

钢-混凝土组合梁的非线性杆系有限元分析

周凌宇¹, 康习军², 余志武¹, 蒋丽忠¹

(1. 中南大学 土木建筑学院, 湖南长沙, 410075;
2. 中国航空工业第三设计研究院, 湖南长沙, 410004)

摘要: 根据截面应符合平截面假定等基本假设提出了预应力钢-混凝土简支组合梁全过程工作中钢梁下翼缘应力达到 $0.2f_{sy}$ 、钢梁下翼缘初始屈服、钢梁腹板下翼缘 $0.3h_w$ 高度处屈服及构件正截面破坏这 4 个特征状态的弯矩、曲率计算公式。基于这些特征点, 运用最小二乘法分析得到组合梁截面弯矩-曲率关系的解析表达式。此外, 利用该解析表达式建立了组合梁的有限元分析模型, 推导了组合梁的单元刚度矩阵, 编制了相应的非线性全过程分析程序。该方法考虑了混凝土压碎、钢梁材料硬化对结构性能的影响, 计算简单, 易于在计算机上实现, 计算结果与实测结果较吻合。

关键词: 有限元分析; 组合梁; 非线性; 刚度

中图分类号: TU311.1

文献标识码: A

文章编号: 1672-7207(2004)02-0316-06

The finite element analysis for composite beams of steel and concrete

ZHOU Ling-yu¹, KANG Xi-zhong², YU Zhi-wu¹, JIANG Li-jun¹

(1. College of Civil and Architecture Engineering, Central South University, Changsha 410075, China;
2. The Third Design & Research Institute of Aviation of China, Changsha 410075, China)

Abstract: A new method for nonlinear finite element analysis of composite beams of steel and concrete is presented. In this method, four key points in full work course of composite beams of steel and concrete and their formulas for moment and curvature are put forward. The four key points include the key point when the stress in lower wing of steel beam is up to $0.2f_{sy}$, when the lower wing of steel beam yield, when yielding at $0.3h_w$ height above the lower wing of the web and when the section is crash. With the keypoints, the analytical expressions of moment-curvature relationship of composite beams can be got by least-squares procedure. By the analytical expressions, the model for finite element analysis and the element stiffness matrix are set up. The compute program for the nonlinear analysis is programmed, which can calculate the effect of the concrete crash and hardening of the material stiffness exactly. The method is easy to be programmed, the calculated results are in conformity with tested results.

Key words: finite element analysis; composite beam; nonlinear analysis; stiffer

目前, 对于钢-混凝土组合结构, 常用的非线性分析模型有:

a. 层间模型^[1,2]。该模型计算简单, 但是不便于分析预应力钢筋的作用。

b. 多节点有限元模型^[3-7]。常用的有三节点、四节点、八节点等有限元模型, 其计算结果精确, 能用于分析结构局部受力和变形情况, 考虑了预应力、异形结构等多种复杂受力情况。但是其涉及的

收稿日期: 2003-03-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50208018)

作者简介: 周凌宇(1973-), 男, 湖南长沙人, 中南大学讲师, 博士, 从事结构工程研究与教学工作。

论文联系人: 周凌宇, 男, 博士; 电话: 0731-2656912(0), 13808411458(手机); E-mail: lyzhou@mail.csu.edu.cn

节点多,单元多,工作量大,较难推广应用。

c. 杆系模型^[8-12]。采用杆系模型计算简单,受力明确,因而应用广泛。

作者在杆系模型的基础上,提出一种新的钢-混凝土组合梁的分析方法。该方法首先提出了钢-混凝土组合梁全过程工作中4个特征状态(钢梁下翼缘应力达到 $0.2f_{sy}$ 、钢梁下翼缘初始屈服、钢梁腹板下翼缘 $0.3h_w$ 高度处屈服及构件正截面破坏)的弯矩、曲率计算公式,基于这些特征参数,运用最小二乘法分析得到组合梁截面弯矩-曲率关系的解析表达式。然后利用弯矩曲率关系的解析表达式建立简支组合梁的有限元分析模型。

1 基本假设

为简化计算,进行如下基本假定:

- a. 截面应变符合平截面假定;
- b. 忽略钢梁与混凝土翼板之间的相对滑移;
- c. 混凝土受压的应力应变关系采用 Hognestad 模型^[13]。在此,将应力应变关系表述为: $\sigma_c = f_c(\epsilon_c)$ 。
- d. 钢材应力应变关系符合理想弹塑性曲线^[14]。

2 不同特征点弯矩曲率的计算

2.1 钢梁下翼缘应力达到 $0.2f_{sy}$ 时对应的弯矩 $M_{0.2y}$ 和曲率 $\varphi_{0.2y}$

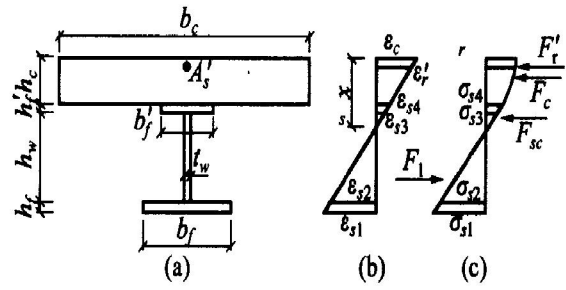
连续组合梁正弯矩区受拉边缘钢梁应力达屈服强度的20%时应力应变分布如图1所示。其中: ϵ_{s1} , ϵ_{s2} , ϵ_{s3} , ϵ_{s4} 分别为钢梁下翼缘和上翼缘上、下表面应变; σ_{s1} , σ_{s2} , σ_{s3} 和 σ_{s4} 为其相应应力; ϵ'_r 和 ϵ_c 为钢筋和混凝土上表面应变。可见,在钢梁下翼缘达到屈服应变的20%时,混凝土和钢梁处于弹性工作状态。第1类“T”型截面的塑性中和轴位于混凝土翼板内,条件是混凝土翼板全截面受压的压力合力大于钢梁全截面受拉时的拉力合力,即 $F_g \geq F'_r \geq F_g$ 。否则为第2类“T”型截面,中和轴位于钢梁内。当中和轴位于边界时,按图1可推导得到:

$$F_g = b_c \int_0^{h_c} \sigma_c(x) dx,$$

$$F'_r = 0.2f_{sy} A'_r \frac{h_c - a'_r}{h_f + h_w + h'_f},$$

$$F_g = 0.1(h_f b_f + h_w t_w + h'_f b'_f) f_{sy}.$$

其中: b_c , b'_f , b_f 分别为混凝土板、钢梁上、下翼缘宽度; h_c , h'_f 和 h_f 为混凝土板、钢梁上、下翼缘宽度; A'_r 为钢筋面积。



(a) — 梁截面图; (b) — 应变分布图; (c) — 应力分布图

图1 钢梁下翼缘应力达 $0.2f_{sy}$ 中和轴位于砼板下边缘时简图

Fig. 1 The stress and strain when the stress in lower flange up to $0.2f_{sy}$ and the neutral axis at concrete board edge

对于第1类截面,设中和轴距混凝土板顶距离为 x , 其应变、应力分布如图2(b)和2(c)所示。根据平截面假定和材料的应力应变关系,有:

$$\epsilon_c = \frac{x}{h_f + h_w + h'_f + h_c - x} \cdot \epsilon_{s1}; \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{sy} = 0.2f_{sy}, \\ \sigma_{s2} = E_s \cdot \frac{h'_f + h_w + h_c - x}{h_f + h_w + h'_f + h_c - x} \cdot \epsilon_{s1}, \\ \sigma_{s3} = E_s \cdot \frac{h'_f + h_c - x}{h_f + h_w + h'_f + h_c - x} \cdot \epsilon_{s1}, \\ \sigma_{s4} = E_s \cdot \frac{h_c - x}{h_f + h_w + h'_f + h_c - x} \cdot \epsilon_{s1}, \\ \sigma'_r = E_r \cdot \frac{x - a'_r}{h_f + h_w + h'_f + h_c - x} \cdot \epsilon_{s1}. \end{cases} \quad (2)$$

