\}$$

$$\leqslant\max_i\Big\{[|2-\alpha-\beta||\bar{\bar{b}}_{ii}|+(\alpha+\beta)\sum_{U}|\bar{\bar{b}}_{ij}|+(\alpha+\beta)\sum_{L}|\bar{\bar{b}}_{ij}|]/[2|\bar{\bar{b}}_{ii}|]\Big\}$$

$$=\frac{|2-\alpha-\beta|+(\alpha+\beta)\rho(|J(A)|)}{2}$$

$$=\left|1-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|+\frac{\alpha+\beta}{2}\rho(|J(A)|)。$$

第 3 个不等式成立, 因为当 $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\leqslant b$, $b>c$ 时, $\frac{a-b}{b-c}\leqslant\frac{a}{b}$。

b. 若 $\overline{B}$ 可约, 令 $\overline{B}_\varepsilon=\overline{B}+\varepsilon C$, 其中 $C=(c_{ij})$ 满足 $c_{ij}=0$(当 $\bar{b}_{ij}\neq 0$ 时), $c_{ij}=1$(当 $\bar{b}_{ij}=0$ 时), ε 为一正数, 此时 $\overline{B}_\varepsilon$ 不可约。当 ε 充分小时, $\overline{B}_\varepsilon$ 为 H 矩阵. 由矩阵特征值关于其元素的连续性, 利用 **a.** 中结果即可证明可约情形. 从而本定理得证.

由定理 1 及引理 4 知当式(7)成立时, 式(9)右端严格小于 1.

推论 1　当 $A\in\Omega_W$ 时, BTOR 迭代法收敛.

推论 2　若 $A\in C^{m,m}$ 为非奇异 H 矩阵, 则对 A 作形如(2)式的任意分块, BTOR 迭代法都收敛.

推论 3　若 $A\in\Omega_W$, 则当 $0\leqslant r\leqslant\omega$, $0<\omega<\frac{2}{1+\rho(|J(A)|)}$ 时, 有:

$$\rho(\Phi_\omega(A))\leqslant|1-\omega|+\omega\rho(|J(A)|);$$
$$\rho(\Phi_{r,\omega}(A))\leqslant|1-\omega|+\omega\rho(|J(A)|);$$
$$\rho(S_\omega(A))\leqslant[|1-\omega|+\omega\rho(|J(A)|)]^2;$$
$$\rho(S_{r,\omega}(A))\leqslant[|1-\omega|+\omega\rho(|J(A)|)]^2。$$

3　数值例子

设线性方程组(1)的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&10&5&0&-3&1\\10&0&3&-5&0&1\\0&0&-3&0&-1&1\\0&0&0&-3&0&-2\\-5&3&2&1&0&12\\4&-6&0&-1&12&0\end{bmatrix},$$

因 A 的对角元中有零元素, 故求解此方程组的一般点迭代法无法使用[6,7]. 此外, TOR 方法也无效[8-10]。现对 A 的 3×3 阶形式分块, 每一分块矩阵均为 2 阶矩阵, 则有 $\|A_{11}^{-1}\|_\infty=10$, $\|A_{12}\|_\infty=8$, $\|A_{13}\|_\infty=4$, $\|A_{21}\|_\infty=0$, $\|A_{22}^{-1}\|_\infty^{-1}=3$, $\|A_{23}\|_\infty=2$, $\|A_{31}\|_\infty=10$, $\|A_{32}\|_\infty=3$, $\|A_{33}^{-1}\|_\infty^{-1}=12$, 因 A 的 $\mu_b(A)=\begin{bmatrix}10&-8&-4\\0&3&-2\\-10&-3&12\end{bmatrix}$ 不是严格对角占优矩阵, 故在此分块形式下 A 不是块对角占优矩阵, 从而一般块迭代法无效[11-13]. 但是,

$$B=D^{-1}A=$$
$$\begin{bmatrix}1&0&3/10&-5/10&0&1/10\\0&1&5/10&0&-3/10&1/10\\0&0&1&0&1/3&-1/3\\0&0&0&1&0&2/3\\4/12&-6/12&0&-1/12&1&0\\-5/12&3/12&2/12&1/12&0&1\end{bmatrix}$$

为严格对角占优矩阵, 故 A 为弱块对角占优矩阵。令

$$E=\begin{bmatrix}0&0&0\\-A_{21}&0&0\\0&-A_{32}&0\end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-A_{31}&0&0\end{bmatrix},$$

$$\overline{E}=\begin{bmatrix}0&-A_{12}&0\\0&0&-A_{23}\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{F}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\boldsymbol{A}_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{11},\ \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{A}_{33})。$$

当 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, 且 $0<\alpha+\beta<4/[1+\rho(|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A})|)]\approx 2.6347$ 时, 据定理 1, BTOR 迭代法收敛(见表 1)。由于 BSOR 迭代法是 BTOR 迭代法的特例, 故当 $0<\omega<2/[1+\rho(|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A})|)]\approx 1.3173$ 时, BSOR 迭代法也收敛(见表 2).

