

文章编号: 1001-4322(2009)02-0190-05

1 维线阵离轴高斯光束的分数傅里叶变换*

陈森会, 张廷蓉

(四川师范大学 物理与电子工程学院, 成都 610068)

摘要: 为研究非相干的 1 维线阵离轴高斯光束通过分数傅里叶变换(FRFT)系统的传输特性, 利用 Collins 积分公式, 导出了其在 FRFT 面上的光强分布解析式, 并利用此解析式作数值计算和分析。研究表明: 非相干的 1 维线阵离轴高斯光束在 FRFT 面上的光强分布由 FRFT 的阶数和子光束数目共同决定, 其归一化的光强分布随 FRFT 的阶数周期性变化, 周期为 2; 子光束数目的大小及其奇偶性对归一化光强分布的影响取决于 FRFT 的阶数; 轴上归一化光强分布也随 FRFT 的阶数周期性变化, 变化周期也为 2。

关键词: 分数傅里叶变换; 1 维线阵离轴高斯光束; Collins 积分公式; 平顶高斯光束
中图分类号: O438.2 **文献标志码:** A

1993 年 Lohmann 等人将分数傅里叶变换(FRFT)引入光学。由于 FRFT 是传统傅里叶变换的发展和延拓, 并与传统傅里叶变换和非涅耳变换有紧密联系, 同时又具有许多新的特点, 因而在光学信号处理、光束整形、光束分析及光学信号加密等方面具有广阔应用前景。十多年来, 人们已对分数傅里叶变换的性质、光学实现和应用进行了广泛的研究^[1-5]。

另一方面, 如何从一台激光器中获得较高的输出功率(能量)并且保证良好的光束质量是近几年研究的热点和难点。光束合成技术是解决这一问题的手段之一, 迄今, 已有人对各类合成光束在自由空间及其湍流大气中的传输特性进行了研究^[6-13]。但鲜见关于非相干的 1 维线阵离轴高斯光束分数傅里叶变换的研究报道。本文利用 Collins 积分公式, 研究了非相干的 1 维线阵离轴高斯光束在 FRFT 面上的光强分布随 FRFT 的阶数 p 及子光束数目 N 的变化特性。

1 非相干的 1 维线阵离轴高斯光束通过分数傅里叶变换系统的传输方程

1 维线阵离轴高斯光束是由 N 束宽度为 w_0 的高斯光束沿某一方向均匀排列构成的, 假设其沿 x 轴排列, 相邻子光束的间距为 x_d , 则其在 $z=0$ 处的光场分布为^[6]

$$E(x_0) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \exp\left[-\frac{(x_0 - nx_d)^2}{w_0^2}\right], \quad n \in \left[-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}\right], \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

当 $N=1$ 时, 式(1)简化为位于坐标原点的高斯光束。设法使分数傅里叶变换系统的输入面与 $z=0$ 平面重合, 由 Collins 积分公式可求出输出面上的光场分布

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{i\lambda B}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x_0) \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda B}(Ax_0^2 + Dx^2 - 2xx_0)\right] dx_0 \quad (2)$$

式中: A, B, D 是分数傅里叶变换系统从输入面到输出面的传输矩阵 $\mathbf{R}(M)$ 中的矩元。本文采用 Lohmann I 型分数傅里叶变换系统实现此光束的分数傅里叶变换, 如图 1 所示。图中 f_1 为标准焦距, $\phi = p\pi/2$, p 代表分数傅里叶变换的阶数, f 表示透镜焦距, d 表示距离, P_1, P_2 分别为输入、输出面。显然, 系统随 p 变化的周期为 4, 当 $p=4m$ (m 为任意整数) 时, $d=0$; 当 $p=4m+2$ 时, $d \rightarrow \infty$ 。按图中所示关系同时改变 f 和 d , 可实现不同阶数的 FRFT。其传输矩阵为

$$\mathbf{R}(M) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & f_1 \sin\phi \\ -\sin\phi/f_1 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (3)$$

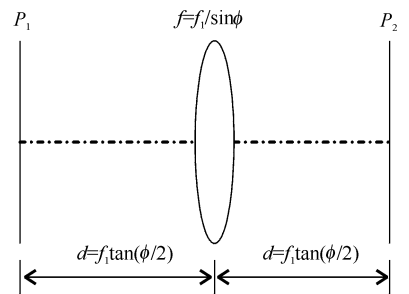


Fig. 1 Lohmann I optical system for performing the fractional Fourier transform

图 1 Lohmann I 型分数傅里叶变换系统

* 收稿日期: 2008-04-17; 修订日期: 2008-10-31

基金项目: 四川省教育厅重点项目(2004A088)

