

膨胀土胀缩等级分类的未确知均值聚类方法及应用

董陇军, 李夕兵, 宫凤强

(中南大学 资源与安全工程学院, 湖南 长沙, 410083)

摘要: 将未确知测度理论应用于膨胀土的分类问题中, 建立膨胀土胀缩等级分类的未确知均值聚类分析模型; 选用粘粒含量、粉粒含量、液限、塑限及塑性指数作为未确知均值聚类分析模型的判别指标; 以膨胀土的 15 组实测数据建立各评判指标的未确知测度函数, 用各分类样本平均值表示分类中心; 根据信息熵理论计算各评判指标的权重, 用置信度识别准则进行评判; 用建立的模型对 15 组实测数据逐一进行检验, 正确率为 100%。将建立的模型对待分类的 8 个样本进行测试, 并与实测结果进行比较。研究结果表明: 预测等级与实际结果较吻合, 比较客观地反映了膨胀土分类的复杂状况。

关键词: 膨胀土; 未确知均值聚类方法; 分类

中图分类号: TU443

文献标识码: A

文章编号: 1672-7207(2008)05-1075-06

Unascertained average clustering method for classification of grade of shrink and expansion for expansive soils and its application

DONG Long-jun, LI Xi-bing, GONG Feng-qiang

(School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: Based on unascertained measurement theory, a classification model of expansive soil was established, including five indexes reflecting the shrink and expansion of expansive soil, i.e., content of clay grain, content of silt grain, liquid limit, plastic limit and plasticity index. The indexes functions of unascertained measure of 15 sets of expansive soil samples were established, and the centre of the classified was indicated by using the average of classification of samples. The weight of indexes was calculated by entropy weight theory, and a prediction for the classification of residual expansive soils was carried out using the rules of credible recognition. Each of the 15 sets of expansive soil samples was tested according to the model, and the correct rate is 100%. The other 8 sets of expansive soil samples were predicted by using this model. The results show that the predicted classification is consistent with the actually measured ones. Therefore, the classification model, reflecting the complexity situation of expansive soil objectively, is effective and available to the classification of the grade of shrink and expansion for the expansive soils.

Key words: expansive soils; unascertained average clustering method; classification

膨胀土是在自然地质过程中形成的一种多裂隙并具有显著胀缩性的地质体, 是一种吸水膨胀软化、失水收缩开裂并能反复胀缩变形的特种高塑性粘土。膨

胀土的这种显著胀缩特性直接影响着建筑物的安全, 常常给膨胀地区的工程带来困难与灾害, 它不仅造成房屋成群开裂, 公路、铁路塌方, 而且可导致膨胀土

收稿日期: 2007-10-25; 修回日期: 2008-01-05

基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目(50490274); 中南大学米塔尔创新资助项目(07MX147); 中南大学学位论文创新资助项目(1343-74335000020)

通信作者: 李夕兵(1962-), 男, 湖南宁乡人, 博士, 博士生导师, 教授; 从事采矿与岩土工程方面的研究工作; 电话: 13974870961; E-mail: xbli@mail.csu.edu.cn

边坡产生表层浅滑现象,造成农田水利设施破坏,严重影响人们的生活环境。造成这些困难和灾害的原因之一就是人们在工程初期对膨胀土胀缩等级进行了漏判。因此,对膨胀土胀缩性等级的分类进行研究很重要^[1]。目前,判定膨胀土的胀缩性等级的方法有很多种。采用单指标或少数几个指标进行评判的传统方法主要有风干含水率分类法^[2]、塑性图分类法^[3]等,但有时根据各个指标得出的评价结果互相矛盾,难以取舍,有很大的局限性和片面性。近年来发展的多指标综合评判法被证明是一种提高评判膨胀土胀缩准确性的有效途径。这类模型主要借鉴灰色理论^[4]、模糊数学^[5]、可拓学^[1]、神经网络^[6-7]、支持向量机^[8]、距离判别分析法^[9]、粗集理论^[10]等。虽然判定方法有多种,但膨胀土胀缩性等级分类的难点在于许多因素的不确定性,如何将这些不确定的信息考虑在内并进行分析,有待进一步研究。未确知数学理论为此提供了一种比较好的途径。

