

超混沌系统的多变量驱动误差反馈控制同步方法

孙克辉^{1,2}, 张泰山²

- (1. 中南大学 物理科学与技术学院, 湖南 长沙, 410083;
2. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙, 410083)

摘要: 基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出实现连续时间超混沌系统同步的多变量驱动误差反馈控制同步定理, 确定了控制参数的范围。同步系统的反馈控制器由线性反馈和非线性反馈 2 部分组成, 并受驱动系统的所有变量驱动。提出采用同步稳定性、同步鲁棒性、同步稳态误差、同步精度、同步建立时间、同步化区域和同步动态特性等描述混沌同步系统性能的 7 项指标, 获得控制参数影响同步系统性能的机理, 即控制参数通过改变系统的条件 Lyapunov 指数而影响系统的同步性能。对 Rössler 超混沌系统的数值仿真研究表明: 多变量驱动误差反馈同步方法具有不需要分解系统、不需要计算响应系统的条件 Lyapunov 指数和同步收敛快的特点。

关键词: 混沌同步; 超混沌系统; 反馈控制; 同步性能

中图分类号: TP271 文献标识码: A 文章编号: 1672-7207(2005)04-0653-05

Synchronization control method of hyperchaotic systems by multi-variables driving and error feedback

SUN Ke-hui^{1,2}, ZHANG Tai-shan²

- (1. School of Physics Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China;
2. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: Based on the Lyapunov stability theory, a new hyperchaotic synchronization method called multi-variables driving and error feedback control was presented, and the range of control parameters was determined. The feedback controller was composed of linear and nonlinear feedback, and driven by all variables of the driving system. To describe the performances of synchronization chaotic system, seven indexes including stability, robustness, stable state error, precision, setup time, range and dynamic characteristic were put forward. The relations between the performance index and the controller parameters are discussed. The numerical simulation results of Rössler hyperchaotic system show that this method has many merits such as no need of structure departing, calculation of the condition Lyapunov exponents and fast synchronization.

Key words: chaotic synchronization; hyperchaotic system; feedback control; synchronization performance

随着驱动-响应同步方法的提出^[1,2], 混沌同步及其在保密通信、信息科学、生物、医学、工程等领域的应用引起了人们的广泛兴趣^[3]。目前, 人们已提

出多种混沌同步控制方法^[4]。混沌同步属于混沌控制的范畴。控制与同步问题可合并成一个问题^[5], 即混沌系统同步问题可视为一类使被控系统混沌

收稿日期: 2004-10-26

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(04JJY3077)

作者简介: 孙克辉(1968-), 男, 湖南益阳人, 副教授, 博士, 从事混沌同步及其保密通信研究

论文联系人: 孙克辉, 男, 副教授, 博士; 电话: 0731-8836335(O); E-mail: kehui@mail.csu.edu.cn

轨道按目标系统轨道运动的控制问题, 控制问题可视为一类被控系统轨道与目标系统的轨道的同步问题。由于含有 2 个或 2 个以上正的 Lyapunov 指数的超混沌系统能够产生更复杂的动力学行为, 从而提高混沌保密系统的保密性^[6], 因此, 人们对超混沌系统的同步方法及其应用进行广泛的研究^[7-10]。文献[7]和[8]中所采用的方法均需要计算系统的 Lyapunov 指数, 然而, 超混沌系统的 Lyapunov 指数的计算迄今是一个很困难的问题^[3]。为此, 作者从混沌同步控制和改善混沌同步性能入手研究超混沌系统的同步问题, 提出基于 Lyapunov 渐近稳定性原理的、由多变量驱动的线性和非线性误差反馈控制同步方法。该方法对混沌系统的结构没有要求, 不需要计算条件 Lyapunov 指数。