作者简介: 陈森会(1984—), 女, 硕士研究生, 主要从事激光光束传输与变换方面的研究; chensenhui_71@yahoo.com.cn。

将式(1)和式(3)代入式(2), 积分得

$$E(x) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sqrt{\frac{k\omega_0^2}{i(2B-ikA\omega_0^2)}} \times \exp\left\{\frac{ikAn^2}{2B-ikA\omega_0^2}x_d^2 + \frac{i2kBD-k^2\omega_0^2(1-AD)}{2B(2B-ikA\omega_0^2)}x^2 - \frac{i2kn}{2B-ikA\omega_0^2}xx_d\right\} \quad (4)$$

由式(3)和(4)可得非相干的 1 维线阵离轴高斯光束在 FRFT 面上的光强分布为

$$I(x) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \frac{\omega_0}{w} \exp\left[-\frac{2(x-nx_d')^2}{w^2}\right] \quad (5)$$

式(5)中

$$x_d' = x_d \cos\phi \quad (6)$$

$$w = \omega_0 \sqrt{\cos^2\phi + f_1^2 \sin^2\phi / Z_0^2} \quad (7)$$

式中: $Z_0 = \pi\omega_0^2/\lambda$ 表示光束的瑞利长度; w 表示 FRFT 面上每个子光束的束腰; $|x_d'|$ 表示相邻子光束的间距。由式(5)~(7)可以看出, 1 维线阵离轴高斯光束通过分数傅里叶变换系统后, 仍为 1 维线阵离轴高斯光束。但由式(6)可知, FRFT 面上, 两相邻子光束的间距 $|x_d'|$ 不再为常数, 而是随 p 周期性变化, 周期为 2: 当 $p=2m$ 时, 相邻子光束间距达到最大值 x_d ; 当 $p=2m+1$ 时, 两相邻子光束间距达到最小值 0。同样, 子光束的束腰变为 w , 其大小由 f_1, Z_0 以及 ϕ 共同决定, 如式(7)所示。若 $f_1 = Z_0$, 则 $w = \omega_0$; 若 $f_1 > Z_0$, 当 $\sin^2\phi = 1$, 即 $\phi = m\pi + \pi/2, p=2m+1$ 时, 束腰达到最大值 $\omega_0 f_1 / Z_0$; 若 $f_1 < Z_0$, 当 $\cos^2\phi = 1$, 即 $\phi = m\pi, p=2m$ 时, 束腰达到最大值 ω_0 。由式(5)~(7)还可以看出, 其在 FRFT 面上的光强分布随 ϕ 周期性变化, 由 $\phi = p\pi/2$, 可知其对应于分数傅里叶变换的阶数 p , 光强随 p 变化的周期 $T=2$ 。

式(5)的几种特例:

① $N=1$, 式(5)简化为高斯光束通过分数傅里叶变换系统的传输方程;

② $x=0$, 式(5)表示 1 维线阵离轴高斯光束在 FRFT 面上的轴上光强分布, 可简化为

$$I(0) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \frac{\omega_0}{w} \exp\left[-\frac{2n^2 x_d'^2}{w^2}\right] \quad (8)$$

