第 35 卷第 4 期
2004 年 8 月

中南大学学报(自然科学版)
J. CENT. SOUTH UNIV. (SCIENCE AND TECHNOLOGY)

Vol. 35 No. 4
Aug. 2004

非线性反应扩散方程解的 Blow-up 问题

刘 金 枝

(中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙, 410075)

摘要: 研究了非线性反应扩散方程 $u_t = \Delta u + f(u)$ 初边值问题的解的 Blow-up 问题, 证明了其光滑解只能在一个有界区间内存在。利用引入的"高斯函数"得到了一些新的非整体存在的充分条件, 这些条件对 L^p 解也普遍适用。此外, 对有关结果进行了相应的简化与改进。

关键词: 非线性反应扩散方程; 初边值问题; 光滑解; Blow-up 问题

中图分类号: O175.26　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1672-7207(2004)04-0694-03

Blow-up behavior of solutions for nonlinear reaction-diffusion equations

LIU Jin-zhi

(College of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: This paper studies the Blow-up behavior of the initial-boundary value problem for the nonlinear reaction-diffusion equation: $u_t = \Delta u + f(u)$, and proves that the smooth solutions can only exist in a limited extent of time. Some new sufficient conditions for the nonexistence of the global solutions are obtained using Gauss function. These conditions are also suitable to L^p solution.

Key words: nonlinear reaction-diffusion equation; initial-boundary value problem; smooth solution; Blow-up behavior

Blow-up 问题是非线性热传导方程中的重要问题, 一些国内外学者对其进行了研究[1-4]。

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是包含原点的有界光滑的开区域, 考虑下述初边值问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), (x, t) \in \Omega \times (0, T); \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = g(u), x \in \partial\Omega; \\ u(x, 0) = \varphi(x), x \in \Omega。 \end{cases} \tag{1}$$

李万同等应用"凸性方法"研究了上述初边值问题古典解的非整体存在性和解的 Blow-up 的问题[5-10], 并建立了下述定理。

定理 1 假设下述条件成立:

a. $\varphi(x) \geqslant 0, \varphi(x) \not\equiv 0$;

b. $u_t(x, 0) = f(\varphi(x)) + \Delta\varphi(x) > 0, x \in \Omega$;

c. $f(u) \in C^1(\mathbf{R}), f(u) \geqslant 0, \forall u \in \mathbf{R}$;

d. $\exists$ 正整数 $l \geqslant 3$, 使 $uf'(u) - (l-1)f(u) \geqslant 0, \forall u \geqslant 0$;

e. $g \in C^1(\mathbf{R}), g(s) \geqslant 0$ 且 $sg'(s) - (l-1)g(s) \geqslant 0, \forall s \geqslant 0$。

则

若 $T > T^* = \dfrac{l}{l-2}\dfrac{I(0)}{I'(0)}$, 则问题(1) 无古典解。其中:

收稿日期: 2004-01-28

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(50325415)

作者简介: 刘金枝(1971-), 女, 湖南益阳人, 讲师, 从事偏微分方程及其应用的研究

论文联系人: 刘金枝, 女, 讲师; 电话: 13170471512(手机); E-mail: liujinzhi21cn@sina.com

$$I(t)=\int_\Omega u^l(x,t)\,\mathrm{d}x\text{。}$$

若问题(1) 的解在 T_1 时刻"Blow-up", 则 $T_1 < T^*$。

在此, 作者应用文献[7] 中的"高斯函数法", 研究问题(1) 的古典解非整体存在性及解的 Blow-up 问题, 并给出一些新的解在有限时间内爆炸的充分条件。

主要结论及其证明如下。

定理 2　假设下述条件成立:

a. $\varphi(x)\geqslant 0$, $\varphi(x)\not\equiv 0$;

b. $f\in C^1(\mathbf{R})$ 且 ∃ 常数 $\gamma>0$ 及 $l>1$, 使得 $f(u)\geqslant \gamma u^l$;

c. $g(s)\geqslant 0$, $\forall s\geqslant 0$。

若 $T>T^*=\int_{J_\alpha(0)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{c^{1-l}\gamma s^l-2n\alpha s}$, 则问题(1) 不存在古典解。其中:

$$J_\alpha(t)=\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_\Omega u(x,t)\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x;$$

$$C=\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x\text{。}$$

证明　设 $u(x,t)$ 为式(1) 的古典解, 存在时间为 T, 由比较原理[6], 有 $u(x,t)\geqslant 0$, 且可证明:

$$u(x,t)\in C^{3,2}(Q_T)\cap C^{2,1}(\overline{Q_T});$$

$$\frac{\partial(\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2})}{\partial v}\leqslant 0\text{。}$$

