

基于近哈密顿系统的 Hopf 分岔

王桥医^{1,2}, 徐先懂², 唐文评¹

(1. 株洲工学院 机械系, 湖南株洲, 412008;
2. 中南大学 机电工程学院, 湖南长沙, 410083)

摘要: 针对三维时变小扰动哈密顿系统的 Hopf 分岔的理论仅仅适用于自治系统的情况, 运用 Melnikov 方法研究了时变小扰动哈密顿系统周期轨道发生 Hopf 分岔的条件, 并将这些条件应用于一类三维时变小扰动非自治系统, 使之能用于非自治系统。研究表明, 所研究的系统还存在复杂而有规律的环面分岔行为。

关键词: 非线性动力学; 小扰动; 时变; 哈密顿系统; Melnikov 方法; Hopf 分岔

中图分类号: O322 文献标识码: A 文章编号: 1672-7207(2004)02-0258-04

Hopf bifurcation based on a three-dimensional and time-dependent perturbation Hamiltonian system

WANG Qiao-yi^{1,2}, XU Xian-dong², TANG Wen-ping¹

(1. Department of Mechanical Engineering, Zhuzhou Institute of Technology, Zhuzhou 412008, China;
2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: This paper develops a new method to study the Hopf bifurcations of periodic orbits in three-dimensional, time dependent perturbation of planar Hamiltonian differential equations, and gets a series of concise formula to simplify the Hopf bifurcation conditions by some mathematical skill and subharmonic Melnikov method. The Hopf bifurcation existence parameter domains described in an equation is deduced, elliptic functions and elliptic integration are used to calculate these parameter domains. In order to verify the method, the system is integrated at the bifurcation existence parameter domains with numerical method. The results indicate that the method is well coincided with the numerical results. Further numerical integration indicates that more complicated torus bifurcation exist in the example system.

Key words: nonlinear dynamics; perturbation; time-dependent; Hamiltonian system; Melnikov method; Hopf bifurcation

三维时变小扰动哈密顿系统的数学模型可写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) + \mathcal{G}_1(x, y, z, t; \mu), \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) + \mathcal{G}_2(x, y, z, t; \mu), \\ \dot{z} = \mathcal{G}_3(x, y, z, t; \mu). \end{cases} \quad (1)$$

其中: ε 为小扰动参数, $\varepsilon \ll 1$ 。

K.A. Rabbins 等对该类系统进行了研究^[1-5], S. Wiggins 等则利用 Melnikov 方法对这类系统的周期轨道存在性、稳定性、鞍结分岔、Hopf 分岔以及同宿分岔进行了研究^[6,7], 但其 Hopf 分岔的方法仅仅

收稿日期: 2002-10-06

基金项目: 湖南省重点学科建设项目(2002-06); 湖南省教育厅科学研究项目(02C658)

作者简介: 王桥医(1966-), 男, 湖南湘乡人, 株洲工学院副教授, 中南大学博士研究生, 从事机械设计、系统动力学及机电液一体化技术研究

论文联系人: 王桥医, 男, 博士研究生; 电话: 0733-2622631(H), 13973331265(手机); E-mail: wangqiaoyi1989@163.com

适用于自治系统。为此, 作者在此基础上, 对其 Hopf 分岔条件进行研究, 使之能用于非自治系统。并以一类三维时变小扰动非自治系统为例, 结合数值方法进行验证。

1 Hopf 分岔条件及其简化

设系统(1) 满足^[4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) = \frac{\partial H}{\partial y'}, \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) = \frac{\partial H}{\partial x'}, \\ \dot{z} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $H(x, y, z)$ 为哈密顿函数。因此, 式(2) 可视为带参数的平面哈密顿系统。

对系统(1) 进行作用角变换, 即

$$(x(I, \theta), y(I, \theta), z) \rightarrow (I(x, y, z), \theta(x, y, z), z),$$

则系统(1) 变为

$$\begin{cases} I = \varepsilon \left(\frac{\partial I}{\partial x} g_1 + \frac{\partial I}{\partial y} g_2 + \frac{\partial I}{\partial z} g_3 \right) \equiv \mathcal{F}(I, \theta, z, t; \mu), \\ \theta = \Omega(I, z) + \varepsilon \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} g_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y} g_2 + \frac{\partial \theta}{\partial z} g_3 \right) \equiv \Omega(I, z) + \mathcal{G}(I, \theta, z, t; \mu); \\ \dot{z} = \mathcal{E}g_3. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\Omega(I, z) = \frac{\partial H(I, z)}{\partial I}$ 。当 $\varepsilon = 0$ 时,

$$\begin{cases} I = I_0, \\ \theta = \Omega(I_0, z_0)t + \theta_0, \\ z = z_0. \end{cases} \quad (4)$$