其中: ϵ_{s1} 为钢梁下翼缘应变; E_s 为钢梁弹性模量。组合梁跨中截面拉力合力为:

$$F_s = F_1 + F_2 + F_3. \quad (3)$$

其中: F_1 , F_2 和 F_3 分别为钢梁下翼缘、腹板和上翼缘中的拉力合力。

$$F_1 = \frac{0.2f_{sy} + \sigma_{s2}}{2} h_f b_f;$$

$$F_2 = \frac{\sigma_{s2} + \sigma_{s3}}{2} h_w t_w;$$

$$F_3 = \frac{\sigma_{s3} + \sigma_{s4}}{2} h'_f b'_f.$$

混凝土板中压力合力为:

$$F_c = b_c \int_0^x \sigma_c(y) dy = \frac{f_c b_c \epsilon_c x}{\epsilon_0} - \frac{f_c b_c \epsilon_c^2 x}{3 \epsilon_0^2}. \quad (4)$$

钢筋压力合力为:

$$F'_r = A'_r \sigma'_r. \quad (5)$$

根据截面平衡条件: $F_c + F'_r = F_s$, 据式(3)~(5)可求出混凝土受压区高度 x , 将 F_1 , F_2 , F_3 和

F_4 分别对钢筋作用点求弯矩并叠加, 并设混凝土合力对混凝土受压区钢筋作用点的弯矩为 M_c , 得:

$$M_{0.2y} = F_1(\frac{1}{2}h_f + h_w + h_f' + h_c - a_r') + F_2(\frac{2}{3}h_w + h_f' + h_c - a_r') + F_3(\frac{1}{2}h_f' + h_c - a_r') + M_{c1} \quad (6)$$

式中: $M_{c1} = -b_c \int_0^x \sigma_c(x)(x - a_r') dx$; a_s' 为混凝土保护层厚度。

$$\varphi_{0.2y} = \frac{0.2\varepsilon_y}{h_f + h_w + h_f' + h_c - x} \quad (7)$$

第 2 类截面图如图 2(d) 和 2(e) 所示。同理可得:

$$M_{0.2y} = M_{c2} + b_f h_f' f_{sy} \frac{x - h_c - 0.5h_f}{10(h_f + h_w + h_f' + h_c - x)} \cdot (\frac{1}{2}h_f + h_w + h_f' + h_c - a_s) + b_f' h_f' f_{sy} \cdot \frac{2x - 2h_c - h_f}{10(h_f + h_w + h_f' + h_c - x)} \cdot (h_c + \frac{1}{2}h_f' - a_s) + t_w h_w f_{sy} \frac{(x - h_c)(h_f + h_w + h_c - x)}{10(h_f' + h_w + h_c - x)} \quad (8)$$

式中: $M_{c2} = b_c \int_{x-h_c}^x \sigma_c(x)(h_c - a_r' - x) dx$;

$$\varphi_{0.2y} = \frac{\varepsilon_y}{5(h_f + h_w + h_f' + h_c - x)} \quad (9)$$

2.2 钢梁下翼缘初始屈服弯矩 M_y 和初始曲率 φ_y

对于第 1 类截面, 设中和轴距混凝土板顶距离为 x (见图 3(b), 3(c)), 则:

$$M_y = F_1(\frac{1}{2}h_f + h_w + h_f' + h_c - a_r') + F_2(\frac{1}{2}h_w + h_f' + h_c - a_r') + F_3(\frac{1}{2}h_f' + h_c - a_r') + M_{c1} \quad (10)$$

$$\varphi_y = \frac{\varepsilon_y}{h_f + h_w + h_f' + h_c - x} \quad (11)$$

对于第 2 类截面(见图 3(d), 3(e)), 设受压区高度为 x , 由截面平衡可知:

$$M_y = M_{c2} + b_f h_f' f_{sy} \frac{x - h_c - 0.5h_f}{2(h_f + h_w + h_f' + h_c - x)} \cdot (\frac{1}{2}h_f + h_w + h_f' + h_c - a_s) + b_f' h_f' f_{sy} \frac{2x - 2h_c - h_f}{2(h_f + h_w + h_f' + h_c - x)} \cdot (h_c + \frac{1}{2}h_f' - a_s) + t_w h_w f_{sy} \cdot \frac{(x - h_c) \cdot (h_f + h_w + h_c - x)}{2(h_f + h_w + h_f' + h_c - x)}; \quad (12)$$