令

$$G_\alpha(\varphi)=\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_\Omega \varphi(x)\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x,$$

$$J_\alpha(t)=G_\alpha(u(t))=\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_\Omega u(x,t)\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}J_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_\Omega u_t\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x+\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_\Omega f(u)\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x\text{。}\qquad(2)$$

利用 Green 公式并对式(2) 分部积分得

$$\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x=\int_\Omega u\,\Delta\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\left[\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\frac{\partial u}{\partial v}-u\frac{\partial(\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2})}{\partial v}\right]\mathrm{d}s=$$

$$\int_\Omega u\,\Delta\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\left[\frac{\partial u}{\partial v}-\mathrm{e}^{\alpha|x|^2}\frac{\partial(\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2})}{\partial v}u\right]\mathrm{d}s=$$

$$\int_\Omega u\,\Delta\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\cdot\left[g(u)-\mathrm{e}^{\alpha|x|^2}\frac{\partial(\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2})}{\partial v}u\right]\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\int_\Omega u\,\Delta\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x=(-2n\alpha)\int_\Omega u\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x+\alpha^2\int_\Omega |x|^2u\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x\text{。}\qquad(3)$$

将式(3) 代入式(2), 并利用条件 **b.** 得:

$$\frac{\mathrm{d}J_\alpha}{\mathrm{d}t}\geqslant\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_\Omega \gamma u^l\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x-2n\alpha J_\alpha(t)\text{。}$$

利用 Hölder 不等式, 并注意到:

$$\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_\Omega \mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x=C<\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x=1,$$

得:

$$J_\alpha^l(t)=\left[\int_\Omega u\left[\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\right]^{1/l}\cdot\left[\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\right]^{1-(1/l)}\mathrm{d}x\right]^l\leqslant C^{l-1}\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{n/2}\int_\Omega u^l\mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x\text{。}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}J_\alpha}{\mathrm{d}t}\geqslant C^{1-l}\gamma J_\alpha^l(t)-2n\alpha J_\alpha(t);\qquad(4)$$

$$C^{1-l}\gamma J_\alpha^l(0)-2n\alpha J_\alpha(0)=C^{1-l}J_\alpha(0)\cdot\{\gamma J_\alpha^{l-1}(0)-2n\alpha[\int_\Omega \mathrm{e}^{-\alpha|x|^2}\mathrm{d}x]^{l-1}\}\geqslant C^{1-l}J_\alpha(0)\{\gamma J_\alpha^{l-1}(0)-2n\alpha|\Omega|^{t-1}\}\text{。}$$

故总存在充分小的正数, 使得以上不等式大于零。由此及式(4) 得

$$C^{1-l}\gamma J_\alpha^l(t)-2n\alpha J_\alpha(t)>0\text{。}$$

将式(4) 从 0 到 t 积分得

$$t<\int_{J_\alpha(0)}^{J_\alpha(t)}\frac{\mathrm{d}s}{c^{1-l}\gamma s^l-2n\alpha s}\text{。}$$

故

$$T<\int_{J_\alpha(0)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{c^{1-l}\gamma s^l-2n\alpha s}\text{。}$$