未确知信息是不同于模糊信息、随机信息和灰色信息的一种新的不确定性信息。刘开第等^[11-12]建立了未确知数学理论,给出了未确知测度评价模型,并在城市环境质量评价中取得了满意结果^[13]。在此,本文作者借鉴未确知测度评价模型的理论 and 思想,通过多项指标以更全面地综合评判膨胀土的胀缩性等级,通过小样本建立判定膨胀土的胀缩性等级评判模型。

1 未确知均值聚类分析分类模型

1.1 确定待预事物的分类模式系统

设 R_1, R_2, \dots, R_n 为待分类(或已经分类)的 n 个对象,则分类对象空间 $R=\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ 。对 $R_i \in R$ ($i \leq n$),有 m 个评判指标 x^1, x^2, \dots, x^m ,则评判指标空间为 $X=\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$,于是, R_i 可表示为 m 维向量 $R_i = \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m\}$,其中: x_i^j 表示研究对象 R_i 关于测量指标 x^j 的测量值,对每个 x_i^j ,有 K 个分类等级 C_1, C_2, \dots, C_K ,分类空间记为 $\Omega, \Omega = \{C_1, C_2, \dots, C_K\}$ 。设 C_k 表示分类等级,则 k 级高于 $k+1$ 级,记作 $C_1 > C_2 > C_3 > \dots > C_K$ 。若 $\{C_1, C_2, \dots, C_K\}$ 满足 $C_1 > C_2 > C_3 > \dots > C_K$ 或 $C_1 < C_2 < C_3 < \dots < C_K$,则称 $\{C_1, C_2, \dots, C_K\}$ 是分类对象空间 $R=\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ 的一个有序分割

类^[13]。假设某个分类样本集有 t 个样本属于 C_k 类,则第 k 个分类等级中各样本的评判指标可表示为 $x_{ik}^{j1}, x_{ik}^{j2}, \dots, x_{ik}^{jt}$,求其平均值,可知分类样本集的分类中心^[14-16]。

1.2 单指标测度

若 $\mu_{ik}^j = \mu(x_i^j \in C_k)$ 表示测量值 x_i^j 属于第 k 个类(或评价等级) C_k 的程度,要求满足

$$0 \leq \mu(x_i^j \in C_k) \leq 1, \quad (1)$$

$$\mu(x_i^j \in \Omega) = 1. \quad (2)$$

$$\mu \left| x_i^j \in \bigcup_{L=1}^k C_L \right| = \sum_{L=1}^k \mu(x_i^j \in C_L). \quad (3)$$

其中: $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, K$ 。则称 μ 为未确知测度(Unascertained measure),简称测度^[13]。

称矩阵

$$(m_{ik}^j)_m = \begin{pmatrix} \mu_{i1}^1 & \mu_{i2}^1 & \dots & \mu_{iK}^1 \\ \mu_{i1}^2 & \mu_{i2}^2 & \dots & \mu_{iK}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{i1}^m & \mu_{i2}^m & \dots & \mu_{iK}^m \end{pmatrix} \quad (4)$$

为单指标测度分类矩阵。其中: $i=1, 2, \dots, n$ 。

1.3 指标权重的确定

用 w_j 表示测量指标 x^j 与其他指标相比具有的相对重要程度,要求 w_j 满足: $0 \leq w_j \leq 1$,且 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$,称 w_j 为 x^j 的权重, $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 称为指标权重向量。

设由未确知测度 μ_{ik}^j 所确定的信息熵为

$$H_j = \sum_{i=1}^K \mu_{ik}^j \lg \mu_{ik}^j. \quad (5)$$

令

$$v_j = 1 + \frac{1}{\lg K} \sum_{k=1}^K \mu_{ik}^j \cdot \lg \mu_{ik}^j, \quad (6)$$

$$w_j = v_j / \sum_{i=1}^n v_i. \quad (7)$$

则 w_j 体现 x^j 的重要程度, 且 $0 \leq w_j \leq 1, \sum_{j=1}^n w_j = 1$, 故 w_j 可作为 x^j 的权重^[15, 17-18]。

1.4 多指标综合测度评价向量

令 $\mu_{ik} = \mu(\mu_i \in C_k)$ 表示样本 R_i 属于第 k 个评价类 C_k 的程度, 则

$$\mu_{ik} = \sum_{j=1}^m w_j \mu_{ik}^j \quad (8)$$

由于 $0 \leq \mu_{ik} \leq 1$, 并且

$$\sum_{i=1}^K \mu_{ik} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^m w_j \mu_{ik}^j = \sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^K \mu_{ik}^j \right| w_j = \sum_{j=1}^m w_j = 1,$$