式中: 轴上光强也随 p 周期性变化, 周期为 2, 且当 $\sin^2\phi = 1$, 即 $p=2m+1$ 时, 轴上光强取得最大值。

2 数值计算结果及物理分析

根据文献[6], 取如下的计算参数: $\omega_0 = 2.5$ mm, $\lambda = 632.8$ nm, $x_d = 5$ mm, $f_1 = 1/\lambda, N=9$ 。显然, $f_1 < Z_0$ 。图 2 表示 FRFT 面上的光强随 p 的变化特性。当 $p=0.98, 2.98$ 时, 光强分布完全相同, 可知其在 FRFT 面上的光强分布随 p 周期性变化, 周期为 2, 与理论分析一致。从图 2 可看出: 在一个确定的周期内, 当 p 从 $2m$ 增加到 $2m+1$ 时, 光束的形状和宽度都发生改变。当 p 靠近 $2m$ 时, 光束保持与入射光场相似的锯齿状分布 ($p=0$); 随着 p 增加, 锯齿的深度逐渐减小 ($p=0.92, 0.98$); 当 p 增加到一定程度时, 光束变成平顶分布 ($p=0.99$), 最后, 当 p 非常趋近或等于 $2m+1$ 时, 变成类高斯分布。当 p 从 $2m$ 增加到 $2m+1$ 时, 激光阵列的宽度逐渐减小, $p=2m+1$ 时, 达到最小值。通过计算知: $p=0, 0.92, 0.98, 0.99, 1.00$ 时, 光束的最大峰值光强分别为 1.000 7, 7.415 2, 20.405 4, 39.895 9, 176.714 6。可见, 当 p 从 $2m$ 增加到 $2m+1$ 时, 最大峰值光强不断增加。当 p 从 $2m+1$ 增加到 $2m+2$ 时, 光束形状、宽度及其最大峰值光强的变化与前半个周期恰好相反。

图 3 表示 N 的奇偶性对激光阵列光强分布的影响, 从图 3(a)中可以看出, 当 $p=0$ 时, $N=4$ 和 $N=5$ 的阵列光强分布刚好相反; 图 3(b)中二者差异相对减小, 但图 3(c)中, $p=1$ 时, 二者的归一化光强分布都为类高斯, 且分布曲线几乎完全重合。可见, N 的奇偶性对归一化光强分布的影响取决于 FRFT 的阶数 p : 在某一确定的周期内, 当 p 趋近 $2m$ 时, N 的奇偶性对光强分布影响很大, 随着 p 的增加, 这一影响逐渐减小, 当 $p=2m+1$ 时, N 的奇偶性对归一化光强分布的影响可以忽略。

图 4 表示子光束数目对非相干的 1 维线阵离轴高斯光束的影响。图 4(a)中, 当 $p=0.99$ 时, N 越大, 对应激光阵列的归一化光强的束腰越宽; 但图 4(b)中, 当 $p=1$ 时, 归一化光强分布曲线几乎完全相同, 但 $N=1, 5, 9$ 时, 其最大峰值光强分别为 19.635 0, 98.174 8, 176.714 6。由此可知, N 的大小对归一化光强分布的影响同样取决于 FRFT 的阶数 p : 当 p 趋近 $2m$ 时, N 越大, 阵列越宽; 随着 p 的增加, N 的大小对其归一化的光场