1 多变量驱动误差反馈同步控制

1.1 混沌同步原理

设有如下 2 个相同结构、不同初值的连续混沌系统:

a. 驱动系统:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BF(X), \\ X(0) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1)$$

b. 响应系统:

$$\begin{cases} \dot{Y} = AY + BF(Y) + U(X, Y), \\ Y(0) \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2)$$

其中: 驱动变量 $X \in \mathbb{R}^n$; $Y \in \mathbb{R}^n$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, 为非线性函数; AX 为线性部分; BF 为非线性部分, 控制变量 $U \in \mathbb{R}^m$; (A, B) 可控。记状态变量误差 $E = X - Y$, 则控制驱动系统与响应系统的同步问题即为寻找一个合适的控制律 $U(X, Y)$, 使 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X - Y\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|E\| = 0$ 成立。可见, 可将 2 个连续混沌系统的同步控制问题转化为对误差系统收敛问题进行研究。

根据 Lyapunov 渐近稳定性定理, 设计正定二次型函数 $V(E) = E^T P E$ 作为 Lyapunov 函数, 其中, P 为正定矩阵。若有 $V(E) = -E^T Q E$, 只要 Q 正定(即 $V(E)$ 负定), 则系统为大范围渐近稳定的。由于误差系统的动力学方程为: $\dot{E} = AE + B(F(X) - F(Y)) - U(X, Y)$, 可见, 两系统同步问题于转化为控制律以及控制参数的选择问题。另外, 如何从一定参数范围中选取一组最佳参数, 则必须以系统同步性能最优化为原则, 这对同步控制及其应用都是至关重要的。

1.2 多变量驱动误差反馈同步控制器设计

超混沌系统多变量驱动反馈控制同步原理如图 1 所示。响应系统受驱动系统的所有变量驱动, 误差反馈控制器由线性部分和非线性部分组成。

定理 1 对于 n 维连续混沌系统及复制系统, 使用线性和非线性反馈控制同步方法, 设驱动系统为 $\dot{X} = AX + BF(X)$; 响应系统为 $\dot{Y} = AY + BF(Y) + U(X, Y)$; 控制律为 $U(X, Y) = K(X - Y) + B[F(X) - F(Y)]$ 。其中: $X, Y \in \mathbb{R}^n$; $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。当参数控制矩阵 K 的元素满足: 当 $i = j$ 时, $k_{ij} > a_{ij}$; 当 $i \neq j$ 时, $k_{ij} = a_{ij}$, 则响应系统与驱动系统为大范围渐近稳定同步。

证明 对于混沌系统(1)和(2), 令 $E = X - Y$, 则误差系统方程: $\dot{E} = AE + B[F(X) - F(Y)] - U(X, Y)$; 设计反馈控制器的控制律为: $U = KE + B(F(X) - F(Y))$, 则 $\dot{E} = (A - K)E$ 。

取正定二次型函数作为 Lyapunov 函数:

$$V(E) = E^T P E \geq 0. \quad (3)$$

其中: P 为正定阵, 其全导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V}(E) &= E^T \dot{P} E + E^T P \dot{E} = \\ & [(A - K)E]^T P E + E^T P [(A - K)E] = \\ & E^T [(A - K)^T P + P(A - K)] E = -E^T Q E. \end{aligned} \quad (4)$$

若反馈控制参数 k_{ij} , 当 $i = j$ 时, $k_{ij} > a_{ij}$; 当 $i \neq j$ 时, $k_{ij} = a_{ij}$, 则 $Q = (A - K)^T P + P(A - K)$ 正定, 即 $\dot{V}(E) \leq 0$ 。当 $E = 0$ 时, 等号成立, 即驱动—响应系统渐近稳定同步。鉴于系统只有一个平衡态, 所以, 系统是大范围渐近稳定的。证毕。