由此可建立方程(3) 的 Poincare 映射 P_ε^m :

$$(I_0, \theta_0, z_0) \rightarrow (I_0, \theta_0, z_0) + (0, mT \Omega(I_0, z_0), 0) + \varepsilon(I_1(mT, I_0, \theta_0, z_0; \mu); \theta_1(mT, I_0, \theta_0, z_0; \mu), z_1(mT, I_0, \theta_0, z_0; \mu)) + O(\varepsilon^2). \quad (5)$$

由文献[4] 可知, 在 (I_0, θ_0, z_0) 附近, 若下列条件满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial I_0} \neq 0 \text{ 或 } \frac{\partial \Omega}{\partial z_0} \neq 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial I_0} \frac{\partial (M_1, M_3)}{\partial (\theta_0, z_0)} + \frac{\partial \Omega}{\partial z_0} \frac{\partial (M_1, M_3)}{\partial (I_0, \theta_0)} \neq 0, \\ M_1(I_0, \theta_0, z_0; \mu) = M_3(I_0, \theta_0, z_0; \mu) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

则 Poincare 映射 P_ε^m 存在以 m 为周期的不动点。

通过计算(5) 式关于 (I_0, θ_0, z_0) 处的 Jacobi 矩阵

的特征值可知, 若由参数确定的上述不动曲线进一步满足下列条件^[4]:

$$\Delta_2(I_0, \theta_0, z_0; \mu_0) < 0; \quad (7a)$$

$$\left(\Delta_1 - \frac{\Delta_4}{\Delta_2} - \Delta_2 \right) |_{(I_0, \theta_0, z_0, \mu_0)} = 0; \quad (7b)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left(\Delta_1 - \frac{\Delta_4}{\Delta_2} - \Delta_2 \right) |_{(I_0, \theta_0, z_0, \mu_0)} \neq 0; \quad (7c)$$

$$\Delta_4(I_0, \theta_0, z_0; \mu_0) \neq 0, \quad (7d)$$

则系统(1) 将发生 Hopf 分岔。通过推导可得:

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \int_0^{mT} \left(\frac{\partial F}{\partial I_0} + \frac{\partial G}{\partial \theta_0} + \frac{\partial g_3}{\partial z_0} \right) dt. \quad (8)$$

再据式(4), 有:

$$R(I_0, \theta_0, z_0; \mu) \equiv \Delta_1 - \Delta_2 = \int_0^{mT} \left(\frac{\partial F}{\partial I} + \frac{\partial G}{\partial \theta} + \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) dt. \quad (9)$$

利用式(3) 和(13) 以及作用角变换的保面积性, 有:

$$\begin{aligned} R(I_0, \theta_0, z_0; \mu) &= \int_0^{mT} I \frac{\partial}{\partial I} \left(-\frac{\partial y}{\partial \theta} g_1 + \frac{\partial x}{\partial \theta} g_2 \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial y}{\partial I} g_1 - \frac{\partial x}{\partial I} g_2 \right) + \frac{\partial g_3}{\partial z} \Big| dt = \\ &\quad \int_0^{mT} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

由于式(10) 得到简化, 故式(7b) 和(7c) 可以用于非自治系统。

2 算 例

考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - x^3 + \varepsilon[-\delta y + \alpha z + \beta x^2 y \cos(\alpha)], \\ \dot{z} = \varepsilon[z + \lambda x^2 \cos(\alpha)]. \end{cases} \quad (11)$$

非扰动系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - x^3, \\ \dot{z} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

在相空间 z 为任何常数的平面上, $(0, 0)$ 为方程(12) 的中心, 并且存在一簇包围该中心的闭轨迹, 其参数方程为

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sqrt{\frac{2k^2}{1-2k^2}} M\left(\frac{t}{\sqrt{1-2k^2}}, k\right); \\ y_k(t) &= -\frac{\sqrt{2k^2}}{1-2k^2} N\left(\frac{t}{\sqrt{1-2k^2}}, k\right). \end{aligned}$$

式中: M, N 分别为关于 $\frac{t}{\sqrt{1-2k^2}}$ 和 k 的函数; $0 < k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