所以, μ_{ik} 为未确知测度。

称 $(\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{iK})$ 为样本 R_i 的多指标加权综合测度分类向量^[13]。

1.5 置信度识别准则

若 $C_1 < C_2 < C_3 < \dots < C_K$, 引入置信度识别准则如下^[13-14]: 设 λ 为置信度($\lambda > 0.5$, 常取 0.6 或 0.7), 若 $C_1 < C_2 < C_3 < \dots < C_K$, 令

$$k_0 = \min \left\{ k : \sum_{l=1}^k \mu_l > \lambda, k = 1, 2, \dots, K \right\} \quad (9)$$

则认为分类对象 R_i 属于第 k_0 个评价类。

2 胀缩性等级判定的未确知均值聚类分析模型

2.1 分类判别参数的确定

反映膨胀土基本性质的指标较多, 它们之间的组合和相关关系也非常复杂, 不是简单的线性统计关系^[7]。参考有关研究成果, 经综合分析, 确定以粘粒含量(x^1), 粉粒含量(x^2), 液限(x^3), 塑限(x^4)及塑性指数(x^5)作为分类判别指标。

2.2 分类判别指标的未确知测度函数

以文献[6]所提供的安康膨胀土为例(见表 1), 选取前 15 个样本数据进行训练, 其余 8 个样本作为待判样本进行检验。并以粘粒含量、粉粒含量、液限、塑限及塑性指数作为未确知均值聚类分析模型的分类判别指标, 评判集为(C_1, C_2, C_3), 其中: C_1 表示弱膨胀土(I), C_2 表示中等膨胀土(II), C_3 表示强膨胀土(III)。用表 1 中前 15 个数据建立各评判指标的未确知

测度函数, 求得各分类级的中心, 即各级的样本评判指标平均值, 分别用 $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4, \bar{x}^5$ 表示。其计算结果见表 2, 根据表 2 中的计算结果分别建立

表 1 膨胀土实测数据

Table 1 Data of expansive soil samples

土样 序号	判别指标					实测 结果
	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	
1	47.2	32.3	57.4	28.1	29.3	III
2	51.7	27.8	59.2	22.7	36.5	III
3	38.6	43.2	43.1	23.9	19.2	II
4	35.3	46.9	40.8	22.2	18.6	II
5	48.8	27.3	54.8	28.1	26.7	III
6	52.3	35.6	49.8	29.7	30.1	III
7	48.2	28.6	51.6	24.2	27.4	III
8	33.6	56.3	37.8	21.6	16.2	I
9	32.4	52.9	38.2	22.8	15.4	I
10	52.5	36.8	49.6	20.3	29.3	III
11	39.8	48.7	45.7	20.8	29.3	II
12	41.8	44.3	42.8	19.7	23.1	II
13	36.9	41.6	43.4	24.1	19.3	II
14	34.5	63.5	41.8	25.5	16.3	I
15	30.8	49.7	31.7	17.1	14.6	I
16*	53.2	30.5	50.7	21.9	28.8	III
17*	28.7	55.1	31.9	17.4	14.5	I
18*	48.9	31.7	49.3	20.7	28.6	III
19*	49.7	33.9	52.8	26.5	26.3	III
20*	42.6	41.5	43.8	19.7	24.1	II
21*	39.8	46.3	47.2	23.4	23.8	II
22*	47.9	33.2	53.8	23.7	30.1	III
23*	35.8	48.3	45.5	22.7	22.8	II

注: 带“*”号为待分类样本

表 2 样本分类数据

Table 2 Classified data of expansive soil samples

土样 序号	C_3 (III)	C_2 (II)	C_1 (I)
		1, 2, 5, 6, 7, 10	3, 4, 11, 12, 13
\bar{x}^1	50.12	38.48	32.83
\bar{x}^2	31.40	44.84	55.60

\bar{x}^3	53.73	43.16	37.38
\bar{x}^4	25.52	22.14	21.75
\bar{x}^5	29.88	21.90	15.63