表 1 BTOR 迭代矩阵的谱半径

Table 1 Spectral radius of the iterative matrices of the BTOR method

	α			
	0.1	0.2	0.4	0.5
β	1.9	1.8	1.7	1.5
$\rho(\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,F}(\boldsymbol{A}))$	0.366 1	0.368 8	0.389 0	0.396 5
	α			
	0.6	1.3	1.6	
β	1.6	0.7	0.4	
$\rho(\boldsymbol{L}_{\alpha,\beta,F}(\boldsymbol{A}))$	0.405 1	0.465 8	0.486 5	

表 2 BSOR 迭代矩阵的谱半径

Table 2 Spectral radius of the iterative matrices of the BSOR method

ω	0.2	0.4	0.6	0.8
$\rho(\Phi_\omega(\boldsymbol{A}))$	0.895 2	0.779 8	0.650 3	0.499 7
ω	1.1	1.2	1.3	
$\rho(\Phi_\omega(\boldsymbol{A}))$	0.460 5	0.587 4	0.727 9	

从表 1 和表 2 可知: 调整参数的取值可以改变 BTOR 迭代法的收敛速度, 而且适当选取参数, BTOR 迭代法比 BSOR 迭代法收敛快。最佳松弛因子 α_{OPT} 和 β_{OPT} 的选取有待进一步研究。

参考文献:

[1] HU Jia-gan. The estimate of $\|\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}\|_\infty$ and the optimally scaled matrix [J]. JCM Sinica, 1984, 2(2): 122－129.

[2] Feingold D G, Varga R G. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem [J]. Pacific J Math, 1962, 12: 1 251－1 260.

[3] Polman B. Incomplete blockwise factorization of (block) $\boldsymbol{H}$-matrices [J]. Linear Algebra Appl, 1987, 90: 119-132.

[4] 胡家赣. 线性代数方程组的迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
HU Jia-gan. Iterative method of linear algebraic system of equations[M]. Peking: Science Press, 1997.

[5] XIANG Shu-huang, YOU Zhao-yong. Weak block diagonally dominant matrices, weak block H-matrix and their applications [J]. Linear Algebra Appl, 1998, 282: 263－274.

[6] Hadjidimos A. Accelerated overrelaxation method[J]. Math Comput, 1978, 32(141): 149－157.

[7] 宋永忠. AOR 迭代 SOR 迭代 JOR 迭代的收敛性[J]. 高等学校计算数学学报, 1987(1): 88－91.
SONG Yong-zhong. Convergence of the iterative methods of AOR, SOR and JOR[J]. Journal of Computing Mathematics of Chinese Universities, 1987(1): 88－91.

[8] 匡蛟勋. 关于解大线性系统的双参数松弛法[J]. 上海师范学院学报, 1983, 4: 1－14.
KUANG Jiao-xun. Double parametric relaxation method to solve large linear systems[J]. J Shanghai Normal College, 1983, 4: 1－14.

[9] 曾文平. 关于 TOR 方法的收敛性[J]. 高等学校计算数学学报, 1986, 8(1): 65－71.
ZENG Wen-ping. Convergence of the TOR method[J]. Journal of Computing Mathematics of Chinese Universities, 1986, 8(1): 65－71.

[10] 周荣富, 袁锦昀. 广义 TOR 方法及其收敛性[J]. 高校应用数学学报, 1991, 6(4): 545-551.
ZHOU Rong-fu, YUANG Jin-yuan. Generallied TOR method and its convergence[J]. Journal of Applied Mathematics of Chinese Universities, 1991, 6(4): 545－551.

[11] 宋永忠. 块 AOR 迭代法的收敛性[J]. 应用数学, 1993, 1: 39－45.
SONG Yong-zhong. Convergence of the block AOR iterative method[J]. Applied Mathematics, 1993, 1: 39－45.

[12] 李耀堂. 块迭代法收敛性的判别条件[J]. 西安电子科技大学学报, 1998, 25: 198－203.
LI Yong-tang. Critical conditions of the block iterative method [J]. Journal of Xi′an Electronic Science and Technology University, 1998, 25: 198－203.

[13] 游兆永, 李耀堂. 块 SSOR 迭代法收敛性[J]. 应用数学, 1998, 11(2): 81－85.
YOU Zhao-yong, LI Yao-tang. Convergence of the block SSOR iterative method[J]. Applied Mathematics, 1998, 11(2): 81－85.