闭轨的周期为 $T_1(k) = 4 \sqrt{1-2k^2} K(k)$, 其中, $K(k)$ 为第 1 类完全椭圆积分^[8,9]。

对于扰动系统, 计算共振条件 $T_1(k) = \frac{m}{n} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ 下的 Melnikov 函数为(其中, m 和 n 互质):

$$M_1(k, \theta, z) = -\delta J_1 + \alpha J_2 z + \beta J_3 \cos \theta;$$

$$M_3(k, \theta, z) = T_1 z + \gamma J_3 \cos \theta.$$

其中:

$$J_1 = \frac{8n[(2k^2-1)E(k) + k'^2 K(k)]}{3(1-2k^2)^{3/2}};$$

$$J_2 = \begin{cases} \frac{m\pi}{120(1-2k^2)^{5/2} K^5(k)} \{64\pi K^4(k) \cdot \\ (k^4 + k'^2) - m\pi^2 [m^2 \pi^2 + 16K^2(k)(m+1) + \\ 4(m-2)k^2 K^2(k)]\} \cosh \left[\frac{\pi m K(k')}{2K(k)} \right], \\ n = 1, m \text{ 为偶数,} \\ 0, \text{ 其他.} \end{cases}$$

$$J_3 = \frac{2}{\sqrt{1-2k^2}} \frac{m\pi}{K(k)} \cosh \left[\frac{m\pi K(k')}{2K(k)} \right].$$

$$R(k, z, \theta) = (1-\delta+\alpha)T_1 + \beta J_3 \cos \theta.$$

当 $M_1(k, \theta, z) = 0, M_3(k, \theta, z) = 0$ 时,

$$R - \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = (1-\delta)T_1 - \frac{\beta \delta J_1 J_3}{\alpha \gamma J_3 + \beta J_2} + \frac{\alpha \gamma J_1 J_3}{\beta J_2}.$$

(13)

由此可得出 Hopf 分岔条件:

$$\cos \theta = \frac{\delta T_1 J_1}{\beta T_1 J_2 - \alpha \gamma J_1 J_3} \text{ (不动点条件); (14a)}$$

$$\beta J_2 \sin \theta > 0; \text{ (14b)}$$

$$\alpha \gamma J_1 J_3 \sin \theta - \beta T_1 J_2 \sin \theta \neq 0; \text{ (14c)}$$

$$R - \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 0. \text{ (14d)}$$

取 λ 为分岔参数, 有

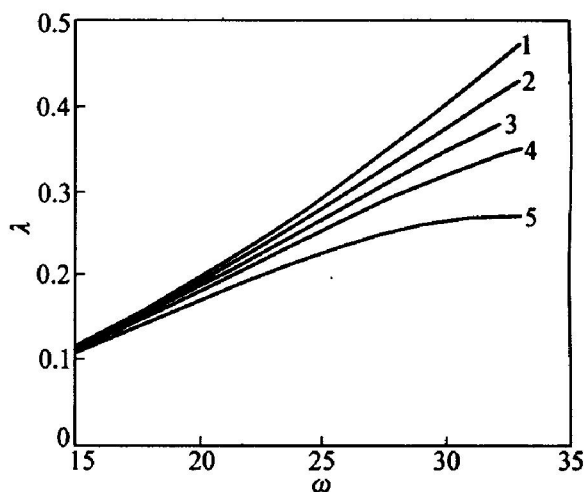
$$\frac{d}{d\lambda} \left(R - \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) \neq 0. \text{ (14e)}$$

由上述分岔条件, 可得到系统(11)发生 Hopf 分岔的分岔曲线(见图 1)。

根据图 1 所得的分岔值, 分别在每一曲线上任取一组参数, 对系统(11)进行积分。图 2 显示了 m 为 4 时数值积分在 Poincare 截面上所得的结果, 反映了

周期 4 在 Poincare 截面上形成的不动点分岔对应 Hopf 圈的情形。可见, 通过理论确定的 Hopf 分岔值与数值积分的结果较吻合, 从而证明了该方法的正确性。

据 $m=4$ 时对应的参数值, 进行数值计算, 发现当 $\lambda=0.303$ 时, 不变圈开始破裂, 每个不变圈渐渐形成了由 5 个不变圈组成的不变圈链(如图 3 所示); 当 λ 渐渐增大时, 不变圈链更加清晰, 这些不变圈上的运动是拟周期运动。将 λ 的值进一步增大, 不变圈又开始破裂, 每个不变圈渐渐形成了由多个不变圈组成的不变圈链, 不变圈上的运动成了被周期 6、周期 5 和周期 4 调谐的拟周期运动。系统存在复杂而有规律的分岔行为, 这些实验结果可能与 KAM 环面有关。