粘粒含量、粉粒含量、液限、塑限及塑性指数的未确知测度函数, 见图 1~5。

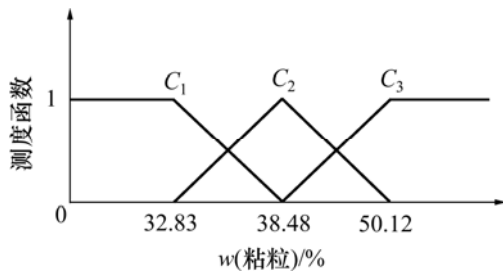


图 1 粘粒含量的未确知测度函数

Fig.1 Unascertained measurement function of content of clay grain

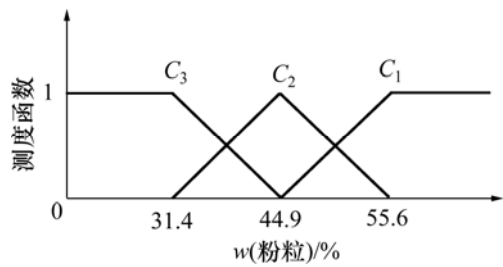


图 2 粉粒含量的未确知测度函数

Fig.2 Unascertained measurement function of content of silt grain

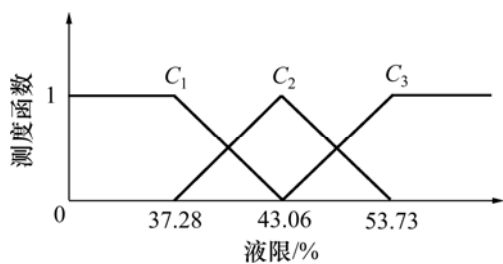


图 3 液限的未确知测度函数

Fig.3 Unascertained measurement function of liquid limit

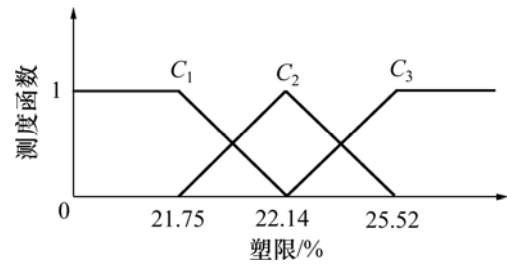


图 4 塑限的未确知测度函数

Fig.4 Unascertained measurement function of plastic limit

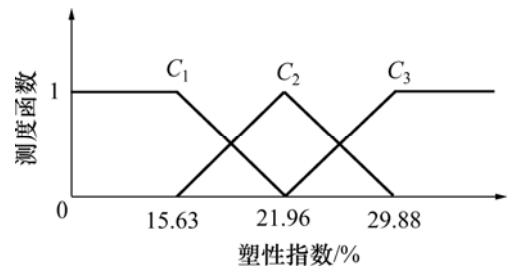


图 5 塑性指数的未确知测度函数

Fig.5 Unascertained measurement function of plasticity index

2.3 分类模型的检验及应用

为了考察胀缩性等级判定的未确知测度分析模型的有效性和正确性, 用判别模型判别训练样本 1~15, 评判结果完全与实际结果相吻合, 证明判别模型是稳定的、合理的。

以待判样本 16*为例进行评判, 根据表 1 中具体评判指标的取值和未确知测度函数(图 1~5), 可求得样本 16*的单指标测度评价矩阵为:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.28 & 0.72 \\ 0.36 & 0.64 & 0 \\ 0 & 0.14 & 0.86 \end{pmatrix} \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{matrix}$$

用式(5)~(7)确定各评判指标的权重, 得样本 16*各评判指标的权重为 $(w_1, w_2, \dots, w_5)=(0.285\ 714, 0.285\ 714, 0.131\ 429, 0.115\ 771, 0.180\ 000)$, 根据单指标测度矩阵和式(8)得出多指标综合测度向量为:

$$(0.041\ 678, 0.136\ 094, 0.820\ 857)。(10)$$

取置信度 $\lambda=0.6$, 由多指标综合测度评价向量(10)和置信度评价准则公式(9)可以判别样本 16*的等级为

C₃, 即强膨胀土(III), 与实测结果相吻合。同理, 对待判样本 17*~23*进行评判。将多指标测度向量进行评价, 评价结果见表 3。表 3 同时列出了利用支持向量机模型^[7]、神经网络方法^[6]所得到的评价结果。可见, 评判结果与实际结果相符。采用本文方法所得结果与采用其他 3 种方法所得结果完全相同, 判误率为 0。所以, 将未确知测度分析模型应用于膨胀土胀缩等级的判定完全可行, 并且是高效、可靠的。