分布影响逐渐减小,当 $p=2m+1$ 时,无论 N 为何值,其归一化光强分布曲线完全重合。但 N 越大,意味着更多的子光束相叠加,最大峰值光强也越大。

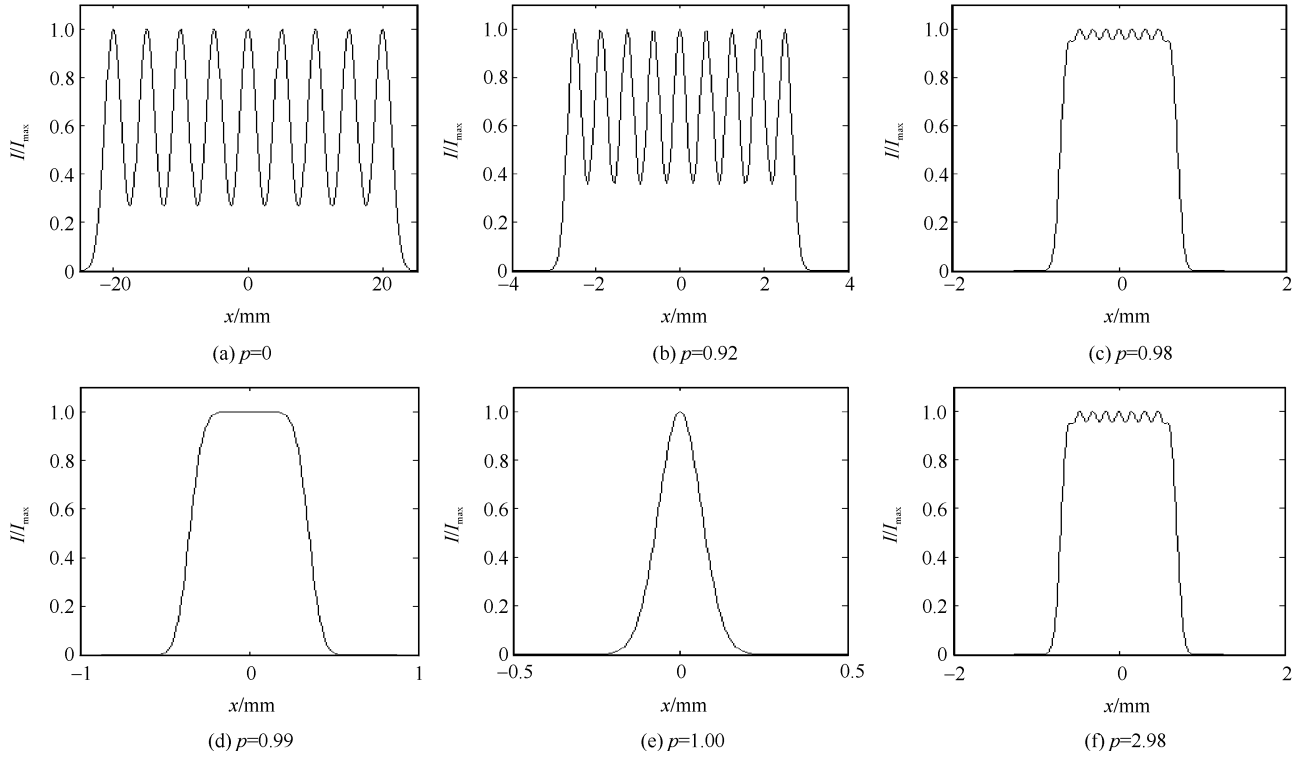


Fig. 2 Normalized intensity distribution on the FRFT plane for different fractional Fourier transforms orders

图 2 分数傅里叶变换面上归一化光强分布随 FRFT 阶数的变化情况

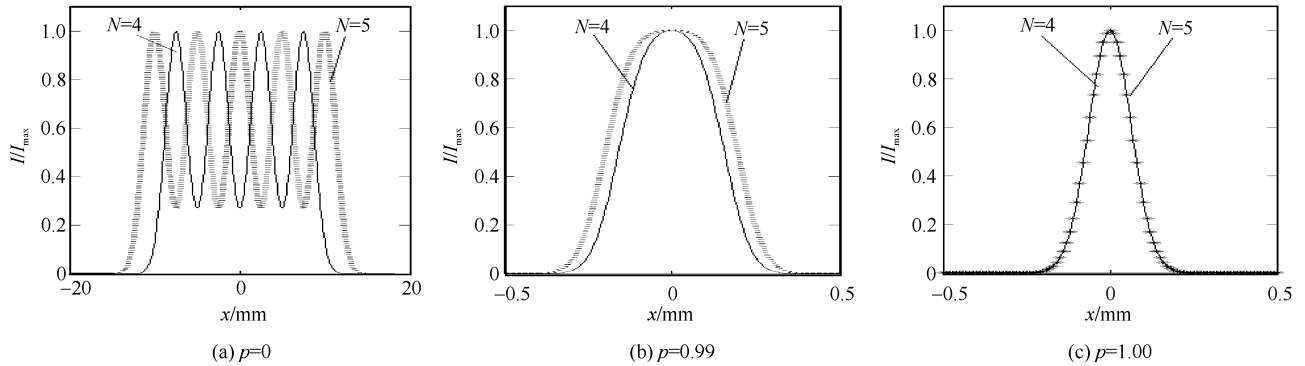


Fig. 3 Normalized intensity distribution on the FRFT plane varying with the odevity of sub-beams' number at different FRFT orders

图 3 分数傅里叶变换面上子光束数目的奇偶性对归一化光强分布的影响

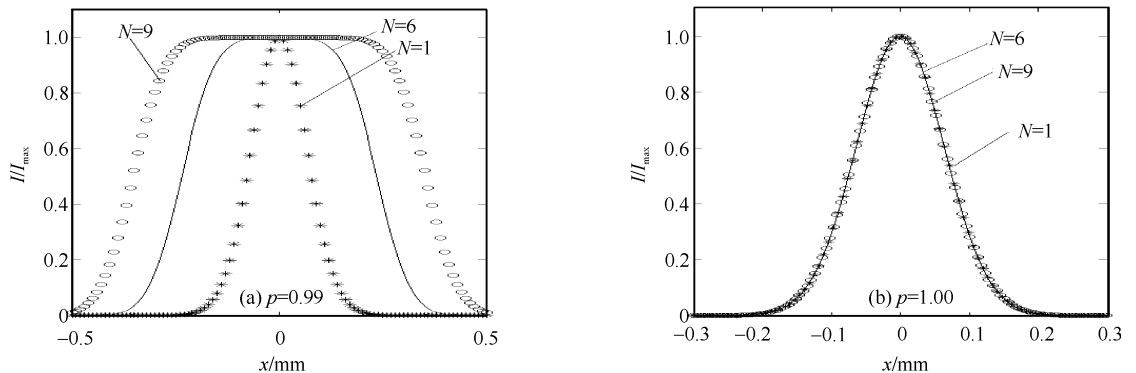


Fig. 4 Normalized intensity distribution on the FRFT plane for different sub-beams numbers