定理 3　假设下述条件成立:

a. $\varphi(x)\geqslant 0$, $\varphi(x)\not\equiv 0$;

b. $f(u)\in C^1(\mathbf{R})$, 且 ∃ 常数 γ: $0<\gamma-1<\frac{2}{n}$ 及 $l>1$, 使得 $f(u)\geqslant \gamma u^l$;

c. $g(s) \geqslant 0, \ \forall s \geqslant 0$。

则问题(1) 的存在时间 T 有限, 且

$$\lim_{t \to T^-} \sup_{x \in \Omega} | u(x, t) | = \infty。 \tag{5}$$

证明 由定理2知, 问题(1) 存在惟一的局部古典解。且由 $\varphi(x) \not\equiv 0$ 知: 存在 $\varepsilon > 0$ 及一有界区域 $\Omega_0 \subset \Omega$, 使得 $\varphi(x) \geqslant \varepsilon$, 且 $|\Omega_0| > 0$, 从而,

$$\int_\Omega \varphi(x) e^{-\alpha |x|^2} dx \geqslant \varepsilon |\Omega_0| e^{-ad^2}。$$

其中: $d = \operatorname{diam} \Omega$。

若能证明存在 $\alpha > 0$, 使得

$$\varepsilon |\Omega_0| > (2n)^{1/(\gamma-1)} \pi^{n/2} e^{\alpha d^2} \alpha^{-\delta} \tag{6}$$

成立, 则

$$\left[\left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{n/2} \int_\Omega \varphi(x) e^{-\alpha |x|^2} dx \right]^{\gamma-1} > 2n\alpha。$$

因 $\delta = \frac{n}{2} - \frac{1}{\gamma - 1} < 0$, 故当 α 充分小时, 总可使不等式(6) 成立, 于是, 由文献[7] 中的定理 2.1 知, $u(x, t)$ 的存在时间 T 有限, 且利用文献[1] 的方法可以证明, 当 $t \to T^-$ 时,

$$| u(x, t) | \geqslant \frac{C}{(T - t)^{1/(\gamma-1)}}。$$

从而式(5) 成立。

注记 1: 满足条件的例子可仿照文献[8] 给出。

注记 2: 本文结果适用于问题(1) 的古典解与 L^p 解, 也适用于任何空间维数。

致谢: 本文得到中南大学吴爱祥教授和唐先华教授的悉心指导, 在此深表感谢!

参考文献:

[1] WEISSLER F B. Existence and non-existence of global solutions for semi linear heat equations [J]. Israel of Math, 1981, 38: 29-40.

[2] PAO C V. On the Blowing-up behavior of solutions for a parabolic boundary value problem [J]. Appl Anal, 1980, 10(1): 5-13.

[3] KATE T. Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations [J]. Comm Pure Appl Math, 1980, 33(4): 501-505.

[4] GLASSEY R T. Blow up theorems for nonlinear wave equations [J]. Math Z, 1972, 132: 183-203.

[5] 李万同, 赵 柱, 费祥历. 非线性反应扩散方程解的 Blow-up [J]. 甘肃科学学报, 1999, 11 (1): 10-14.
LI Wan-tong, ZHAO Zhu, FEI Xiang-li. The Blow-up behavior of the solutions for nonlinear reaction-diffusion equations [J]. Ganshu Science Soc, 1999, 11 (1): 10-14.

[6] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1990: 151-154.
YE Qi-xiao, LI Zheng-yuan. Reaction-diffusion equations [M]. Beijing: Science Press, 1990: 151-154.

[7] 刘亚成. 半线性热方程整体解的存在性与非存在性[J]. 数学年刊, 1997, 18A(1): 65-72.
LIU Ya-cheng. Existence and non-existence of global solutions for semi linear heat equations [J]. Math Anal, 1997, 18A(1): 65-72.

[8] 管志成. 一类非线性抛物型方程解的 Blow-up [J]. 数学年刊, 1994, 5A(2): 177-180.
GUAN Zhi-cheng. The Blow-up behavior of the solutions for a class of nonlinear parabolic equations [J]. Math Anal, 1994, 5A (2): 177-180.

[9] 邓聚成. 一类反应扩散方程解的 Blow up [J]. 应用数学学报, 1987, 10(4): 450-456.
DENG Ju-cheng. The Blow-up behavior of the Solutions for a class of reaction-diffusion equations [J]. Applied Math Soc, 1987, 10 (4): 450-456.

[10] 王明新. 一个反应扩散方程的门槛结果[J]. 数学学报, 1994, 37(6): 735-743.
WANG Ming-xin. The threshold results for a reaction-diffusion equation [J]. Math Soc, 1994, 37(6): 735-743.