表 3 综合未确知测度以及未确知测度分析法判定结果对比

Table 3 Synthesis unascertained measurement and comparison of results obtained with different methods of unascertained measurement discriminant analysis

序号	综合未确知测度			判定结果			实测结果
	C ₁	C ₂	C ₃	本文方法	SVM 方法	神经网络法	
1	0	0.057 1	0.942 9	III	III	III	III
2	0	0.106 7	0.893 4	III	III	III	III
3	0.053 2	0.867 9	0.078 9	II	II	II	II
4	0.257 2	0.735 8	0.007 0	II	II	II	II
5	0.056 7	0.943 3	0.056 7	III	III	III	III
6	0	0.079 3	0.920 7	III	III	III	III
7	0	0.168 4	0.831 6	III	III	III	III
8	0.949 1	0.050 9	0	I	I	I	I
9	0.792 0	0.176 8	0.031 2	I	I	I	I
10	0.281 7	0.105 2	0.613 0	III	III	III	III
11	0.338 4	0.409 6	0.252 0	II	II	II	II
12	0.264 6	0.655 8	0.079 7	II	II	II	II
13	0.117 6	0.742 9	0.139 6	II	II	II	II
14	0.635 1	0.089 4	0.285 5	I	I	I	I
15	0.953 4	0.046 6	0.953 4	I	I	I	I
16*	0.040 5	0.135 3	0.824 3	III	III	III	III
17*	0.991 3	0.008 8	0	I	I	I	I
18*	0.275 5	0.089 8	0.634 7	III	III	III	III
19*	0	0.106 0	0.894 0	III	III	III	III
20*	0.318 5	0.539 7	0.141 8	II	II	II	II
21*	0.058 4	0.783 1	0.158 4	II	II	II	II
22*	0	0.097 3	0.902 7	III	III	III	III
23*	0.123 4	0.770 3	0.106 3	II	II	II	II

注: 带*号者为待分类样本

3 结 论

a. 膨胀土等级的判定受多种因素的影响。针对膨胀土等级分类中许多因素的不确定性和隐蔽性, 综合考虑膨胀土胀缩特性和物理力学指标, 引入未确知数学理论, 建立了膨胀土分类的未确知均值聚类分析模型。

b. 该模型选用粘粒含量、粉粒含量、液限、塑限及塑性指数 5 项指标作为未确知均值聚类分析模型的判别指标, 建立了未确知测度函数, 用信息熵理论确定权重, 较真实地反映了膨胀土胀缩特性的综合情况。

c. 通过小样本就可以建立高效、可靠的未确知均值聚类分析模型, 计算方法简单, 能满足工程应用的要求。实例应用结果表明, 膨胀土分类的未确知均值聚类分析模型的正确率为 100%, 可以在实际工程中推广使用, 为解决膨胀土等级判定和分类提供了一条新的途径。

参考文献:

[1] 汪明武, 金菊良, 李 丽. 可拓学在膨胀土胀缩等级评判中的应用[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(6): 754-757.
WANG Ming-wu, JIN Ju-liang, LI Li. Application of extension method to the evaluate of grade shrinkage and expansion for the expensive soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(6): 754-757.

[2] 谭罗荣, 张海英, 邵梧敏, 等. 风干含水量 W₆₅ 用作膨胀土分类指标的可行性研究[J]. 工程地质学报, 1994, 2(1): 15-26.
TAN Luo-rong, ZHANG Hai-ying, SHAO Wu-min, et al. The practicability research on use of air dry moisture content W₆₅ as identification index of swelling soil[J]. Journal of Engineering Geology, 1994, 2(1): 15-26.

[3] 马桂芝. 应用塑性图对陕西特别土的判别[J]. 西安地质学院学报, 1995, 17(2): 87-89.
MA Gui-zhi. The application of plasticity chart to shanxi special soils distribution[J]. Journal of Xi'an College of Geology, 1995, 17(2): 87-89.

[4] 李玉花, 冯晓腊, 严应征. 灰色聚类法在膨胀土分类中的应用[J]. 岩土力学, 2003, 24(2): 304-306.
LI Yu-hua, FENG Xiao-la, YAN Ying-zheng. Application of gray clustering procedure to classification of expansive soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, 24(2): 304-306.