$$\varphi_y = \frac{\varepsilon_y}{2h_f + h_w + h_c - x} \quad (13)$$

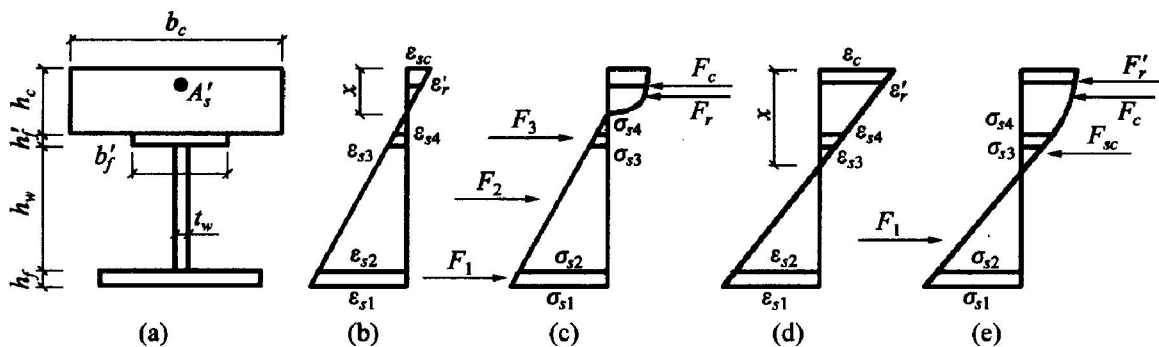
2.3 钢梁腹板 30% 高度处截面屈服的 M_w 和 φ_w

试验结果表明, 组合梁发生正截面破坏前, 钢梁腹板基本进入屈服状态, 为较合理地描述腹板屈服对 $M-\varphi$ 曲线非线性段的影响, 选取钢梁腹板屈服进入 $0.3h_w$ 时对应的弯矩和曲率值作为特征点, 并记为 (M_w, φ_w) 。对于第 1 类截面, 设中和轴距混凝土板顶高度为 x , 应变、应力如图 4(b) 和 4(c) 所示。

$$M_w = h_f b_f f_{sy} (\frac{1}{2}h_f + h_w + h_f' + h_c - a_r') + h_w t_w f_{sy} (\frac{1}{2}h_w + h_f + h_c - a_r') + h_f' b_f' f_{sy} \cdot \frac{(2h_c + h_f' - 2x)(0.5h_f' + h_c - a_r')}{2(h_c + h_f' + 0.7h_w - x)} + M_{c1}; \quad (14)$$

$$\varphi_w = \frac{\varepsilon_y}{h_c + h_f' + 0.7h_w - x} \quad (15)$$

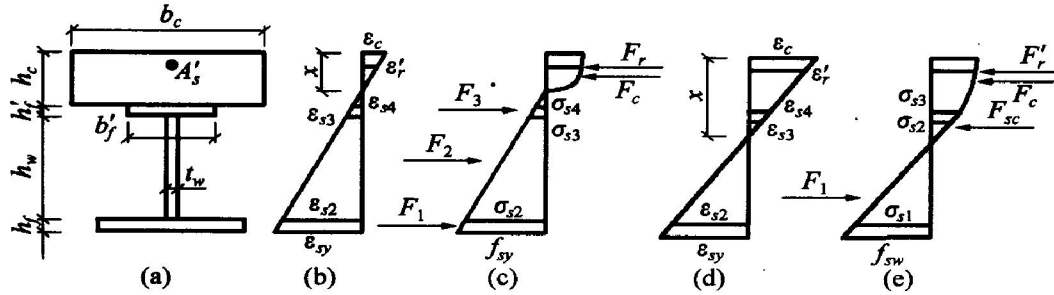
对于第 2 类截面, 设中和轴距混凝土板顶的高度为 x (见图 4(d), 4(e))。