图 4 分数傅里叶变换面上子光束的数目对归一化光强分布的影响

图 5 表示 FRFT 面上轴上光强随 p 的变化,从图中可以看出,轴上光强随变化的周期为 2。且在 $p=2m+$

1 时获得最大光强,与前面对轴上光强的理论分析一致。图中, $N=2,5$ 和 15 时,对应光束的归一化轴上光强分布随 p 的变化趋势一致。当 $p=2m$ 时,光强都达到极小值,随着 p 的增加,归一化的光强分布都逐渐增加,当 $p=2m+1$ 时,都达到极大值。不同之处在于: N 越大,对应激光阵列的归一化轴上光强越小; N 越大,在 $p=2m+1$ 附近,归一化的轴上光强随 p 变化越快。

3 结 论

非相干的 1 维线阵离轴高斯光束在 FRFT 面上的光强分布由 FRFT 的阶数 p 和子光束数目 N 共同决定。(1) 其归一化的光强分布随 p 周期性变化,周期为 2,当 p 从 $2m$ 增加到 $2m+1$ 时,光强依次经历锯齿状、平顶状和类高斯状三阶段的变化,且峰值光强也不断增加;当 p 从 $2m+1$ 增加到 $2m+2$ 时,归一化的光强分布及其峰值光强的变化与前者相反。(2) N 的大小及其奇偶性对归一化的光强分布的影响取决于 FRFT 阶数 p :当 p 趋近于 $2m$ 时, N 的大小对归一化光强的影响较大,随着 p 的增加,影响逐渐减小,当 $p=2m+1$ 时,影响几乎可以忽略;另外, $p=2m$ 时, N 为偶数时的光场分布与奇数时的光强分布刚好相反,同样,随着 p 增加, N 的奇偶性对归一化光强的影响也逐渐减小,到 $p=2m+1$ 时,归一化的光强分布曲线完全重合。但 N 越大,相应光束的最大峰值光强也越大。(3) 轴上光强随 p 周期性变化,变化周期也为 2。因此,可以通过选择适当的 p 和 N 参数以获得需要的光强分布。

参考文献:

- [1] 吴平,胡向锋,陈天禄. Bessel-Gaussian 光束在分数傅里叶变换面上的光强分布[J]. 激光技术, 2005, **29**(4): 437-439. (Wu Ping, Hu Xiangfeng, Chen Tianlu. Intensity distributions of Bessel-Gaussian beam in a fractional Fourier plane. *Laser Technology*, 2005, **29**(4): 437-439)
- [2] 蒋成安,张廷蓉,张亚男. 二维余弦高斯光束基于魏格纳分布函数的分数傅里叶变换[J]. 湖北民族学院学报(自然科学版), 2006, **24**(2): 169-172. (Jiang Cheng'an, Zhang Tingrong, Zhang Ya'nan. Fractional Fourier transform of two-dimensional cosine-Gaussian beams based on the Wigner distribution function. *Journal of Hubei Institute for Nationalities (Natural Science Edition)*, 2006, **24**(2): 169-172)
- [3] 盛兆玄,王红霞,何俊发,等. 不对称分数傅里叶变换计算全息[J]. 激光技术, 2005, **29**(3): 295-296. (Sheng Zhaoxuan, Wang Hongxia, He Junfa, et al. Computer generated hologram of asymmetry fractional Fourier transform. *Laser Technology*, 2005, **29**(3): 295-296)
- [4] 王红霞,盛兆玄,毛彩荣,等. 双随机相位不对称分数傅里叶变换计算全息[J]. 激光技术, 2005, **29**(6): 620-622. (Wang Hongxia, Sheng Zhaoxuan, Mao Cairong, et al. Double random phase computer generated hologram of asymmetry fractional Fourier transform. *Laser Technology*, 2005, **29**(6): 620-622)
- [5] 吴平,李波,陈天禄,等. 分数傅里叶变换面上余弦-高斯光束的变换特性[J]. 强激光与粒子束, 2005, **17**(12): 1787-1790. (Wu Ping, Li Bo, Chen Tianlu, et al. Transformation properties of a cosine-Gaussian beam in fractional Fourier transform plane. *High Power Laser and Particle Beams*, 2005, **17**(12): 1787-1790)
- [6] 季小玲,汤明玥. 一维线阵离轴高斯光束经过湍流大气的传输特性[J]. 物理学报, 2006, **55**(9): 4968-4973. (Ji Xiaoling, Tang Mingyue. Propagation properties of one-dimensional off-axis Gaussian beams through the turbulent atmosphere. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(9): 4968-4973)
- [7] Cai Yangjian, Lin Qiang. Decentered elliptical Gaussian beam[J]. *Appl Opt*, 2002, **41**(21): 4336-4340.
- [8] Cai Yangjian, Lin Qiang. Higher-order elliptical Gaussian beam and its propagation characteristics[J]. *Journal of Optoelectronics · Laser*, 2002, **13**(2): 188-192.
- [9] Abramski K M, Colley A D, Baker H J, et al. High-power two-dimensional waveguide CO₂ laser array[J]. *IEEE J Quantum Electron*, 1996, **32**(2): 340-349.
- [10] Baker H J, Hall D R, Hornby A M, et al. Propagation characteristics of coherent array beam from carbon dioxide waveguide lasers[J]. *IEEE J Quantum Electron*, 1996, **32**(3): 400-407.
- [11] 王绍民,沈晓梅. 离轴高阶椭圆高斯光束[J]. 光电子·激光, 2004, **15**(2): 233-237. (Wang Shaomin, Shen Xiaomei. Decentered high-order elliptical Gaussian beams. *Journal of Optoelectronics · Laser*, 2004, **15**(2): 233-237)
- [12] Mei Zhangrong, Zhao Daomu. Decentered controllable elliptical dark-hollow beams[J]. *Opt Commun*, 2006, **259**: 415-423.
- [13] Mei Zhangrong, Guo Juguang, Zhao Daomu. Decentered elliptical Laguerre-Gaussian beam[J]. *Pure Appl Opt*, 2006, (8): 77-84.

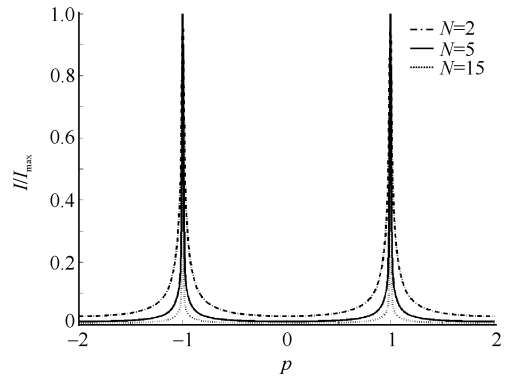


Fig. 5 Variation of the on-axis normalized intensity distributions of one-dimensional off-axis Gaussian beams on the FRFT plane with the FRFT order

图 5 FRFT 面上归一化的轴上光强分布随 FRFT 阶数的变化

Fractional Fourier transform for incoherent one-dimensional off-axis Gaussian beams

Chen Senhui, Zhang Tingrong

(College of Physics and Electronics Engineering, Sichuan Normal University, Chendu 610068, China)

Abstract: Based on the Collins formula, the transformation properties of incoherent one-dimensional off-axis Gaussian beams passing through the fractional Fourier transform(FRFT) system were studied. The analytical expressions for the intensity distribution of this beam were derived. By using the derived expressions, some numerical calculation examples were presented to illustrate the intensity properties on the FRFT plane. It is shown that the intensity distribution on the FRFT plane depend on FRFT order and sub-beams number. The variation of intensity distribution with FRFT order is periodic, and the period is 2. When the FRFT order is even, the number of sub-beam has a great effect on the normalized intensity distribution and the effect decreases with the order in crease; when the FRFT order increases to the adjacent odd number, the number of sub-beams almost has no effect on the intensity distribution, but has a great influence on the peak intensity. At last, the on-axis intensity distribution changes with FRFT order as well, with a period of 2.

Key words: fractional Fourier transform; one-dimensional off-axis Gaussian beams; Collins integral formula; flat-topped Gaussian beam