[5] 黄 卫, 钟 理, 钱振东. 路基膨胀土等级的模糊综合评判[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(4): 408-413.
HUANG Wei, ZHONG Li, QIAN Zheng-dong. Fuzzy

- judgement about the grade shrink and expansion for the expansive soil in grade[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, 21(4): 408-413.
- [6] 易顺民, 晏同珍. 膨胀土判别与分类的人工神经网络方法[J]. 地质科技情报, 1995, 14(3): 91-94.
YIN Shun-min, YAN Tong-zhen. Artificial neural network method for discrimination and classification of expansive soil[J]. Geological Science and Technology Information, 1995, 14(3): 91-94.
- [7] 傅鹤林, 范臻辉, 刘宝琛. 利用人工神经网络模型判定膨胀土等级[J]. 中国铁道科学, 2002, 23(5): 118-120.
FU He-lin, FAN Zhen-hui, LIU Bao-chen. Determination of expanded clay with artificial neural network model[J]. China Railway Science, 2002, 23(5): 118-120.
- [8] 马文涛. 支持向量机方法在膨胀土分类中的应用[J]. 岩土力学, 2005, 26(11): 1790-1792.
MA Wen-tao. Application of support vector machine to classification of expansive soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(11): 1790-1792.
- [9] 宫凤强, 李夕兵. 膨胀土胀缩等级分类中的距离判别分析法[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(3): 463-466.
GONG Feng-qiang, LI Xi-bing. Distance discriminant analysis to the classification of the grade of shrink and expansion for the expansive soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(3): 463-466.
- [10] 丁加明, 王永和, 丁力行. 基于粗集不相容系统的膨胀土分类规则提取[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2006, 37(2): 396-400.
DING Jia-ming, WANG Yong-he, DING Li-xing. Generating expansive soil classification rule based on rough sets in consistent decision system solution of single tunnel inside broken rock mass[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2006, 37(2): 396-400.
- [11] 刘开第, 吴和琴, 庞彦军, 等. 不确定信息数学处理及应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
LIU Kai-di, WU He-qin, PANG Yan-jun, et al. Mathematics treatment and application of unascertained information[M]. Beijing: Science Press, 1999.
- [12] 刘开第, 吴和琴, 王念鹏, 等. 未确知数学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1997.
LIU Kai-di, WU He-qin, WANG Nian-peng, et al. Unascertained maths[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1997.
- [13] 刘开第, 庞彦军, 孙光勇, 等. 城市环境质量的未确知测度评价[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(12): 52-58.
LIU Kai-di, PANG Yan-jun, SUN Guang-yong, et al. The unascertained measurement evaluation on a city's environmental quality[J]. Systems Engineering Theory & Practice, 1999, 19(12): 52-58.
- [14] 万玉成. 未确知性在预测与决策问题中的应用[D]. 南京: 东南大学经济管理学院, 2004: 22-27.
WAN Yu-cheng. Study on the applications of unascertained in forecasting and decision making[D]. Nanjing: School of Economics and Management, Southeast University, 2004: 22-27.
- [15] 曹庆奎, 刘开展, 张博文. 用熵计算客观型指标权重的方法[J]. 河北建筑科技学院学报, 2000, 17(3): 40-42.
CAO Qing-kui, LIU Kai-zhan, ZHANG Bo-wen. Calculation method of objective index weight by entropy[J]. Journal of Hebei Institute of Architectural Science and Technology, 2000, 17(3): 40-42.
- [16] 董陇军, 李夕兵, 宫凤强. 开采地面沉陷预测的未确知聚类预测模型[J]. 中国地质灾害与防治学报, 2008, 19(2): 95-99.
DONG Long-jun, LI Xi-bing, GONG Feng-qiang. Predicting surface subsidence induced by mining based on unascertained clustering method[J]. The Chinese Journal of Geological Hazard and Control, 2008, 19(2): 95-99.
- [17] 董陇军, 王飞跃. 基于未确知测度的边坡地震稳定性综合评价[J]. 中国地质灾害与防治学报, 2007, 18(4): 74-78.
DONG Long-jun, WANG Fei-yue. Comprehensive evaluation on seismic stability of slopes based on unascertained measurement[J]. The Chinese Journal of Geological Hazard and Control, 2007, 18(4): 74-78.
- [18] 宫凤强, 李夕兵, 董陇军, 等. 基于未确知测度理论的采空区危险性评价研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(2): 323-330.
GONG Feng-qiang, LI Xi-bing, DONG Long-jun, et al. Underground goaf risk evaluation based on uncertainty measurement theory[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(2): 323-330.