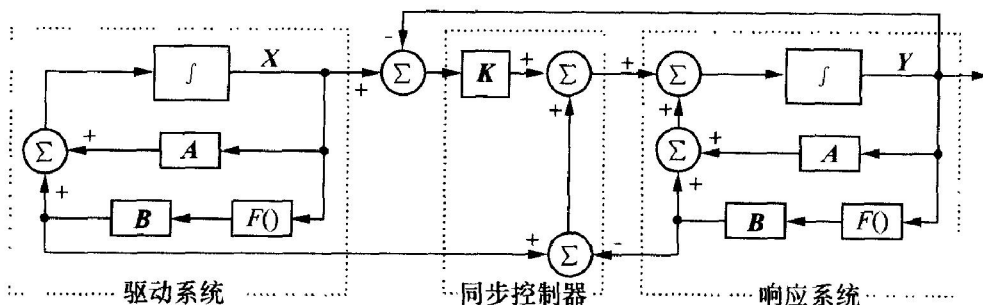


图 1 多变量驱动误差反馈同步原理框图

Fig. 1 Principle diagram of error feedback controller with multi variables driving

推论 1 当 $i = j$ 时, $k_{ij} > a_{ij}$; 当 $i \neq j$ 时, 若 $a_{ij} = a_{ji}$, 则 $k_{ij} = k_{ji} = 0$, 系统可实现渐近稳定同步, 并使控制器结构简化。同理可用 Lyapunov 稳定性定理证明。

由于响应系统受所有驱动系统变量驱动, 采用线性反馈和非线性控制实现 2 个系统同步控制法, 即多变量驱动误差反馈控制同步法。该方法不需要分解系统, 不仅适用于超混沌系统, 而且适用于一般混沌系统, 如 Lorenz 系统^[11]。该方法给出了反馈参数的选择空间, 通过合理选择参数可以提高系统的同步性能。

1.3 同步性能指标及其与控制参数的关系

研究表明, 混沌同步控制器的控制参数对系统同步性能具有较大的影响, 如何选择控制参数使同步性能最优是混沌同步研究的重要内容。作者认为, 混沌同步系统的同步性能指标主要包括同步稳定性、同步鲁棒性、同步稳态误差、同步精度、同步建立时间、同步化区域和同步动态特性。分别讨论如下。

a. 同步稳定性是混沌同步系统的首要特性, 是系统正常工作的必要条件, 是实现保密通信的关键, 其定义是指不同初态的混沌系统满足 Lyapunov 渐近稳定条件, 即系统方程的解具有收敛性。稳定性又分为大范围(全局)渐近稳定性和小范围(局部)渐近稳定性。

b. 同步鲁棒性是指驱动系统与响应系统在系统参数失配的情况下仍然保持同步的性能。从系统实用的方面考虑, 系统的鲁棒性越好, 则系统越容易实现; 但从保密通信的方面考虑, 系统的鲁棒性越好, 其保密性越差, 这是一对矛盾, 在实际中必须综合考虑。

c. 同步稳态误差是指混沌系统达到同步后, 同步的两混沌信号实现同步的准确程度, 一般用 $\Delta\varphi$ 表示。

d. 同步精度是指产生的混沌信号与给定混沌信号在幅度、相位上的一致程度, 用 δ 表示。它与同步误差的关系为: $\delta = 10^{[\lg \Delta\varphi]}$, 其中 $[\lg \Delta\varphi]$ 表示不大于 $\lg \Delta\varphi$ 的最小整数^[12]。

e. 同步建立时间是混沌保密通信的重要指标, 是指响应信号满足给定同步精度所经历的过渡时间, 用 T_s 表示。为描述混沌系统的同步, 可采用如下方法计算同步精度:

$$p = \left[\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

其中: n 为超混沌系统的变量数。当 $p \leq \delta$ 时, 混沌

系统达到同步。

f. 同步化区域是指能使混沌系统同步的初值范围, R. He 等^[13] 已证明: 混沌系统初值在一定区域内(同步化区内), 响应系统的解是渐近稳定的, 即响应系统最终将与驱动系统同步。所以, 一种具有实际意义的同步方式应具有足够大的同步化区域。