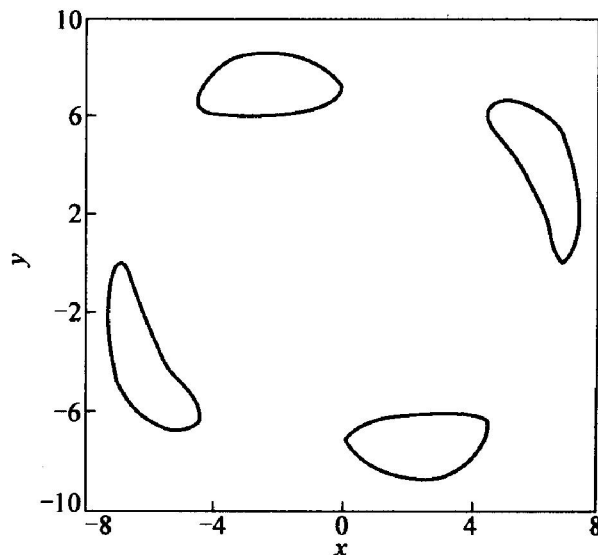


$\alpha = 0.2; \beta = 0.9; \delta = 0.05$

1— $m=4$; 2— $m=6$; 3— $m=8$; 4— $m=10$; 5— $m=12$

图 1 Hopf 分岔曲线

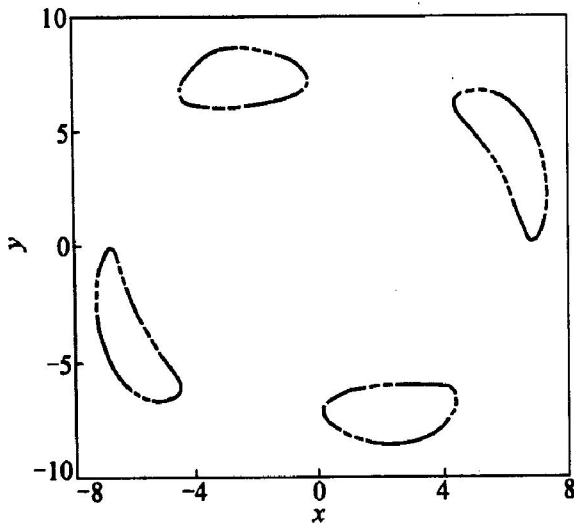
Fig. 1 Hopf bifurcation diagram



$\omega = 24.18, \lambda = 0.279$

图 2 $m=4$ 时的 Poincare 截面

Fig. 2 Poincare section when $m=4$



$$\omega = 24.18, \lambda = 0.303$$

图3 $m=4$ 时的Hopf圈

Fig. 3 Hopf circles when $m=4$ which to break

3 结 论

a. 通过运用Melnikov方法研究了时变小扰动哈密顿系统周期轨道发生Hopf分岔的条件,并将这些条件应用到了一类三维时变小扰动非自治系统,使之能用于非自治系统。

b. 数值积分结果表明,所研究的系统还存在复杂而有规律的环面分岔行为。

c. 通过理论确定的Hopf分岔值与数值积分的结果相吻合。

参考文献:

- [1] Rabbins K A. Periodic solutions and bifurcation structure at high R in the Lorenz model [J]. Appl Math, 2000, 48(5): 457 - 472.
- [2] Robinson C. Sustained resonance for a nonlinear system with slowly varying coefficients [J]. Math Anal Appl, 1999, 47(9): 847 - 860.
- [3] Sparrow C T. Chaos in a three dimensional single loop feedback system with a piecewise linear feedback function [J]. Math Anal Appl, 1992, 40(3): 275 - 291.
- [4] 李继彬. 混沌与Melnikov方法[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1989. LI Jī bin. Chaos and Melnikov Method[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1989.
- [5] 刘曾荣. 混沌的微扰判据[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1992. LIU Zeng-rong. Perturbation criterion of chaos[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1992.
- [6] Wiggins S, Holmes P. Periodic orbits in slowly varying oscillators [J]. Math Anal Appl, 1997, 45(6): 592 - 611.
- [7] Wiggins S, Holmes P. Periodic orbits in slowly varying oscillators [J]. Math Anal Appl, 1997, 45(6): 612 - 629.
- [8] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 北京: 气象出版社, 1988. LIU Shì shì, LIU Shì da. Special function[M]. Beijing: Meteorologic Press, 1989.
- [9] Byrd P F, Friedman M D. Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984: 35 - 48.