(a) — 梁截面图; (b) — 第 1 类截面应变分布图; (c) — 第 1 类截面应力分布图; (d) — 第 2 类截面应变分布图; (e) — 第 2 类截面应力分布图

图 2 钢梁下翼缘应力达 $0.2f_y$ 时的计算简图

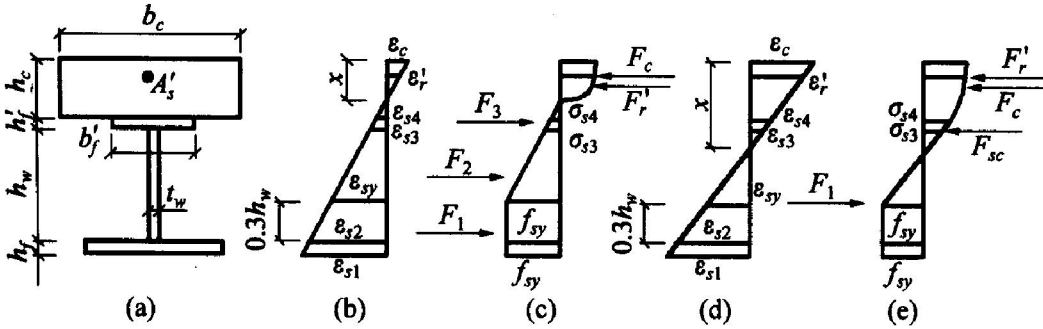
Fig. 2 The stress and strain $0.2f_y$ when the stress in lower flange up to



(a) 一截面尺寸; (b) 一第 1 类截面应变图; (c) 一第 1 类截面应力图; (d) 一第 2 类截面应变图; (e) 一第 2 类截面应力图

图 3 钢梁下翼缘屈服时的计算简图

Fig. 3 The stress and strain when the stress in lower flange up to f_{sy}



(a) 一截面尺寸; (b) 一第 1 类截面应变图; (c) 一第 1 类截面应力图; (d) 一第 2 类截面应变图; (e) 一第 2 类截面应力图

图 4 正弯矩区钢梁腹板于 $0.3h_w$ 屈服时计算简图

Fig. 4 The stress and strain when the yielded height in web up to $0.3h_w$

and the neutral axis in concrete board

$$M_w = M_{c2} + h_f b_f (h_w + h_f' + 0.5h_f + x - a_s') \sigma_{sy} + 0.3h_w t_w (0.85h_w + h_f' + x - a_s') \sigma_{sy} + 0.5(0.7h_w + h_f' + h_c - x) t_w \left(\frac{7}{15}h_w + \frac{2}{3}h_f' + \frac{1}{3}h_c - a_s' + \frac{1}{3}x \right) \sigma_{sy} - F_{sc} (h_f' + h_c - a_s'); \quad (16)$$

$$\varphi_w = \frac{\epsilon_{sy}}{0.7h_w + h_f' + h_c - x}. \quad (17)$$

2.4 构件正截面破坏时的 M_u 和 φ_u

假设构件具有足够的延性导致组合截面的正截面破坏时, 混凝土压碎, 混凝土板受压边缘达到混凝土极限压应变 ϵ_{cu} , 钢梁全截面均进入塑性状态, 其计算简图如图 5 所示。根据平截面假定, 有:

$$M_u = h_f b_f f_{sy} (h_f' + h_w + h_c + 0.5h_f - 2a_s) + h_f' b_f' f_{sy} (0.5h_f' + h_c - 2a_s) + h_w t_w f_{sy} \left(\frac{1}{2}h_w + h_f' + h_c - a_c \right) + M_{c1}; \quad (18)$$

$$\varphi_u = \frac{\epsilon_{cu}}{x}. \quad (19)$$

2.5 正弯矩截面的弯矩曲率关系表达式

在综合考虑钢-混凝土连续组合梁正弯矩区非线性全过程分析的基础上, 提出描述截面弯矩曲率关系的数学模型。根据弯矩曲率曲线的基本形状,

采用双曲线形式^[15], 即:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M - M_0}{a |M| + b}. \quad (20)$$