g. 同步动态过程又称同步建立的过渡过程或瞬态过程, 同步动态过程一般表现为单调衰减或非单调衰减。非单调衰减说明同步过程中存在非同步化趋势, 应尽量克服。

研究表明, 控制参数与同步性能指标密切相关。合理选择控制参数可使响应系统的条件 Lyapunov 指数(E_{CL})由正变负, 使响应系统可控; 响应系统的 E_{CL} 全负是实现混沌同步控制的充分条件, 在大多数情况下, 也是必要条件; E_{CL} 越小, 则误差响应收敛越快, 同步建立时间越短; 当响应系统 E_{CL} 全负且显著小于零时, 一般可以保证有足够大的同步化区域^[14]。可见, 控制参数主要通过改变同步系统的 E_{CL} 而影响同步系统的同步性能。

2 仿真结果与讨论

Rössler 超混沌系统是 O. E. Rössler^[15] 于 1979 年发现的一个简单的四维振荡器模型, 该系统能在 2 个方向上产生双曲不稳定的超混沌吸引子, 其动力学方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_3; \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 + x_4; \\ \dot{x}_3 = b + x_1x_3; \\ \dot{x}_4 = -dx_3 + cx_4. \end{cases} \quad (6)$$

当系统参数 $a = 0.25, b = 3.00, c = 0.05, d = 0.50$ 时, 系统处于超混沌态。其吸引子如图 2 所示(系统初值为: $-10, -20, 10, 35$)。

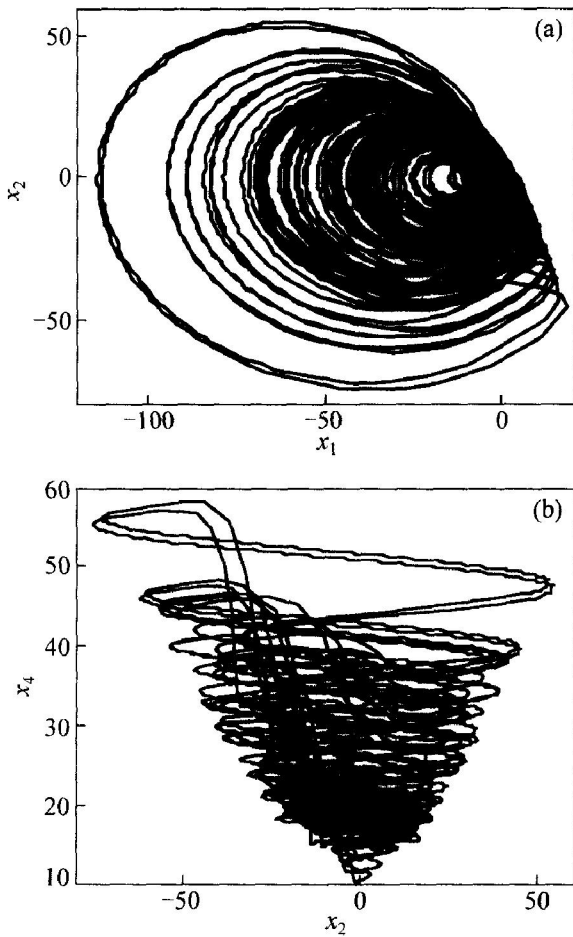
采用上述原理对其进行同步设计, 则驱动系统和响应系统分别为:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (b + x_1x_3); \quad (7)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (b + y_1y_3) + U. \quad (8)$$

系统同步控制律为:

$$U = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -d & k_{44} \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (x_1 x_3 - y_1 y_3) \quad (9)$$



(a) $x_2 - x_1$; (b) $x_4 - x_2$

图 2 Rössler 超混沌奇异吸引子

Fig. 2 Strange attractors of Rössler hyperchaotic system

其中当反馈参数满足: $k_{11} > 0, k_{22} > a, k_{33} > 0, k_{44} > c$ 时, 响应系统与驱动系统同步; 驱动系统与响应系统初态分别为 $(-20, -30, 20, 45)$ 和 $(-40, 25, 40, 15)$, 控制参数 $k_{ii} = 5$ 时, x_1 与 y_1 同步。其同步相图如图 3 所示。