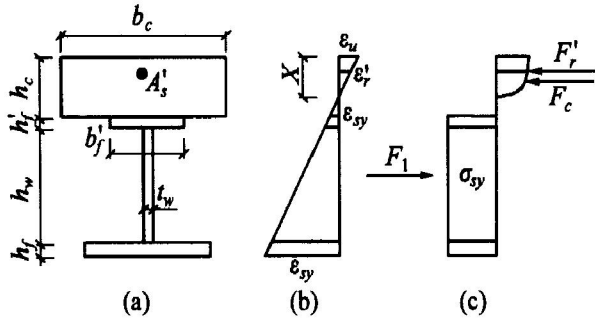
式中: a 和 b 为待定常数, 其值由特征点来确定。利用最小二乘法, 根据 4 个特征点确定 a 和 b 。

$$\begin{cases} T_1 = \sum_{i=1}^4 M_i = M_{0.2y} + M_y + M_w + M_u; \\ T_2 = \sum_{i=1}^4 M_i^2 = M_{0.2y}^2 + M_y^2 + M_w^2 + M_u^2; \\ T_3 = \sum_{i=1}^4 (M_i / \varphi_i) = M_{0.2y} / \varphi_{0.2y} + M_y / \varphi_y + M_w / \varphi_w + M_u / \varphi_u; \\ T_4 = \sum_{i=1}^4 (M_i^2 / \varphi_i) = M_{0.2y}^2 / \varphi_{0.2y} + M_y^2 / \varphi_y + M_w^2 / \varphi_w + M_u^2 / \varphi_u. \end{cases} \quad (21)$$

$$a = \frac{T_1 T_3 - 3T_4}{T_1^2 - 3T_2}.$$

$$b = \frac{T_1 T_4 - T_2 T_3}{T_1^2 - 3T_2}.$$

求得常数 a 和 b 之后, 钢-混凝土组合梁钢的 $M-\varphi$ 模型即可惟一确定。



(a) 一截面尺寸图; (b) 一应变分布图; (c) 一应力分布图

图 5 正弯矩区极限弯矩计算简图

Fig. 5 The stress and strain when the section crushed

3 计算模型

模型采用杆系单元, 为能精确计算每级荷载作用下梁的挠度和内力分布, 沿梁长度采用密集单元划分, 单元梁长可分为 20~ 60 mm, 单元节点为刚节点, 计算出每级荷载下各节点的竖向位移和转角。结构的非线性分析采用切线刚度迭代法^[16]。在每级荷载作用下根据切线刚度对单元刚度进行修正。由于单元长度很小, 故假设单元在每级荷载作用下刚度沿梁长不变。计算单元刚度时忽略剪切变形影响。

4 计算结果比较

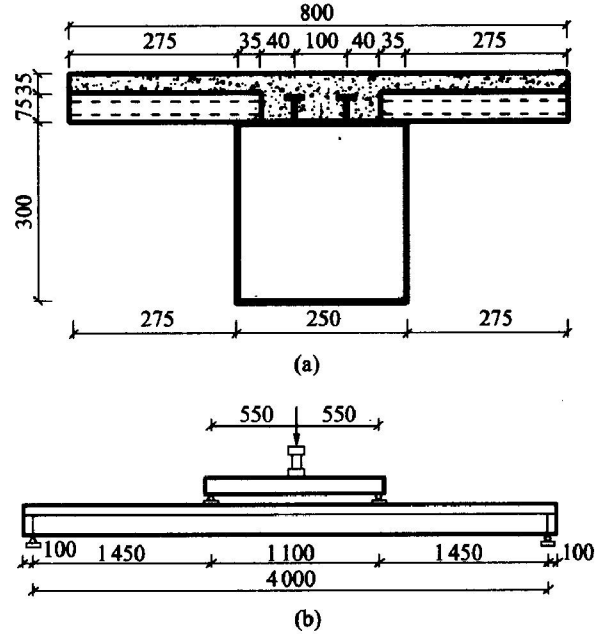
采用编制的计算程序, 对两榀简支组合梁 SZB-5 和 SZB-6 进行计算分析。SZB-5 为预应力钢-混凝土叠合板组合梁, SZB-6 为非预应力试件。试件主要参数见表 1, 试件尺寸及加载方式如图 6 所示。

表 1 试件主要参数

Table 1 The main parameters of samples

试件	纵向配筋率 / %	预应力筋拉力 / kN	混凝土 等级	栓钉直径(间距) / mm
SZB-5	0.64	109.5	C30	13(75)
SZB-6	0.64	0	C30	13(75)

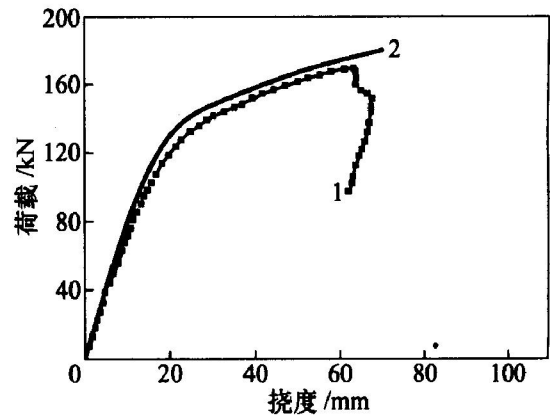
比较试件 SZB-5 和 SZB-6 计算荷载挠度曲线与实测结果(如图 7 和图 8 所示)可以看出, 计算结果和实测结果在弹性段和弹塑性阶段较吻合。



单位: mm

图 6 试件尺寸示意图

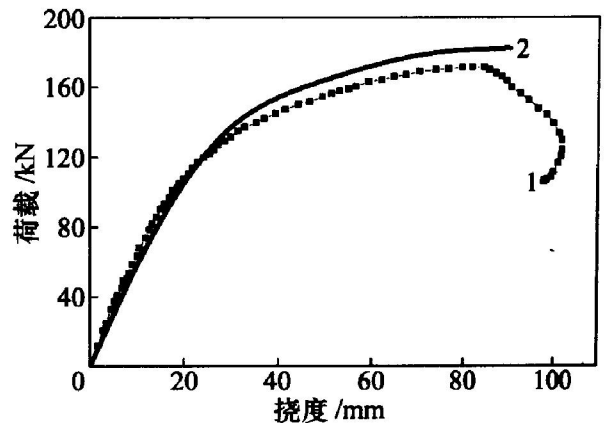
Fig. 6 The samples and the application



1—实测曲线; 2—计算曲线

图 7 SZB-5 计算荷载挠度曲线与实测结果比较

Fig. 7 The tested and calculated deformation of SZB-5



1—实测曲线; 2—计算曲线

图 8 SZB-6 计算荷载挠度曲线与实测结果比较

Fig. 8 The tested and calculated deformation of SZB-6

5 结 论

a. 根据截面应符合平截面假定等基本假设建立了预应力钢-混凝土简支组合梁4个特征状态(即包括钢梁下翼缘应力达到 $0.2f_{sy}$ 、钢梁下翼缘初始屈服、钢梁腹板下翼缘 $0.3h_w$ 高度处屈服及构件正截面破坏)的弯矩、曲率计算公式。

b. 基于4个特征点,运用最小二乘法分析得到简支组合梁截面弯矩-曲率关系的解析表达式。根据解析表达式建立了预应力简支组合梁的有限元分析模型,推导了组合梁的单元刚度矩阵,编制了相应的非线性全过程分析程序。该方法考虑了混凝土压碎、钢梁材料硬化、预应力对结构性能的影响,计算结果与实测结果较吻合。

参考文献:

- [1] 宗周红,车惠民,房贞政. 预应力钢-混凝土组合梁有限元非线性分析[J]. 中国公路学报, 2000, 13(2): 48-51.
ZONG Zhouhong, CHE Huimin, FANG Zheng. Nonlinear analysis of prestressed composite steel-concrete beams by the finite element method [J]. China Journal of Highway and Transport, 2000, 13(2): 48-51.
- [2] 吕西林,金国芳. 钢筋混凝土结构非线性有限元理论与应用[M]. 上海: 同济大学出版社, 1996: 57-59.
LU Xilin, JIN Guofang. The theory and practice for nonlinear finite element analysis of reinforced structure [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1996: 57-59.
- [3] Haufe A, Menrath H. Numerical simulation of high strength steel-high strength concrete composite structures [A]. XIAO Yun. Proceedings of 6th ASCCS conference [C]. Los Angle: ASCCS-6 Secretariat, 2000: 1131-1140.
- [4] Ammed E. Finite element elastic analysis of profiled steel sheeting dry board single span composite panel [A]. XIAO Yun. Proceedings of 6th ASCCS conference [C]. Los Angle: ASCCS-6 Secretariat, 2000: 1083-1090.
- [5] Noguchi H, Uchida K. Fem analysis of hybrid structural frames with R/C columns and steel beam [A]. XIAO Yun. Proceedings of 6th ASCCS conference [C]. Los Angle: ASCCS-6 Secretariat, 2000: 1099-1106.
- [6] 周凌宇,余志武,蒋丽忠. 钢-混凝土连续组合梁非线性有限元分析[J]. 长沙铁道学院学报, 2003, 21(2): 9-14.
ZHOU Lingyu, YU Zhiwu, JIANG Lizhong. Nonlinear finite element analysis for prestressed steel and concrete composite beam [J]. Journal of Changsha Railway University, 2003, 21(2): 9-14.
- [7] 周世军. 钢筋混凝土箱形梁的线性和非线性有限元分析与模型试验研究[D]. 北京: 北方交通大学桥梁与隧道工程系, 1995.
ZHOU Shijun. Linear and nonlinear finite element analysis and model experiments of reinforced concrete box girder [D]. Beijing: Bridge and Tunnel Department, North Jiaotong University, 1995.
- [8] 舒赣平,吕志涛,段建中. 预应力连续钢梁的理论分析和试验研究[J]. 东南大学学报, 1994, 24(3): 40-46.
SHU Ganping, LU Zhitao, DUAN Jianzhong. Theoretical and experimental research of prestressed steel continuous beam [J]. Journal of Southeast University, 1994, 24(3): 40-46.
- [9] 周凌宇. 预应力钢-混凝土连续组合梁受力性能分析[D]. 长沙: 长沙铁道学院土木建筑学院, 1998.
ZHOU Lingyu. The analysis of prestressed steel and concrete continuous beams [D]. Changsha: College of Civil and Architecture Engineering, Changsha Railway University, 1998.
- [10] 盛兴旺. 预应力混凝土斜交箱形梁分析理论与试验研究[D]. 长沙: 中南大学土木建筑学院, 2000.
SHENG Xingwang. Analytic theory and model test of prestressed concrete skew box girders [D]. Changsha: College of Civil and Architecture Engineering, Central South University, 2000.
- [11] Gattesco N. Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection [J]. Journal of Constructional Steel Research, 1999, 152(3): 195-218.
- [12] 王荣辉,曾庆元,王海龙. 板桁组合钢梁的非线性有限元分析[J]. 土木工程学报, 2000, 33(2): 56-62.
WANG Ronghui, ZENG Qingyuan, WANG Hailong. Nonlinear finite element analysis of plate truss composite steel girder [J]. China Civil Engineering Journal, 2000, 33(2): 56-62.
- [13] 过镇海. 钢筋混凝土原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999: 23-24.
GUO Zhenhai. The theory of reinforced concrete [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999: 23-24.
- [14] 黄克智,黄永刚. 固体本构关系[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999: 103-105.
HUANG Kezhi, HUANG Yonggang. Solid constitutive relation [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999: 103-105.
- [15] 方志. 钢筋混凝土平面及空间框架非线性分析[D]. 长沙: 湖南大学土木系, 1990.
FANG Zhi. Nonlinear analysis of reinforced concrete plane and space frame [D]. Changsha: Department of Civil Engineering, Hunan University, 1990.
- [16] 王勖成,邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法(第2版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997: 484-498.
WANG Xucheng, SHAO Min. The theory of finite element method and numerical method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997: 484-498.