仿真结果表明: 多变量驱动的错误反馈控制可以实现超混沌系统的同步; 为实现同步控制, 必须选择合适的反馈控制参数, 使响应系统可控; 在能实现同步控制的控制参数范围内, 选择控制参数可以提高超混沌同步系统的同步性能。系统的初态相同, 控制参数不同时, 误差收敛曲线如图 4 所示。其中, 误差 $|E| = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2]^{1/2}$ 。当同步稳态误差 $\Delta\varphi$ 为 10^{-4} 数量级

时, 系统的同步建立时间分别为 10.5, 5.4 和 2.8 s。可见, 控制参数越大, 即控制能量越大, 在一定的收敛误差范围内, 同步建立时间越短, 动态性能越好。

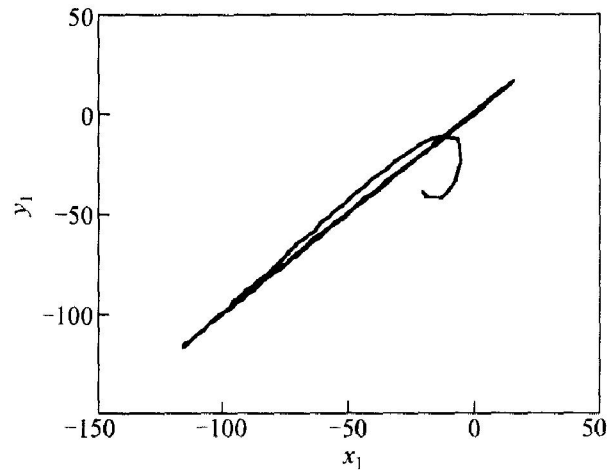
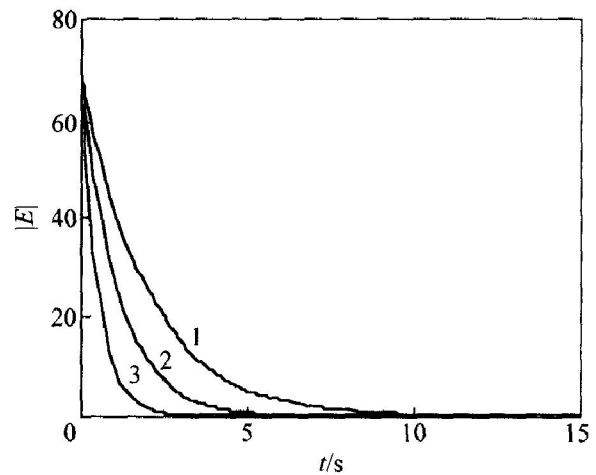


图 3 Rössler 超混沌系统同步相图

Fig. 3 Synchronization phase diagram of Rössler hyperchaotic system



控制参数($k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{44}$):

1-0.6, 0.6, 0.6, 0.6; 2-1.0, 1.0, 1.0, 1.0; 3-2.0, 2.0, 2.0, 2.0

图 4 不同控制参数时的误差收敛曲线

Fig. 4 Error convergent curves with different control parameters

3 结 论

a. 提出多变量驱动误差反馈控制同步方法, 设计一种能实现超混沌系统同步的多变量驱动误差反馈控制器, 确定了反馈参数的选择范围。

b. 提出描述同步系统性能的指标体系, 讨论控制器参数与同步性能的关系, 控制参数主要通过改变同步系统的条件 Lyapunov 指数而影响同步系统的同步性能。

c. 采用 Matlab 6.5 数值仿真软件对 Rössler

超混沌系统进行数值仿真,结果表明,多变量驱动误差反馈控制可实现超混沌系统的同步。该方法也适用于一般混沌系统的同步。

参考文献:

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems [J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821 - 824.
- [2] Pecora L M, Carroll T L. Driving system with chaotic signals [J]. *Physical Review A*, 1991, 44(4): 2347 - 2383.
- [3] 方锦清. 非线性系统中混沌控制方法、同步原理及其应用前景(II) [J]. *物理学进展*, 1996, 16(2): 137 - 201.
FANG Jin-qing. Control and synchronization of chaos in nonlinear systems and prospects for application (II) [J]. *Progress in Physics*, 1996, 16(2): 137 - 201.
- [4] 孙克辉, 高冬花, 张泰山. 混沌系统同步控制方法研究进展 [J]. *桂林电子工业学院学报*, 2004, 24(1): 22 - 25.
SUN Ke-hui, GAO Dong-hua, ZHANG Tai-shan. Survey of chaos synchronization control methods [J]. *Journal of Guilin Institute of Electronic Technology*, 2004, 24(1): 22 - 25.
- [5] Wu C W, Chua L O. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems [J]. *Int J Bifurcation and Chaos*, 1994, 4(4): 979 - 998.
- [6] Kocarev L, Parliza V. General approach for chaotic synchronization with application to communication [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 74(25): 5028 - 5031.
- [7] Matsumoto T, Chua L O, Kobayashi K. Hyperchaos: laboratory experiment and numerical confirmation [J]. *IEEE Transactions on CAS*, 1986, 33(11): 1143 - 1147.
- [8] Brucoli M, Carnimeo L, Grassi G. A method for the synchronization of hyperchaotic circuits [J]. *Int J Bifurcation and Chaos*, 1996, 6(9): 1673 - 1681.
- [9] Grassi G, Mascolo. Nonlinear observer design to synchronize hyperchaotic systems via a scalar signal [J]. *IEEE Transactions on CAS-I: Fundamental Theory and Applications*, 1997, 44(10): 1011 - 1014.
- [10] 王铁邦, 覃团发, 陈光旨. 超混沌系统的耦合同步 [J]. *物理学报*, 2001, 50(10): 1851 - 1855.
WANG Tie-bang, TAN Tuan-fa, CHEN Guang-zhi. Coupled synchronization of hyperchaotic systems [J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50(10): 1851 - 1855.
- [11] 罗晓曙. 用多变量驱动和线性反馈实现混沌同步化 [J]. *广西师范大学学报*, 1998, 16(2): 27 - 32.
LUO Xiao-shu. Synchronization of chaos by multi-variables driving and linear feedback [J]. *Journal of Guangxi Normal University*, 1998, 16(2): 27 - 32.
- [12] 张学义, 李殿璞, 陈实如, 等. 基于观测器的超混沌系统高精度同步方法 [J]. *电路与系统学报*, 2001, 6(4): 15 - 19.
ZHANG Xue-yi, LI Dian-pu, CHEN Shi-ru, *et al.* High precision synchronization of hyperchaotic system based on state observer [J]. *Journal of Circuits and Systems*, 2001, 6(4): 15 - 19.
- [13] He R, Vaidya P G. Analysis and synthesis of synchronous periodic and chaotic systems [J]. *Physical Review A*, 1992, 46(12): 7387 - 7392.
- [14] 何岱海, 徐健学, 陈永红, 等. 条件 Lyapunov 指数和时间 τ 条件 Lyapunov 指数研究 [J]. *电路与系统学报*, 2000, 5(2): 33 - 36.
HE Dai-hai, XU Jian-xue, CHEN Yong-hong, *et al.* Study on the conditional Lyapunov exponents and time τ Lyapunov exponents [J]. *Journal of Circuits and Systems*, 2000, 5(2): 33 - 36.
- [15] Rössler O E. An equation for continuous chaos [J]. *Physics Letters A*, 1976, 57(5): 397 - 398.